Teorie signálu pro počítačovou grafiku

Pavel Strachota

FJFI ČVUT v Praze

4. ledna 2023

Obsah

Obsah

Obraz a signál

- **obraz** = funkce $f : \Omega \mapsto \mathcal{C}$, kde Ω je „plátno“ a $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ je prostor barev.
- obraz chápeme jako spojitý
- **signál** = lib. funkce přenášející informaci (a tedy i obraz)
  - může záviset na čase
- signál
  - spojitý
  - diskrétní = definovaný na nejvýše spočetné množině bodů

Digitalizace a rekonstrukce signálu

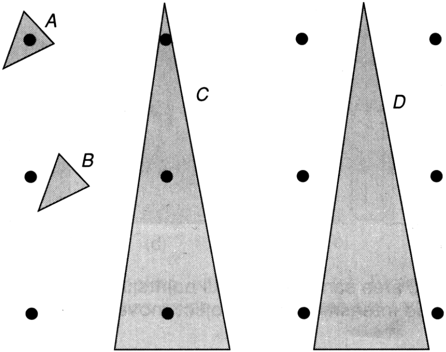
- omezíme se na prostorový signál
- **vzorkování** signálu = měření signálu v konečném počtu bodů - diskretizace *def. oboru* Ω
- **kvantování** signálu = převod na konečný počet barev - diskretizace *oboru hodnot*
- **rekonstrukce** signálu = vytvoření spojitého signálu s využitím hodnot v diskrétních bodech

struktury s vysokou frekvencí nelze vzorkováním postihnout $\Longrightarrow$ **aliasing**

Vzorkování

1. bodové vzorkování

- „změříme“ signál (obvykle) na pravidelné síti bodů: $f_{ij} = f(ih, jh)$ ... h je velikost oka sítě
- mohou nám snadno uniknout objekty s rozměry $< h$



Vzorkování

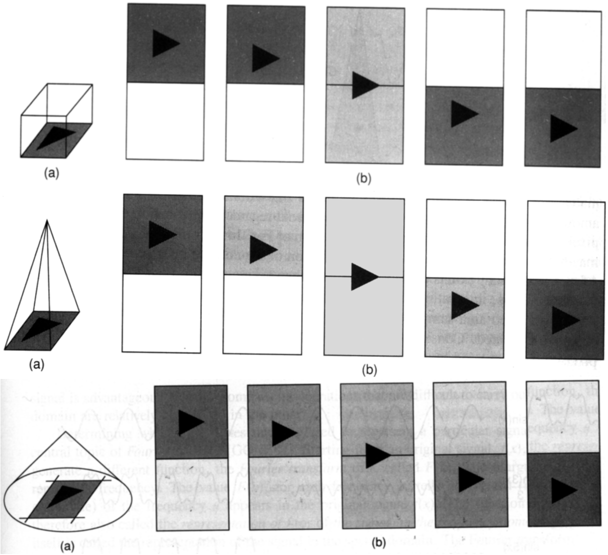
2. plošné vzorkování

- integrujeme intenzitu signálu v nějakém „objemu“ (intervalu, ploše)
- pixel = čtverec
- libovolně malé objekty přispějí k intenzitě čtverce
  - úměrně své velikosti
  - bez ohledu na polohu v rámci pixelu

3. vážené plošné vzorkování

- při integraci násobíme signál váhovou funkcí
- různé hodnoty váhové funkce v různých místech pixelu
- integrace i přes větší objem než 1 pixel

Vážené plošné vzorkování



Obsah

Fourierovy řady

- Hilbertův prostor H, báze (úplný OG soubor) $X = (\boldsymbol{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Fourierova řada vektoru

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \boldsymbol{x}_k \qquad \text{kde } \alpha_k = \frac{\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{x}_k \rangle}{\|\boldsymbol{x}_k\|^2}.$$

Trigonometrické Fourierovy řady

- interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $l = b - a$.
- OG báze Hilbertova prostoru $\mathrm{L}_2\left((a, b)\right)$: $\left(\cos \frac{2\pi nx}{l}\right)_{n \in \mathbb{N}_0} \cup \left(\sin \frac{2\pi nx}{l}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Fourierova řada funkce $f \in \mathrm{L}_2\left((a, b)\right)$

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{2\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{l}$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi nx}{l} \mathrm{d}x \ \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi nx}{l} \mathrm{d}x \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trigonometrické Fourierovy řady

Exponenciální tvar

Fourierova řada funkce $f \in \mathrm{L}_2\left((a, b)\right)$

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{l}\right),$$

s koeficienty

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{l}\right) \mathrm{d}x$$

($c_0 = a_0$ a pro $n > 0$ je $c_n = a_n + \mathrm{i} b_n$ a $c_{-n} = a_n - \mathrm{i} b_n$)

- oba tvary jsou ekvivalentní (viz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$)
- součet $\tilde{f}$: periodická funkce s periodou l

Fourierova transformace

- převod mezi tzv. prostorovou a frekvenční oblastí

Fourierova transformace v 1D

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i u x} \mathrm{d}x$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\, \mathrm{e}^{+2\pi i u x} \mathrm{d}u$$

Fourierův obraz

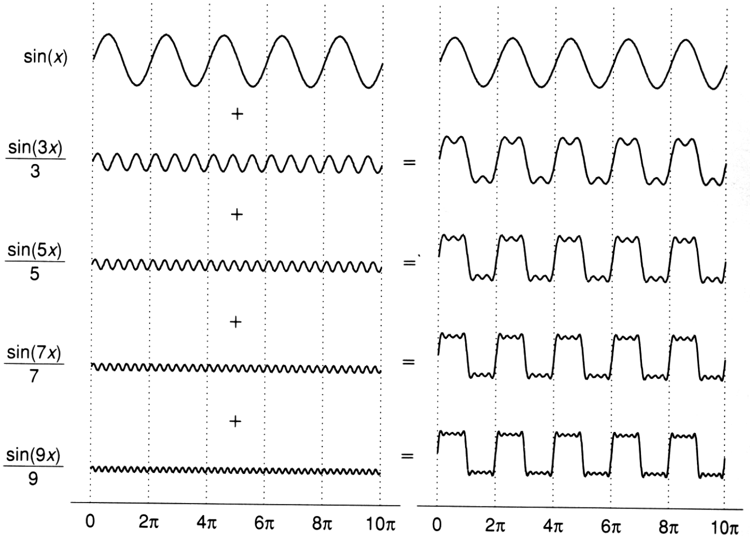
- $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$; značení: $F = \mathcal{F}[f]$
- $\left|F(u)\right|$ ... amplituda harmonické složky o frekvenci u $(u > 0)$
- $\arg F(u)$ ... fáze harmonické složky o frekvenci u

Schwartzův prostor $\mathcal{S}$

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které v $\pm\infty$ klesají rychleji než x^{-n} $\forall n \in \mathbb{N}$
- totéž platí pro všechny jejich derivace.
- např. $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
- $\mathcal{S}$ je vektorový prostor uzavřený vůči derivaci a násobení polynomem
- $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ platí rovněž $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$ a *inverzní formule*

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f.$$

Skládání harmonických signálů



Fourierova transformace ve 2D

Fourierova transformace v 2D

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u,v)\,\mathrm{e}^{+2\pi i(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- u ... frekvence ve směru x
- v ... frekvence ve směru y

Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) v 1D

$$f_n : \mathbb{N}_N \mapsto \mathbb{R}, \quad \mathbb{N}_N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$$

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k \mathrm{e}^{-2\pi i n k/N}, \; n \in \mathbb{N}_N \\ f_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \mathrm{e}^{+2\pi i n k/N}, \; n \in \mathbb{N}_N \end{aligned}$$

- analogie Fourierovy transformace pro posloupnosti
- lineární transformace, lze zapsat jako násobení regulární maticí

  $\Longrightarrow$ „inverzní fourmule“ platí na rozdíl od FT vždy

Poissonův sumační vzorec

- $f \in \mathcal{S}$, nenulová pouze na (a, b) délky $l = b - a$
- periodické prodloužení lze napsat jako

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kl) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right)$$

(intuitivní zápis = součet řady)

- Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} F\left(-\frac{n}{l}\right).$$

- po dosazení

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kl) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(-\frac{n}{l}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right)$$

Poissonův sumační vzorec

- $f \in \mathcal{S}$, nenulová pouze na (a, b) délky $l = b - a$
- periodické prodloužení lze napsat jako

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kl) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi i n x}{l}\right)$$

(intuitivní zápis = součet řady)

- Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(\frac{2\pi i n x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} F\left(-\frac{n}{l}\right).$$

- po dosazení a v bodě $x = 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-kl) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(-\frac{n}{l}\right)$$

Poissonův sumační vzorec

- $f \in \mathcal{S}$, nenulová pouze na (a, b) délky $l = b - a$
- periodické prodloužení lze napsat jako

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x - kl) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{l}\right)$$

(intuitivní zápis = součet řady)

- Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{2}{l} \int_a^b f(x) \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} n x}{l}\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{l} F\left(-\frac{n}{l}\right).$$

- po dosazení a v bodě $x = 0$ a subst $k = -n$, $n = -n$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nl) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n}{l}\right)$$

Konvoluce

Konvoluce v 1D

$$f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x - t)\, \mathrm{d}t$$

- má-li g omezený support, nazývá se *konvoluční jádro*
- potom

$$(f * g)(x) = \int_{x-a}^{x+a} f(t)\, g(x - t)\, \mathrm{d}t.$$

$\Longrightarrow$ $(f * g)(x)$ je *vážený průměr* hodnot f na okolí x

Konvoluční teorém

1. Fourierův obraz konvoluce funkcí je součin Fourierových obrazů funkcí
$$\mathcal{F}^{\pm 1}[f * g] = \mathcal{F}^{\pm 1}[f] \cdot \mathcal{F}^{\pm 1}[g].$$
2. Fourierův obraz součinu funkcí je konvoluce Fourierových obrazů funkcí
$$\mathcal{F}^{\pm 1}[fg] = \mathcal{F}^{\pm 1}[f] * \mathcal{F}^{\pm 1}[g].$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f * g](u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{-2\pi i u x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi i u t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-t)\, \mathrm{e}^{-2\pi i u (x-t)} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi i u t} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i u x} \mathrm{d}x = F(u)\, G(u) = (\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g])(u)
\end{aligned}$$

□

Distribuce

- $\mathcal{D} \subset \mathrm{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \ldots$ hladké funkce s kompaktním supportem
- **prostor distribucí** $\mathcal{D}'$ = lineární funkcionály na $\mathcal{D}$
- aplikace distribuce $T \in \mathcal{D}'$ na tzv. *testovací funkci* $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle T | \varphi \rangle .$$

- distribuce T je **regulární**, jestliže existuje $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ tak, že

$$\langle T | \varphi \rangle = \left\langle f \middle| \varphi \right\rangle ,$$

kde uvažujeme skalární součin na $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$

$$\left\langle f \middle| \varphi \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

- Diracova δ-„funkce“ je distribuce $\langle \delta | \varphi \rangle = \varphi(0)$, formálně

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(0)\,, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Operace s distribucemi 1/2

- **operace na vektorovém prostoru $\mathcal{D}'$**

$$\left\langle T+S\middle|\varphi\right\rangle = \langle T|\varphi\rangle + \left\langle S\middle|\varphi\right\rangle \ \forall\varphi\in\mathcal{D},$$
$$\langle \alpha T|\varphi\rangle = \alpha\langle T|\varphi\rangle \ \forall\varphi\in\mathcal{D}$$

- **operace posunutí**
  - *operátor posunutí* τ_h funguje na funkce $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$
  - a na distribuce pak jako $\langle \tau_h T|\varphi\rangle = \langle T|\tau_{-h}\varphi\rangle$
  - pro regulární T (def. pomocí f) pak totiž

$$\langle \tau_h T|\varphi\rangle = \langle T|\tau_{-h}\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x+h)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle \tau_h f\middle|\varphi\right\rangle,$$

  tj. distribuce $\tau_h T$ je také regulární a def. pomocí $\tau_h f$

- **násobení** distribuce T **funkcí** g

$$\left\langle gT\middle|\varphi\right\rangle = \left\langle T\middle|g\varphi\right\rangle \ \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

Operace s distribucemi 2/2

Derivace distribuce

$$\left\langle T' \middle| \varphi \right\rangle = -\left\langle T \middle| \varphi' \right\rangle .$$

- potom totiž pro regulární distribuci definovanou funkcí f alespoň třídy $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$

$$\left\langle T' \middle| \varphi \right\rangle = -\left\langle T \middle| \varphi' \right\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle f' \middle| \varphi \right\rangle ,$$

tj. distribuce T' je rovněž regulární a odpovídá funkci f'.

- okrajový člen v per-partes vypadne; φ má omezený support
- distribuce mají na rozdíl od funkcí vždy všechny derivace $\Longrightarrow$ využití v teorii (parciálních) diferenciálních rovnic

Temperované distribuce, Fourierova transformace

- lineární funkcionály na Schwartzově prostoru $\mathcal{S}$
- zjevně $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, temperovaná distribuce funguje $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, tj. je distribucí $\implies \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Fourierova transformace temperované distribuce

$$\left\langle \mathcal{F}[T] \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle T \middle| \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle . \tag{1}$$

- je-li distribuce T regulární a definovaná funkcí $f \implies$ distribuce $\mathcal{F}[T]$ je rovněž regulární a je def. funkcí $\mathcal{F}[f]$

Fourierovou transformací δ-distribuce je identita, tj. regulární distribuce definovaná fcí $f(x) = 1$.

$$\left\langle \mathcal{F}[\delta] \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \delta \middle| \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi i \cdot 0 \cdot x} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{d}x = \langle 1 | \varphi \rangle .$$

Diracův hřeben a jeho Fourierův obraz

- *Diracův hřeben s*: δ-distribuce „vedle sebe" s krokem h

$$s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta,$$

- Fourierova transformace

$$\left\langle \mathcal{F}[s] \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle s \middle| \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle \tau_{nh}\delta \middle| \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle \delta \middle| \tau_{-nh}\mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](-nh)\,.$$

- Poissonův sumační vzorec (lze změnit $n \leftrightarrow -n$ a zase zpět)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](-nh) = \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(-\frac{n}{h}\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle \delta \middle| \tau_{-\frac{n}{h}}\varphi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}}\delta \middle| \varphi \right\rangle$$

- výsledek

$$\mathcal{F}[s] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta\right] = \frac{1}{h}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}}\delta$$

Konvoluce temperované distribuce s funkcí

- definice pro všechna $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\left\langle T * g \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle T \middle| \varphi * \tilde{g} \right\rangle \qquad \text{kde } \tilde{g}(x) = g(-x)$$

- je-li T regulární a definovaná fcí f, pak

$$\left\langle T * g \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle f * g \middle| \varphi \right\rangle$$

- **konvoluční teorém** pro distribuce

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[T * g] &= \mathcal{F}[T] \cdot \mathcal{F}[g] \\ \mathcal{F}[Tg] &= \mathcal{F}[T] * \mathcal{F}[g] \end{aligned}$$

Důkaz.

(druhý případ)

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}[Tg] \middle| \varphi \right\rangle &= \left\langle Tg \middle| \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \left\langle T \middle| g\mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}[T] \middle| \mathcal{F}^{-1}[g\mathcal{F}[\varphi]] \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}[T] \middle| \mathcal{F}^{-1}[g] * \varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}[T] \middle| \widetilde{\mathcal{F}[g]} * \varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}[T] * \mathcal{F}[g] \middle| \varphi \right\rangle . \end{aligned}$$

$\square$

Obsah

Model diskrétního signálu

- **signál** f - jednorozměrná data - funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- **vzorkování signálu** $f\big|_{\mathcal{H}_h}$ - zúžení f na spočetnou množinu diskrétních hodnot $\mathcal{H}_h = \{nh | n \in \mathbb{Z}\}$; označme $f_n := f(hn)$.
- ekvivalentní formulace: **distribuce**

$$f_d = f \cdot s \text{ kde } s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta \text{ je Diracův hřeben}$$

- skutečně, pro $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ platí

$$\left\langle f_d \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta \middle| f\varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle \tau_{nh}\delta \middle| f\varphi \right\rangle$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\langle \delta \middle| \tau_{-nh}(f\varphi) \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\tau_{-nh}(f\varphi))(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (f\varphi)(nh) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\varphi(nh),$$

$\Longrightarrow$ f_d určena jen pomocí f_n a naopak $f_n = \left\langle f_d \middle| \varphi_n \right\rangle$ kde $\varphi_n(x) = 1$ jen pro $x = nh$, jinak $\varphi_n(x) = 0$

Rekonstrukce signálu, interpolace

- nalezení $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. jen pomocí f_n, resp. diskrétního signálu f_d
- konvoluce s lib. g

$$\left\langle f_d * g \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \left(f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta \right) * g \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle f \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{nh}\delta \middle| \varphi * \tilde{g} \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \left(\varphi * \tilde{g}\right)(nh)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, g(t-nh)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n g(t-nh)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \tau_{nh} g \middle| \varphi \right\rangle .$$

- $f_d * g$ je tedy regulární a je definována funkcí

$$f_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \tau_{nh} g, \text{ tj. } f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n g(x-nh) .$$

- lineární *interpolace* vzorků

$$g(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{h} & \text{pro } |x| \leq h, \\ 0 & \text{pro } |x| > h \end{cases}$$

Spektrum diskrétního signálu 1/2

- Fourierův obraz diskrétního signálu f_d je podle konvolučního teorému

$$F_d := \mathcal{F}[f_d] = \mathcal{F}[f \cdot s] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[s]$$

- už víme (Fourierův obraz Diracova hřebenu)

$$\mathcal{F}[s] = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} \delta$$

- po dosazení (označme $F = \mathcal{F}[f]$)

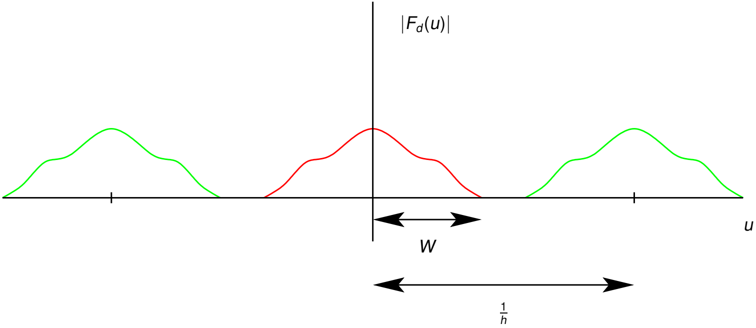
$$F_d = F * \left(\frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} \delta \right) = \frac{1}{h} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{n}{h}} F$$

protože $\left(\tau_{\frac{n}{h}} \delta\right) * F = \tau_{\frac{n}{h}} F$

$$\left\langle \left(\tau_{\frac{n}{h}} \delta\right) * F \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \tau_{\frac{n}{h}} \delta \middle| \varphi * \tilde{F} \right\rangle = \left\langle \delta \middle| \tau_{-\frac{n}{h}} \left(\varphi * \tilde{F}\right) \right\rangle = \left(\varphi * \tilde{F}\right)\left(\frac{n}{h}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) F\left(t - \frac{n}{h}\right) \mathrm{d}t = \left\langle \tau_{\frac{n}{h}} F \middle| \varphi \right\rangle$$

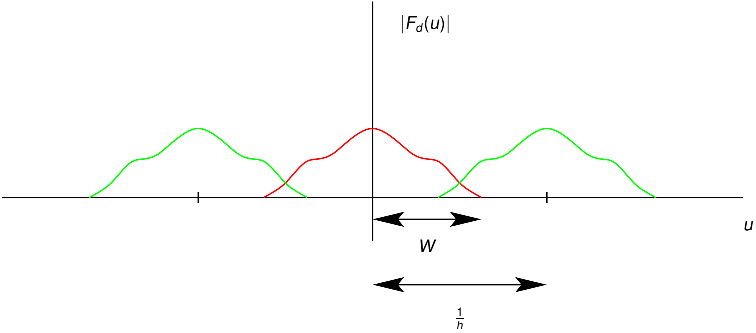
Spektrum diskrétního signálu 2/2

- $\frac{1}{h}$ je *vzorkovací frekvence* (počet vzorků na jednotku délky osy x)
- spektrum diskrétního signálu = okopírované původní spektrum s krokem $\frac{1}{h}$. Abychom mohli původní signál rekonstruovat, nesmí „okopírováním“ dojít k překrytí spekter.



Spektrum diskrétního signálu 2/2

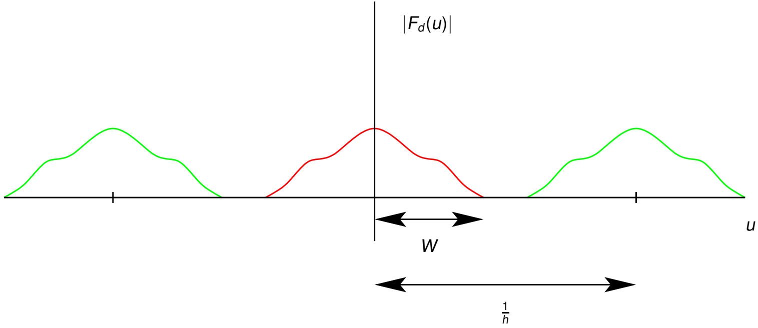
- $\frac{1}{h}$ je *vzorkovací frekvence*
  (počet vzorků na jednotku délky osy x)
- spektrum diskrétního signálu = okopírované původní spektrum s krokem $\frac{1}{h}$. Abychom mohli původní signál rekonstruovat, nesmí „okopírováním" dojít k překrytí spekter.



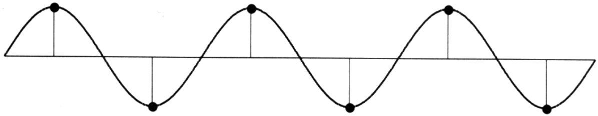
Shannonův-Nyquistův vzorkovací teorém

Aby bylo možné zrekonstruovat původní signál, musí být vzorkovací frekvence alespoň dvakrát větší než nejvyšší frekvence v signálu.

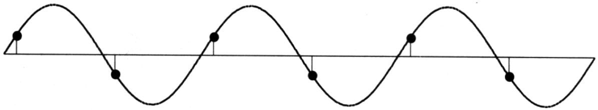
$$\frac{1}{h} \geq 2W \text{ ... tzv. Nyquistova mez}$$



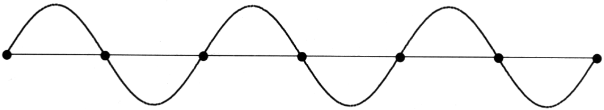
Nedostatečné vzorkování



(a)

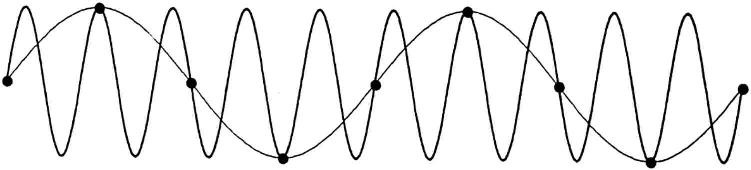


(b)



(c)

Nedostatečné vzorkování



Moiré efekt (viz dále)

Obsah

Dokonalá rekonstrukce signálu 1/2

- při dostatečné vzorkovací frekvenci lze izolovat spektrum F ze spektra F_d
- F_d vynásobíme obdélníkovým pulsem. Platí

$$F = G \cdot F_d \qquad \text{kde} \qquad G(u) = \begin{cases} h & \text{pro } u < \frac{1}{2h}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- konvoluční teorém:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(G \cdot F_d) = \mathcal{F}^{-1}[G] * f_d.$$

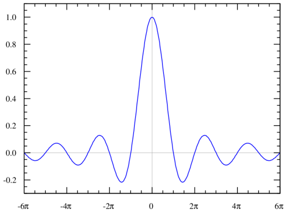
- tj. **původní signál dostaneme konvolucí** f_d s $g = \mathcal{F}^{-1}[G]$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} ux}\mathrm{d}u = h\int_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} ux}\mathrm{d}u = \left[\frac{h}{2\pi \mathrm{i} x}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} ux}\right]_{-\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{2h}}$$

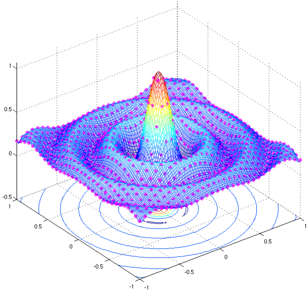
$$= \frac{h}{\pi x}\frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{h}\mathrm{i}\right)}{\mathrm{i}} = \frac{h}{\pi x}\sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi x}{h}\right),$$

kde $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$.

Dokonalá rekonstrukce signálu 2/2

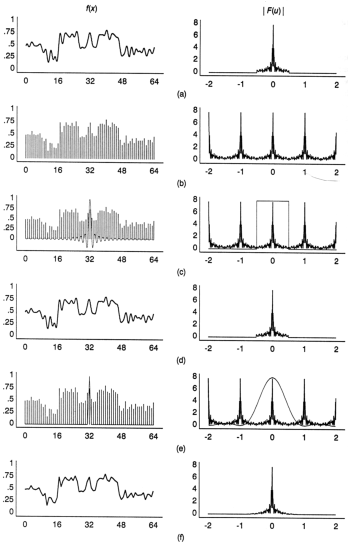


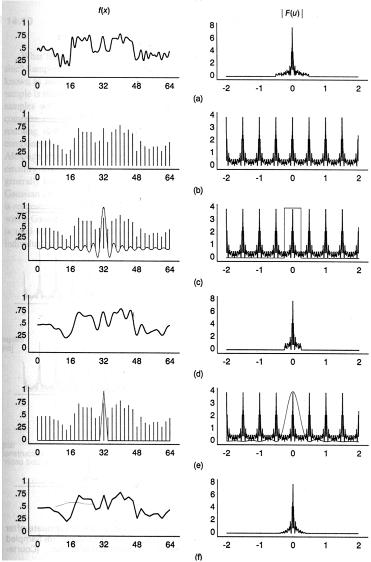
$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$



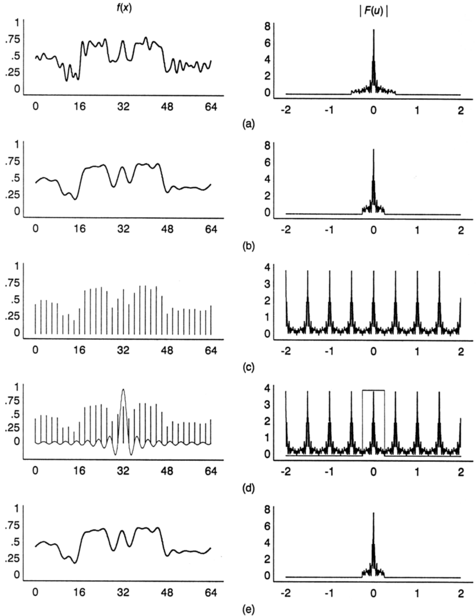
- Víme, že konvoluce je vlastně interpolace.
- Funkce sinc se proto nazývá *ideální interpolant.*

Příklady rekonstrukce signálu





Příklady rekonstrukce signálu



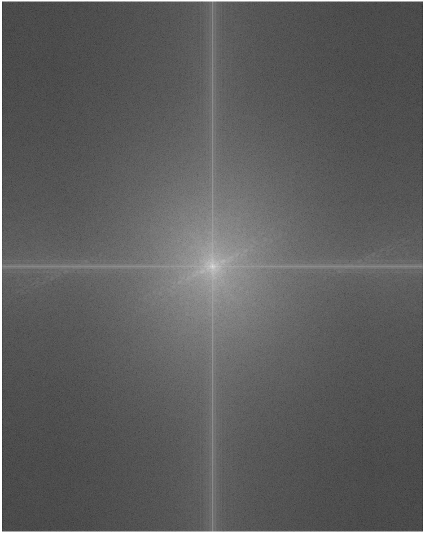
Filtrace obrazu

- odstranění vysokých frekvencí - tzv. „*low pass filter*“
- násobení funkcí s omezeným supportem ve frekvenční oblasti
- násobení obdélníkovým pulsem (resp. válcovým ve 2D) $\Longrightarrow$ konvoluce se **sinc** v prostorové oblasti
- sinc nemá omezený support $\Longrightarrow$ informace z každého místa obrazu se projeví v celém obraze ... **„artefakty“**
- **hladké filtry**: např. Gaussova křivka - její Fourierův obraz/vzor je opět Gaussova křivka

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein

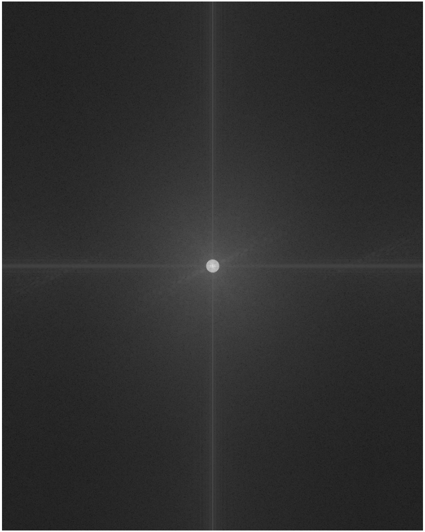
Marilyn Monroe

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein



spektrum fotografie Marilyn

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein

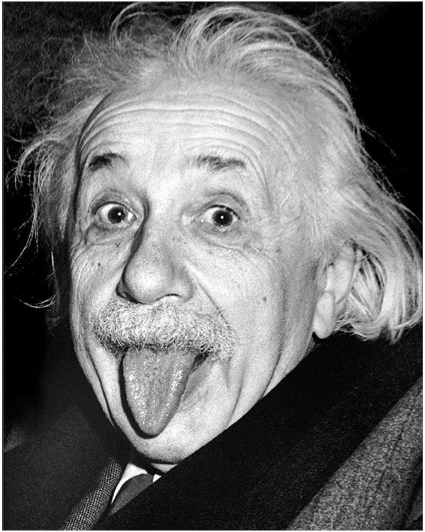


maska low-pass filtru

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein

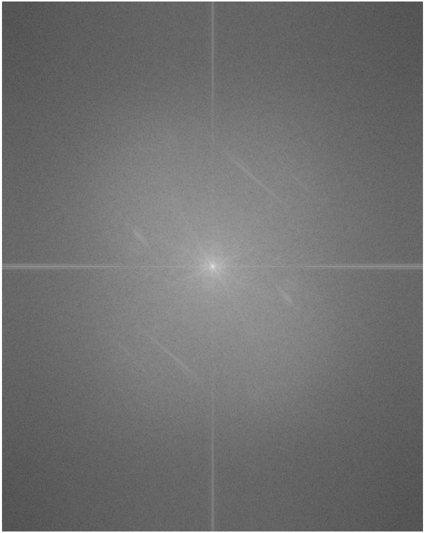
po inverzní transformaci

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein



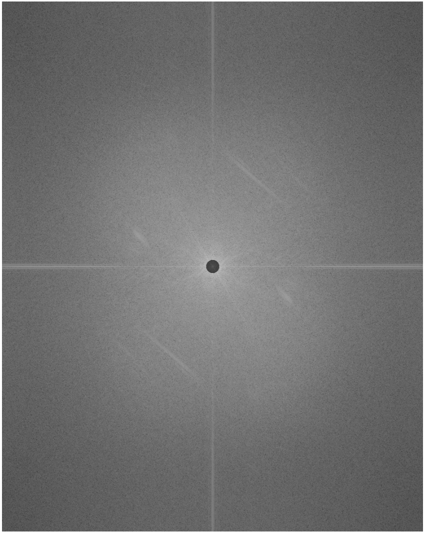
Albert Einstein

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein



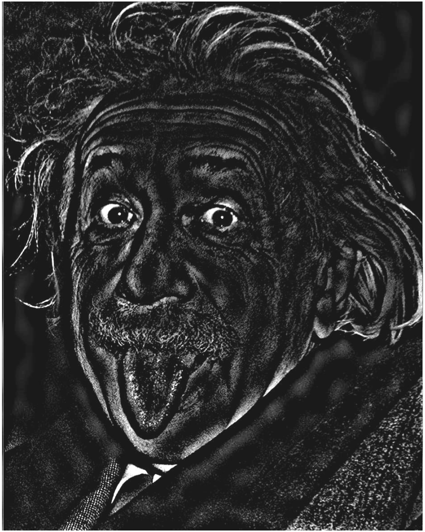
spektrum fotografie Einsteina

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein



maska high-pass filtru

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein



po inverzní transformaci

Marilyn Monroe vs. Albert Einstein

součet obou obrazů

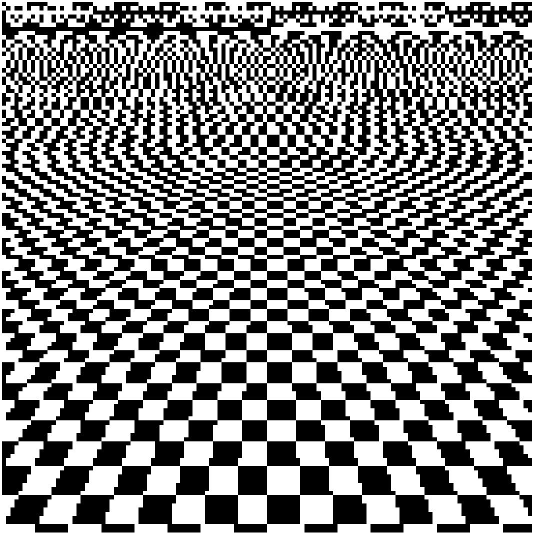
Obsah

Aliasing a antialiasing

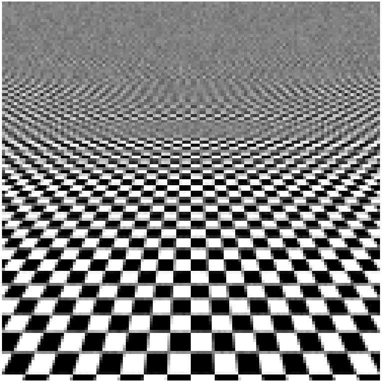
- **Aliasing** = libovolný efekt způsobený nedostatečnou vzorkovací frekvencí signálu/obrazu
- **Moiré** = umělý výskyt nízkých frekvencí v obraze vzniklý interferencí dvou pravidelných vzorků s blízkými frekvencemi - případ aliasingu
- **Antialiasing** = opatření vedoucí k potlačení aliasingu
  - předfiltrování signálu (konvoluce s vhodným filtrem, tj. vhodná interpolace)
  - stochastické vzorkování, roztřesené vzorkování (jittered sampling)

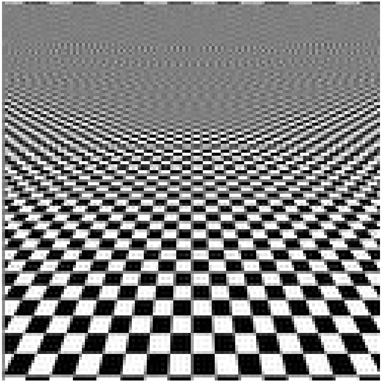
Nespojitý obraz (interpolace nejbližším sousedem) má *neomezené spektrum*. Pomůže i lineární interpolace.

Příklady aliasingu

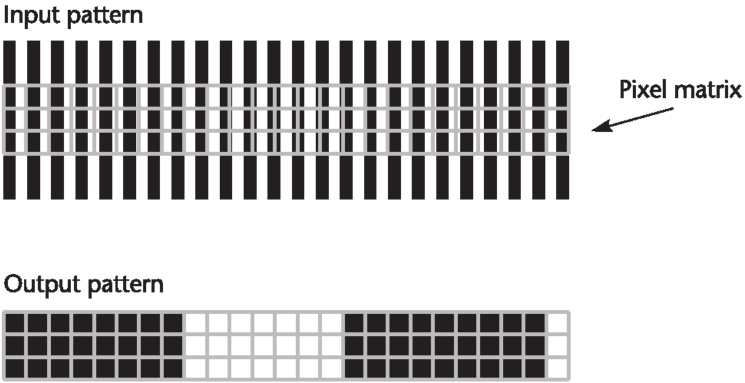


Příklady aliasingu





Příklady aliasingu

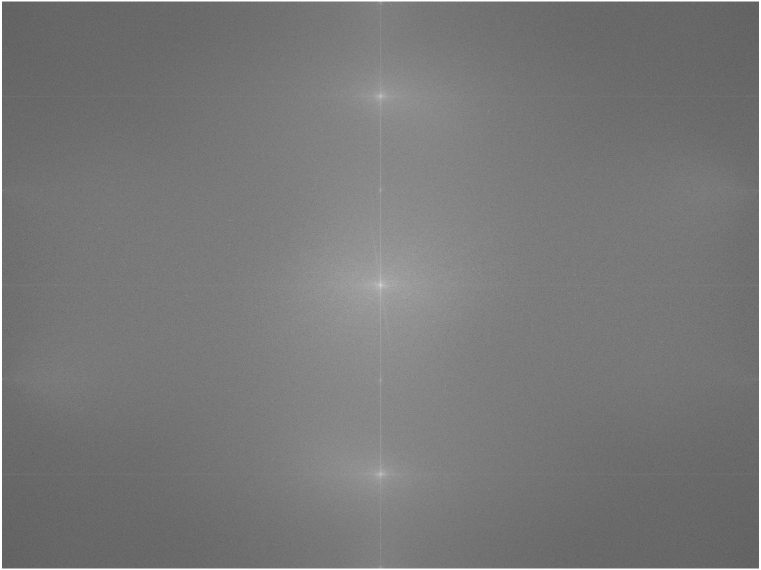


Moiré efekt

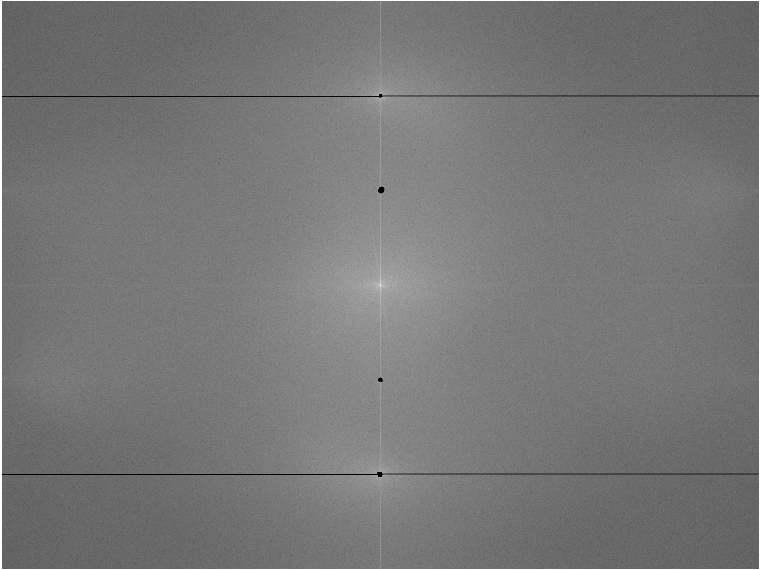
Příklady aliasingu

Úprava spektra obrazu I

Úprava spektra obrazu I



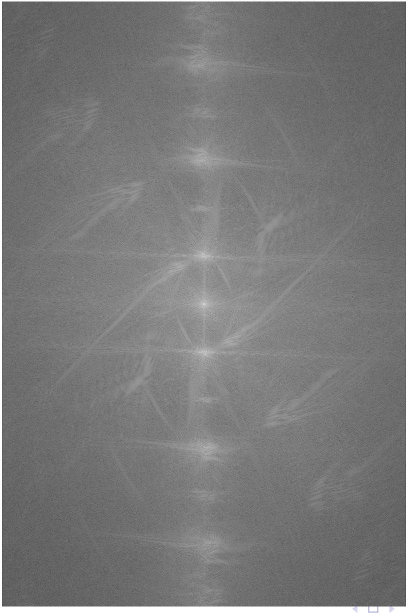
Úprava spektra obrazu I



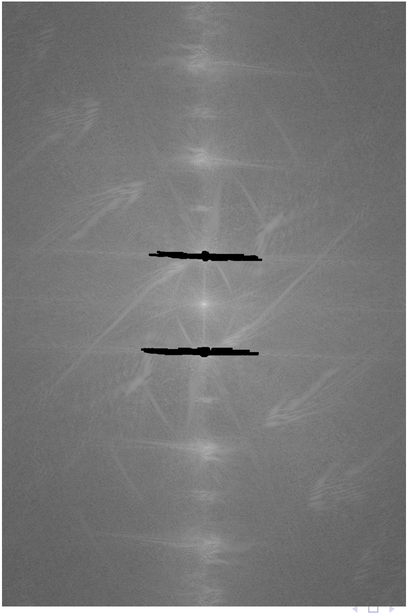
Úprava spektra obrazu I

Úprava spektra obrazu II

Úprava spektra obrazu II



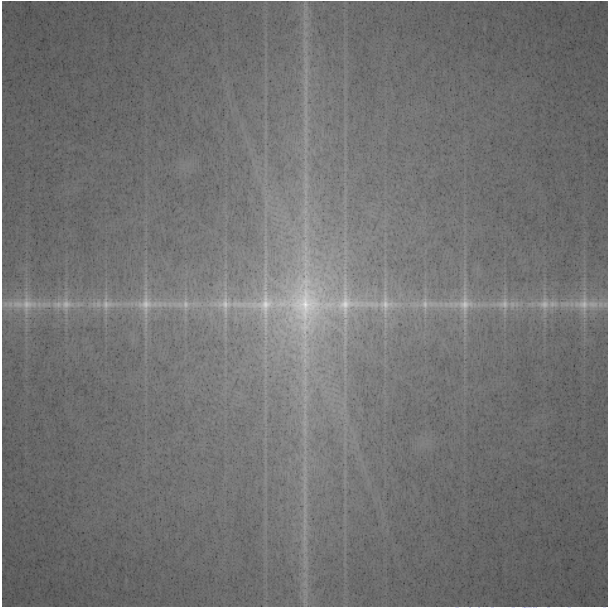
Úprava spektra obrazu II



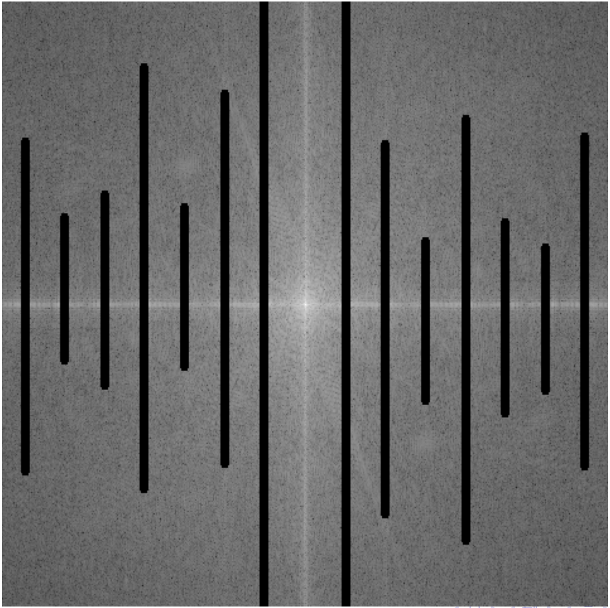
Úprava spektra obrazu II

Úprava spektra obrazu III

Úprava spektra obrazu III



Úprava spektra obrazu III



Úprava spektra obrazu III

Úprava spektra obrazu III

Antialiasing v praxi

- nadvzorkování (supersampling) v paměti grafického akcelerátoru
- mip-mapping textur
- adaptivní vzorkování
- stochastické vzorkování - vzorkování na náhodně generované síti $\Longrightarrow$ aliasing ve formě **šumu**
- u metod fotorealistického zobrazování: Monte-Carlo, stochastický raytracing

Literatura

- J. Flusser. *Zpracování a rozpoznávání obrazu II*. Přednášky, FJFI ČVUT v Praze.
- L. Schwartz. *Mathematics for the Physical Sciences*, Addison-Wesley (French original: *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1966).
- R. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. CRC Press, 1994.
- F. G. Friedlander, M. Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University Press, 1998.
- R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw Hill, 2000.