

Promítání

Pavel Strachota

FJFI ČVUT v Praze

7. dubna 2020

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Typy promítání
- 3 Matematický popis promítání
- 4 Implementace promítání

Obsah

- 1 Úvod
- 2 Typy promítání
- 3 Matematický popis promítání
- 4 Implementace promítání

Úvod

- *promítání (projekce)* = zobrazení (transformace) trojrozměrných objektů do dvourozměrné plochy (zobrazovacího zařízení) - *průmětny (projection plane)*
- ztráta prostorové informace
- průmětna ... většinou **rovina**
 - ⇒ úsečka v prostoru \mapsto úsečka v rovině
 - ⇒ lze promítat jen koncové body a pak spojit
 - lze promítat i na kouli apod.
 - starší CRT nebyly rovinné - zanedbávalo se
- různé promítací metody vhodné pro různé účely (deskriptivní geometrie)
 - někdy je potřeba z 2D obrazu vyčíst vlastnosti 3D objektů (vzdálenosti, úhly) \implies promítání musí např. zachovávat rovnoběžnost apod.

Obecné problémy promítání

- *promítací paprsek* - vychází z každého bodu 3D scény a dopadá na průmětnu. V místě dopadu vytváří *průmět*
 - směr paprsku závisí na promítací metodě
- průmětna - nyní uvažujeme jen rovinu, teoreticky neomezenou, ve skutečnosti výřez (*viewport*)
- *pohledový objem* - 3D objem obsahující objekty, které se při dané metodě promítání zobrazí na omezené průmětně
 - vidíme jen věci před sebou
 - příliš vzdálené věci nevidíme (urychlí rendering)
- promítání: **rovnoběžné** a **středové** (*perspektivní*)

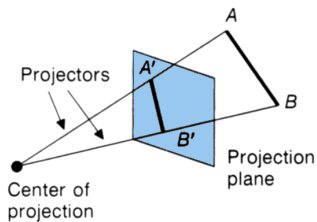
Obsah

- 1 Úvod
- 2 Typy promítání**
- 3 Matematický popis promítání
- 4 Implementace promítání

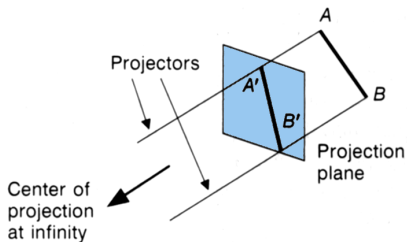
Typy promítání

- **rovnoběžné promítání** - charakterizováno **směrem** promítání (všechny promítací paprsky mají stejný směr)
 - **pravoúhlé** - paprsky jsou kolmé na průmětnu
 - **kosoúhlé** - paprsky svírají s průmětnou jiný úhel než 90°
 - zachovává rovnoběžnost \implies vhodné pro technické aplikace
- **středové promítání** - určeno **středem** promítání, do něž míří promítací paprsky
 - více realistické
 - formalismus: je-li střed promítání nekonečně daleko \implies rovnoběžné promítání

Středové vs. rovnoběžné promítání



(a)

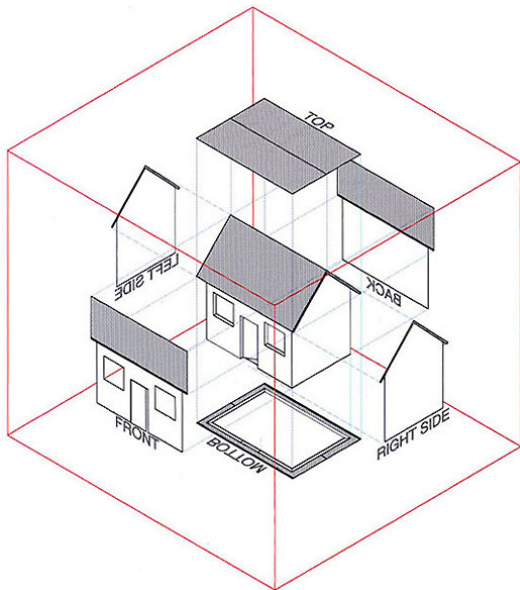


(b)

Typy rovnoběžného promítání

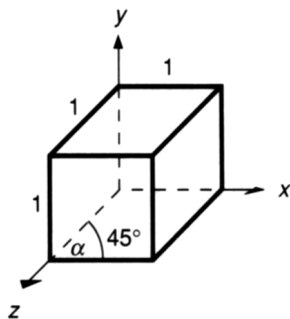
- **pravoúhlé (*ortografické*)** - v technických výkresech
 - půdorys (top-elevation)
 - bokorys (side-elevation)
 - nárys (front-elevation)
 - *axonometrické* promítání - průmětna není rovnoběžná s žádnou ze souřadnicových os
 - ⇒ zobrazí více stěn osově orientovaného kvádrů
 - *izometrické* - normála průmětny svírá stejný úhel se všemi souř. osami
- *kavalírní* promítání - promítací paprsky svírají s průmětnou úhel 45°
- *kabinetní* promítání - promítací paprsky svírají s průmětnou úhel $\arctan 2$

Ortografické promítání

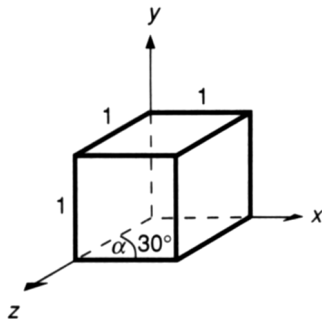


Kavalírní promítání

- promítací paprsky svírají s průmětnou úhel $45^\circ \implies$ přímky kolmé na průmětnu (xy) **zachovávají** délku
- úhel přímek ve směru osy z a x se volí typicky buď 30° nebo 45°



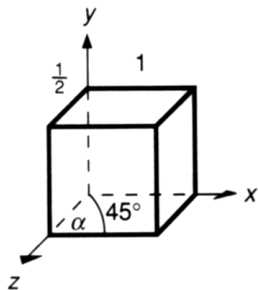
(a)



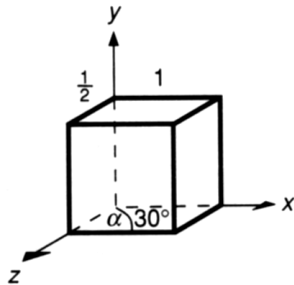
(b)

Kabinetní promítání

- promítací paprsky svírají s průmětnou úhel $\arctan 2 \approx 63.4^\circ$
 \implies přímky kolmé na průmětnu (xy) mají **poloviční** délku
- úhel přímek ve směru osy z a x se volí typicky buď 30° nebo 45°



(a)



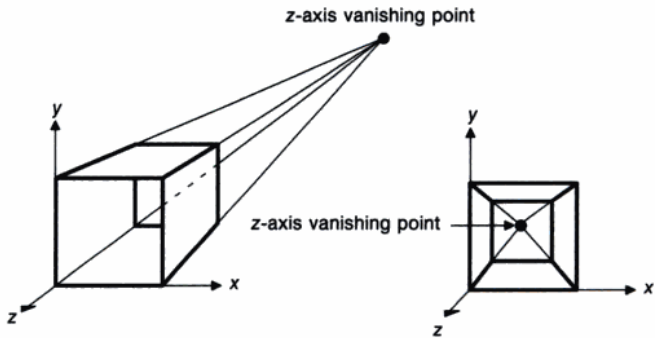
(b)

Středové (perspektivní) promítání

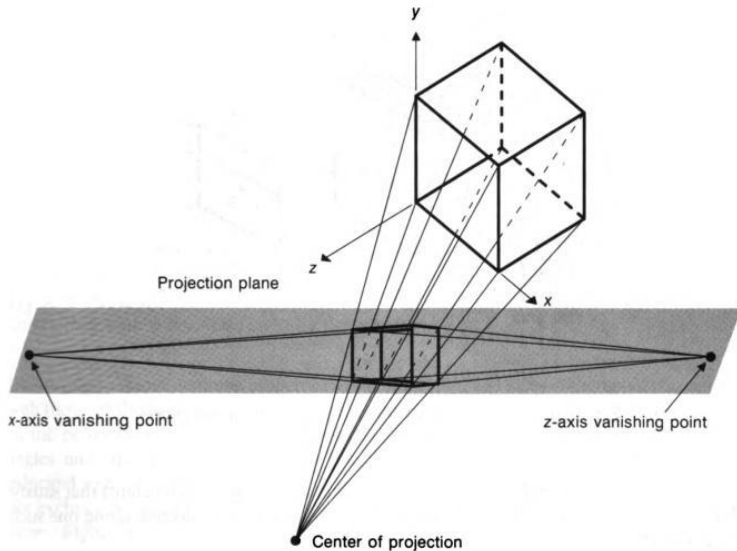
Obecně může mít průmětna libovolnou polohu. Rozlišují se však případy:

- **jednobodová** (jednouběžníková) perspektiva - průmětna protíná jedinou souřadnicovou osu. Všechny úsečky kolmé na průmětnu míří do jednoho bodu ... *hlavní úběžník* (*principal vanishing point*)
- **dvoubodová** (dvouúběžníková) perspektiva - průmětna protíná dvě souřad. osy. Hrany *osově orientovaného* kvádrů směřují do **dvou** hlavních úběžníků.
- **trojbodová** (trojúběžníková) perspektiva - nejobecnější případ, průmětna protíná všechny tři souřad. osy. Hrany os. orient. kvádrů směřují do **tří** hlavních úběžníků

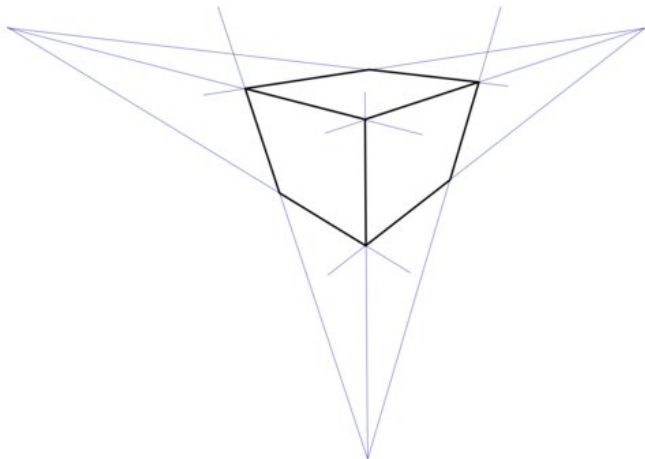
Typy perspektiv



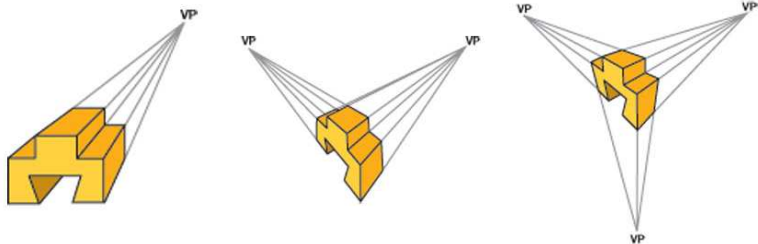
Typy perspektiv



Typy perspektiv



Typy perspektiv



Obsah

- 1 Úvod
- 2 Typy promítání
- 3 Matematický popis promítání**
- 4 Implementace promítání

Promítání jako transformace

- souřadnicové systémy
 - WCS (*world coordinate system*)
 - VCS (*viewing coordinate system*), někdy také VRC (*viewing reference coordinate*)
- promítání bude transformace mezi WCS a VCS
- **homogenní souřadnice** \implies zápis v maticovém tvaru

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{M}\mathbf{P},$$

kde

$$\mathbf{P} = [X, Y, Z, W]^T \in \text{WCS} \text{ a } \mathbf{P}_p = [U, V, N, W_p]^T \in \text{VCS}$$

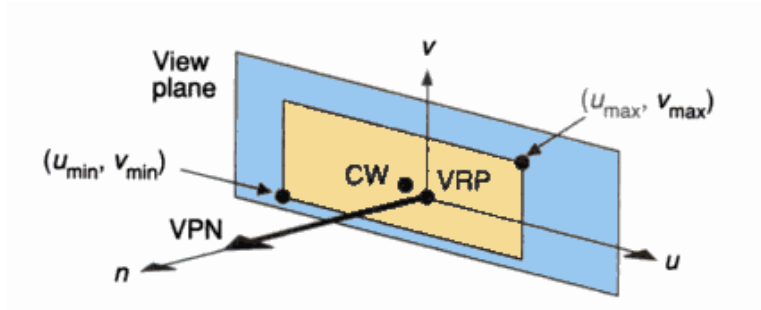
\implies výhoda - projekci \mathbf{M} lze skládat s transformacemi
pouhým násobením

Poznámka: $(x, y, z) \mapsto [xW, yW, zW, W] := [X, Y, Z, W]$.

Specifikace pohledu kamery 1/2

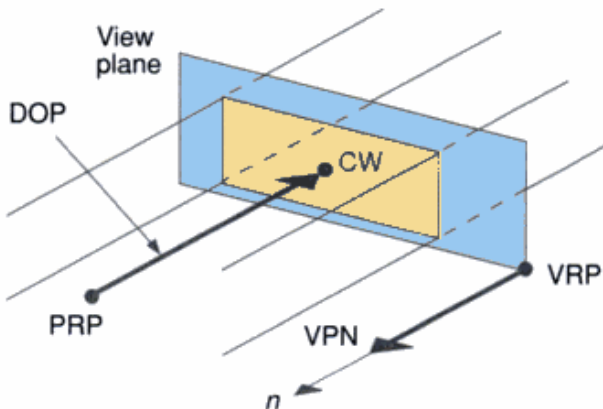
- pozice průmětny \mathbf{V} ... tzv. VRP (*view reference point*) - počátek VCS
- orientace průmětny - vektor \mathbf{n} , tzv. VPN (*view-plane normal*)
- „*view up*“ vektor (VUP) \mathbf{v} určující směr osy v
- vektor $\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ určuje směr osy u
- CW (střed okna) - obecně různý od \mathbf{V}
- PRP (*projection reference point*)
 - v případě středového promítání je PRP středem promítání (COP, *center of projection*)
 - v případě rovnoběžného promítání vektor $DOP = PRP - CW$ určuje směr promítání (*direction of projection*)

Specifikace pohledu kamery 2/2



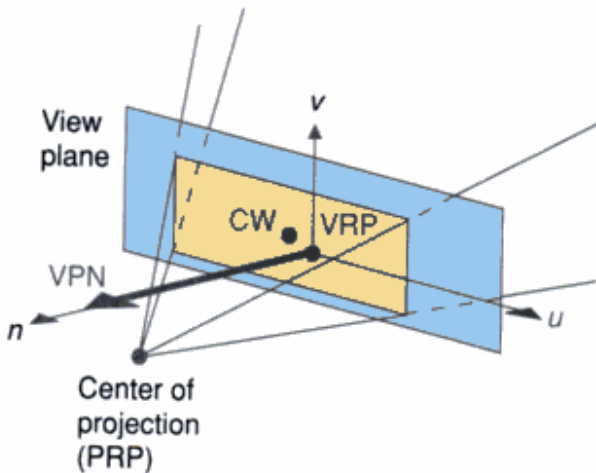
Umístění průmětny

Specifikace pohledu kamery 2/2



Rovnoběžné promítání

Specifikace pohledu kamery 2/2



Středové promítání

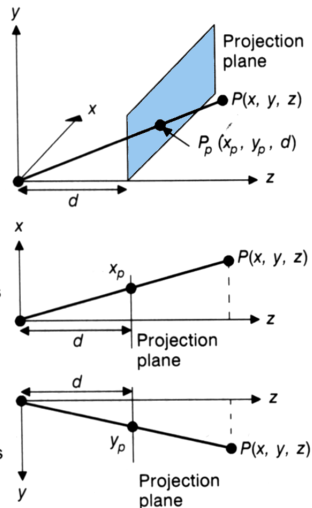
Transformace pro středové promítání 1/3

- pro jednoduchost: průmětna umístěna v rovině xy , ve vzdálenosti d od počátku ve směru z , tj. $z = d$
- střed promítání je $\mathbf{0}$
- z podobnosti trojúhelníků máme

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z},$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}.$$

- funguje jen pro $z > 0$!! (skutečný obraz)



Transformace pro středové promítání 2/3

Maticový zápis

- matice transformace

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

- potom totiž pro $\mathbf{P} = [x, y, z, 1]$ (tzv. *homogenizovaný* bod, kde první 3 složky jsou přímo kartézské souřadnice) máme

$$\mathbf{P}_p (= [U \ V \ N \ W_p]) = \mathbf{MP} = [x \ y \ z \ \frac{z}{d}]^T$$

a po převodu do 3D dostáváme

$$(x_p, y_p, z_p) = (u, v, n) = \left(\frac{U}{W_p}, \frac{V}{W_p}, \frac{N}{W_p} \right) = \left(\frac{xd}{z}, \frac{yd}{z}, d \right),$$

v souladu s poměry

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}; \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}.$$

Transformace pro středové promítání 3/3

Alternativní formulace

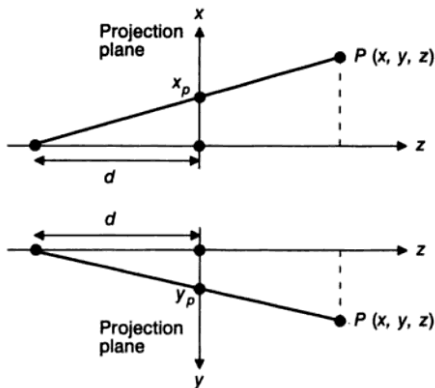
- průmětna umístěna v rovině xy , prochází počátkem
- střed promítání je $(0,0,-d)$
- z podobnosti trojúhelníků nyní

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d}, \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d},$$

takže

$$x_p = \frac{x}{z/d+1}, \quad y_p = \frac{y}{z/d+1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{pmatrix}$$



Transformace pro rovnoběžné promítání

- pravoúhlá (ortografická) projekce na průmětnu danou rovnicí $z = 0$.
- $\mathbf{P} = [x, y, z, 1] \mapsto \mathbf{P}' = [x, y, 0, 1]$



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- podobně další transformace

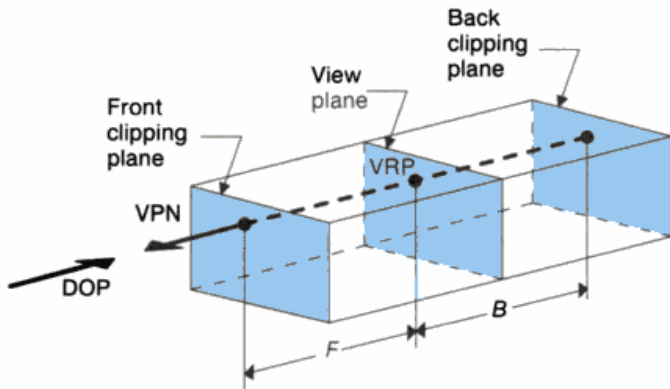
Obsah

- 1 Úvod
- 2 Typy promítání
- 3 Matematický popis promítání
- 4 Implementace promítání**

Implementace promítání

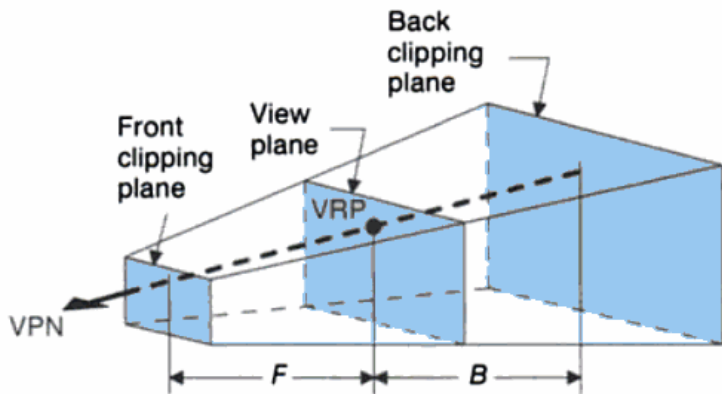
- **pohledový objem**
 - dán přední a zadní **ořezávací rovinou** (*near/front a far/back clipping plane*)
 - **kvádr** (při při rovnoběžném promítání)
 - **komolý jehlan** (*frustum*) při středovém promítání
- **ořezávání** pohledovým objemem
 - nutné ještě před promítáním
 - zaručí, že transformace půjde provést
- po promítání ještě **transformace do HW souřadnic** zařízení

Pohledový objem



Rovnoběžné promítání

Pohledový objem



Středové promítání

Ořezávání polygonů pohledovým objemem

... při perspektivní projekci

1 frustum culling

- "odstřelí" všechny polygony mimo pohledový objem (snadné - skal. součin s norm. vektory hraničních rovin)

2 near plane clipping

- ořezávání polygonů přední ořezávací rovinou (např. **Sutherland-Hodgmanovým** algoritmem ve 3D → viz **POGR1**, *Rastrové algoritmy*)
- zbudou vrcholy s $z > 0 \implies$ **lze provést perspektivní projekci**

3 whole frustum clipping

- 1 perspektivní projekce v homog. souřadnicích \implies z komolého jehlanu krychle
- 2 ořezávání rovinami již rovnoběžnými s osami (opět Sutherland-Hodgman, de facto jen ve 2D)

Zachování informace o hloubce 1/4

- popsané transformace zahazují původní informaci o hloubce (vzdálenosti od průmětny, tj. zde souřadnici z) - nahrazují ji souřadnicí z průmětny
- hloubka je potřeba pro řešení viditelnosti
- souřadnici n bodu \mathbf{P}_p je třeba spočítat jinak
 - lze $n = z$, tj. $\mathbf{P}_p = \left(\frac{xd}{z}, \frac{yd}{z}, z\right)$ místo $\mathbf{P}_p = \left(\frac{xd}{z}, \frac{yd}{z}, d\right)$, ale potom úsečky ve WCS \mapsto (obecně) křivky ve VCS
 - průmět, tj. souřadnice $(u, v) = (x_p, y_p)$ jsou OK, tj. v průmětně vidíme úsečku, **ale**:
 - **problém při řešení viditelnosti** - potřebujeme všechny 3 souřadnice

Zachování informace o hloubce 2/4

Řešení

- správnou informaci o hloubce + zachování linearit úseček zajišťuje transformace PD (*pseudo-distance*) definovaná jako

$$PD(z) = A - \frac{B}{z},$$

kde $B > 0$.

- přední (near) a zadní (far) ořezávací rovina $z = n$, $z = f$.
- chceme $PD(n) = -1$, $PD(f) = 1 \implies$

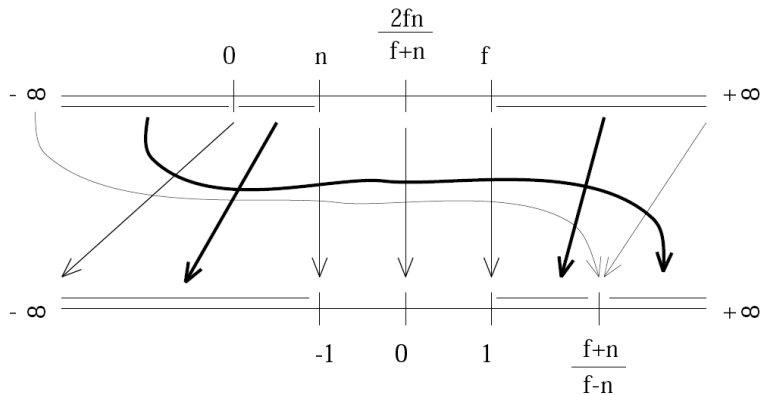
$$A = \frac{f+n}{f-n}, \quad B = \frac{2fn}{f-n}$$

\implies

$$PD(z) = \frac{z(f+n) - 2fn}{z(f-n)}.$$

Zachování informace o hloubce 3/4

Vlastnosti *PD*



Zachování informace o hloubce 4/4

Numerické vlastnosti PD

graf $PD(z)$: $n = 2, f = 10$

- zobrazení intervalů:

- $\left[n, \frac{2fn}{f+n} \right] \mapsto [-1, 0]$

- $\left[\frac{2fn}{f+n}, f \right] \mapsto [0, 1]$

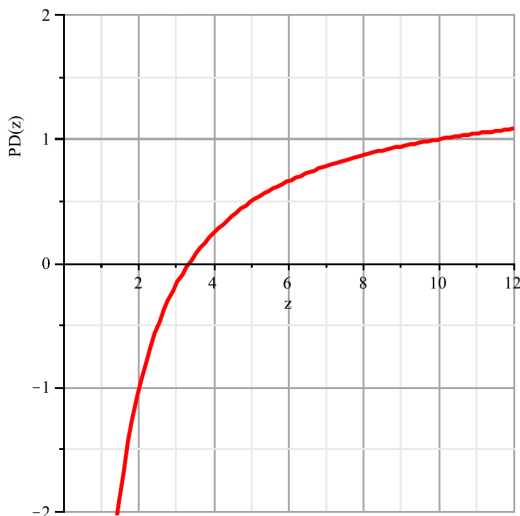
- velikosti int. pro $f \gg n$:

- $\frac{2fn}{f+n} - n \approx 2n - n = n$

- $f - \frac{2fn}{f+n} \approx f - 2n \gg n$

\implies „komprese“ velkého rozsahu z do intervalu $[0, 1]$

\implies možný problém s konečnou přesností počítače (z-buffer v graf. kartách obvykle 32-bit integer)



Literatura

-  J. F. Hughes, A. van Dam, M. McGuire, D. F. Sklar, J. D. Foley, S. K. Feiner, K. Akeley: *Computer Graphics: Principles and Practice (3rd ed.)*, Addison Wesley, 2014.
-  J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes: *Computer Graphics: Principles and Practice*, Addison Wesley, 1997.
-  Žára, Beneš, Sochor, Felkel: *Moderní počítačová grafika*. Computer Press, 2005