

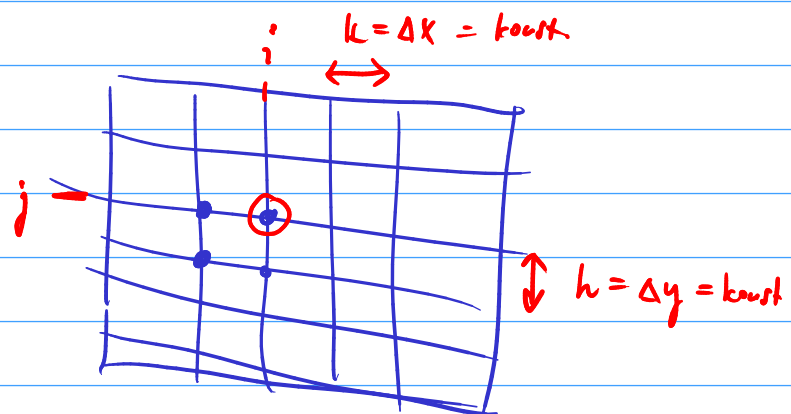
Toto jsou poznámky z přednášek z AR 2020/21
opravené a aktualizované k: AR 2023/24

NMDT

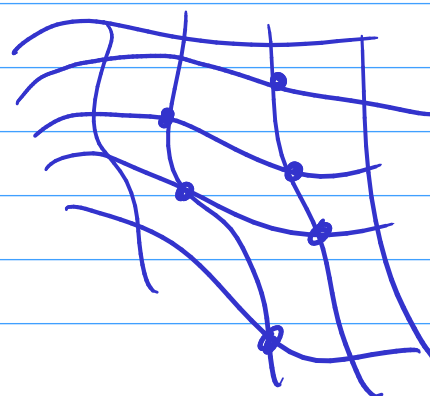
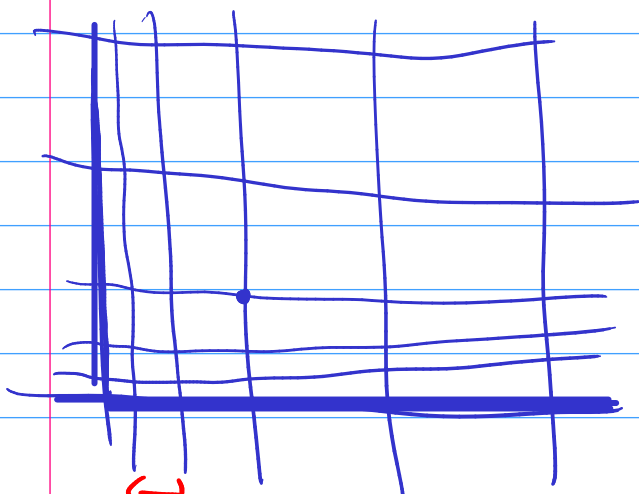
- připomenutí základní zachování - rovnice dynamiky tekutin
- klasifikace PDR, metoda charakteristik
- základy metody konečných diferencí, schémata MKD na typové úlohy a jejich vlastnosti: (1D)
- metoda konečných objemů $\left\{ \begin{array}{l} \text{schémata} \quad (2D) \\ \text{druhy sítě} \quad (2D, 3D) \end{array} \right.$
- pokročilejší schémata a řešiče (OpenFOAM)
- "exotičtější" numerické metody
- počítačová vizualizace

ZKOUŠKA: diskuse o vaší práci (BP, VG, DP)
v kontextu vlastností numerických metod ..

KLASICKÉ METODY -
(eulerovský popis)

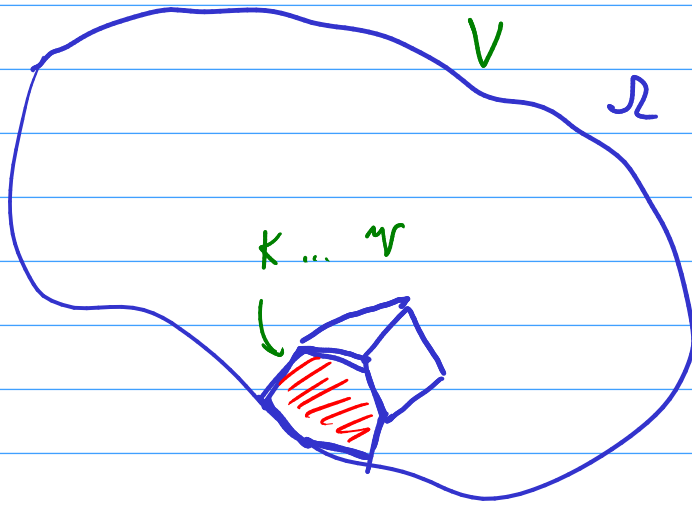


MKD - aproximace neznámé
funkce v bodech num. sítě



$\Delta x, \Delta y$ nejrov konst

• MKO (Finite Volume Method, FVM)

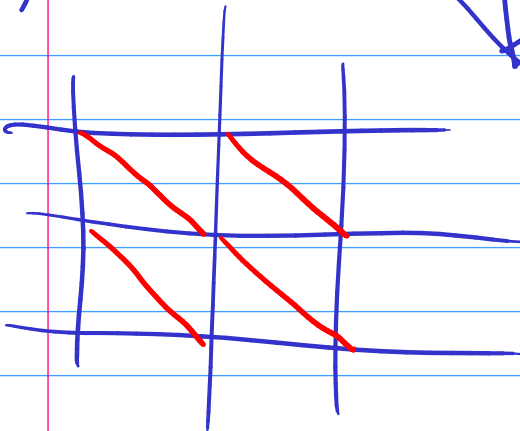
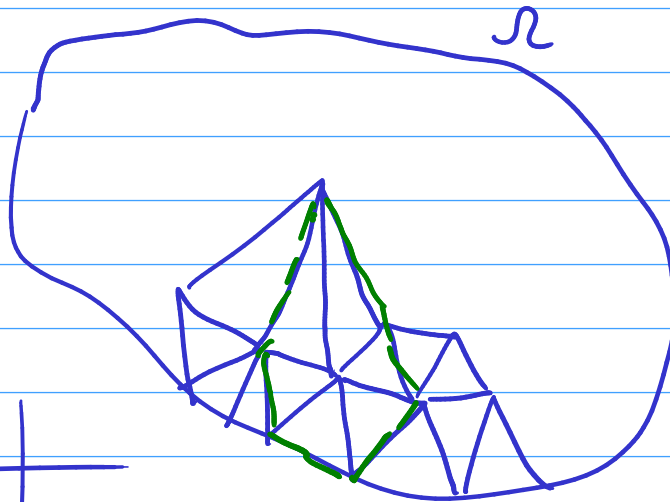


vzdělení oblasti
na polygonální
(ve 2D) nebo
polyhedrální
buněk
(kontrolní objemy)

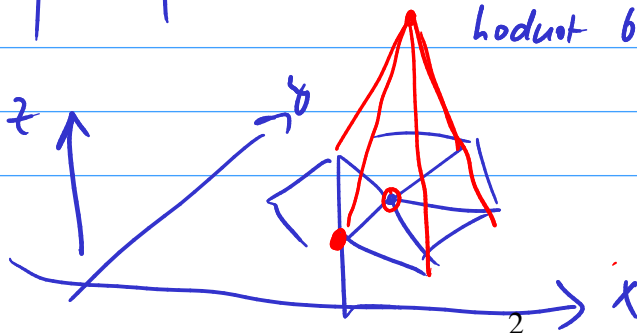
- num. řešení spočívá v aproximaci integrálů
neznámých fci' přes buněk

• MKP

v obecnosti:
nestrukturované
síť z Δ ve 2D
a čtyřstěny ve 3D

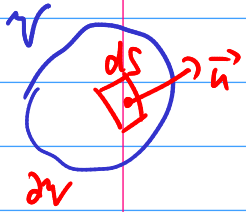


- num. řešení spočívá v aproximaci
neznámých veličin lin. kombinací
hodnot bázeových fcní



např. PA - elementy (pyramidální
bázeové funkce)

ROVNICE DYNAMIKY TEKUTIN



- pro vazhe' stlačitelné' proudění' jednoduše' tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j (\rho V_j) = 0$$

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial (\rho V_i)}{\partial t} + \partial_j (\rho V_i V_j) = -\partial_i P + \partial_j \tilde{\tau}_{ij} + \rho F_i \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

3 rovnice pro hybnost

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \partial_j (\rho E V_j) = -\rho \partial_i V_i + \tilde{\tau}_{ij} \partial_j V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}$$

rovnice pro vnitřní energii:

ρ .. hustota

V_i .. složky rychlosti

E .. specifická vnitřní energie

$E \rightarrow \hat{E}$

pro celkovou energii: $\hat{E} = E + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \quad \vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$

$$\frac{\partial (\rho \hat{E})}{\partial t} + \partial_j (\rho \hat{E} V_j) = -\partial_i (\rho V_i) + \partial_j (V_i \tilde{\tau}_{ij}) + \rho F_i V_i + \partial_i (\lambda \partial_i T) + \rho \dot{Q}$$

$v_e \neq 0$ ($i \in \{1, 2\}$) lze přepsat ($\vec{F} = 0$)
 $\dot{Q} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} =: \partial_t$$

$$\partial_t \rho + \partial_1 (\rho v_1) + \partial_2 (\rho v_2) = 0$$

$$i=1 \quad \partial_t (\rho v_1) + \partial_1 (\rho v_1^2 + p) + \partial_2 (\rho v_1 v_2) = \partial_1 \tau_{11} + \partial_2 \tau_{12}$$

$$i=2 \quad \partial_t (\rho v_2) + \partial_1 (\rho v_2 v_1) + \partial_2 (\rho v_2^2 + p) = \partial_1 \tau_{21} + \partial_2 \tau_{22}$$

$$\partial_t (\rho \hat{E}) + \partial_1 (v_1 (\rho E + p)) + \partial_2 (v_2 (\rho E + p)) = \text{O} + \text{Q}$$

$$\text{O} = \partial_1 (v_1 \tilde{\tau}_{11} + \lambda \partial_1 T)$$

$$\text{Q} = \partial_2 (v_2 \tilde{\tau}_{12} + \lambda \partial_2 T)$$

$$\partial_t \vec{W} + \underbrace{\partial_1 \vec{F} + \partial_2 \vec{G}}_{\text{nevažhe' fyzikální toky (advektivní)}} = \underbrace{\partial_1 \vec{R} + \partial_2 \vec{S}}_{\text{vážhe' (difúzní) fyz. toky}} = \nabla \cdot (\vec{R}, \vec{S})$$

nevažhe' fyzikální
toky
(advektivní)
 $= \nabla \cdot (\vec{F}, \vec{G})$

vážhe' (difúzní)
fyz. toky
 $= \nabla \cdot (\vec{R}, \vec{S})$

Pozn : Eulerovy rovnice \Leftrightarrow nevažhe' proudění

$$\rightarrow \vec{R}, \vec{S} = \vec{0}$$

"
Eulerova rovnice v 1D

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0$$

↓ linearizace

$$\partial_t u + \underbrace{f'(u)}_{\approx \text{konst}} \partial_x u = 0$$

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0$$

transportní rovnice

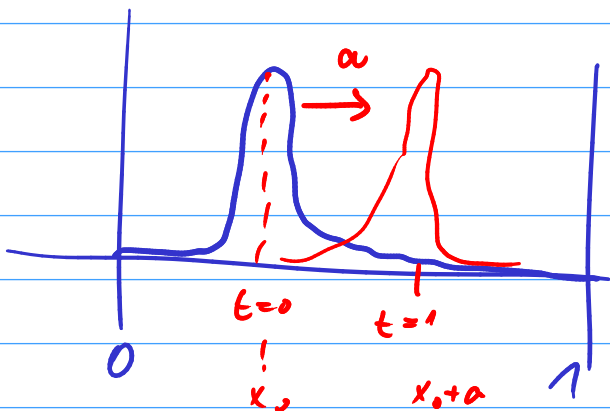
úloha pro \rightarrow :

poč. podmínka $u(0, x) = u_0(x)$

okraj. podmínka na $\Omega = (0, 1)$ budou na $\partial\Omega = \{0, 1\}$

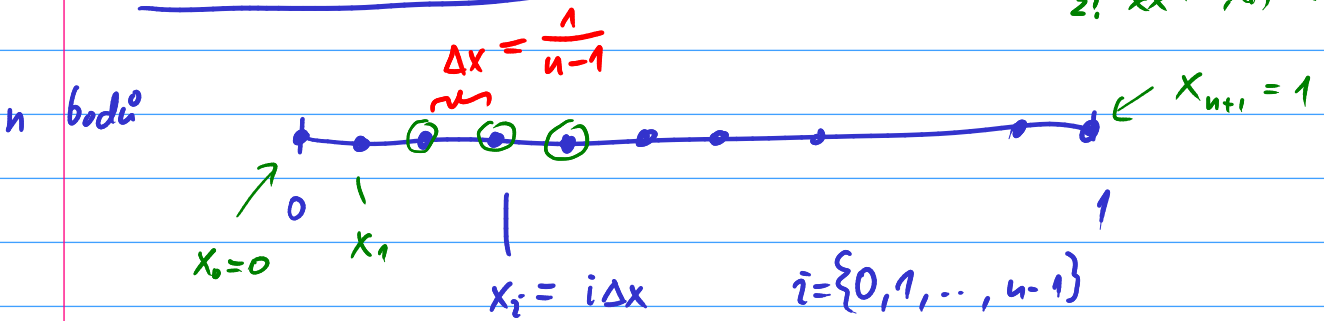
$$u(0) = u(1) = 0$$

přesná (exaktní) řešení je :

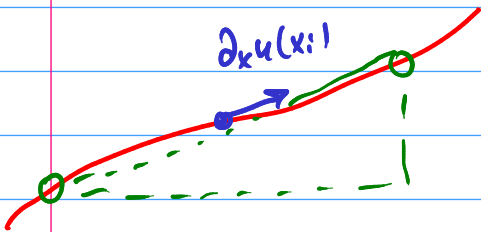
$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x-at) & \text{pro } x > at \\ 0 & \text{pro } x < at \end{cases}$$


Polus 0 num. řešení

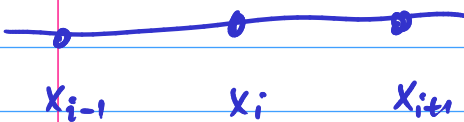
$$\underline{u(t, x_{i+1})} = \underline{u(t, x_i)} + \underline{\partial_x u(t, x_i) \Delta x} + \frac{1}{2!} \partial_{xx} u(t, x_i) \Delta x^2 + O(\Delta x^3)$$



$$\partial_x u(t, x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



$$\partial_t u(t_k, x) = \frac{u(t_k, x) - u(t_{k-1}, x)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$



Δt ... čas. krok

$$t_k = k \cdot \Delta t$$

musíme "vidět" num. schémata

$$a\Delta t < \Delta x$$

o tak daleko, odkud přichází informace do x_i (CFL ... viz příloha)

2. krok:

$$u(t_k, x_i) \rightarrow u_i^k \text{ (číslo)}$$

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

\Rightarrow dostaneme schéma:

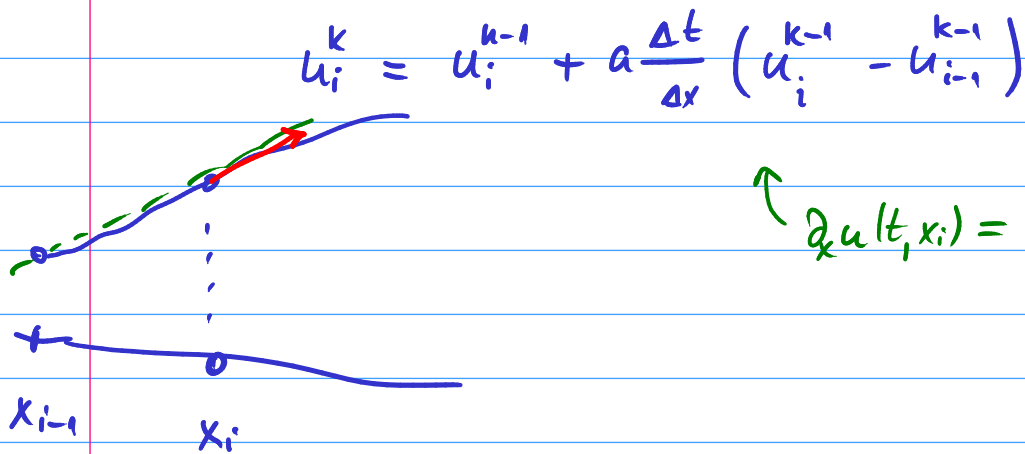
$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{k-1} - u_{i-1}^{k-1}}{2\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow u_i^k = u_i^{k-1} + a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^{k-1} - u_{i-1}^{k-1})$$

pro $a > 0$ tato hodnota není větší než u_i vliv na hodnotu řešení v bodě x_i !

explicitní centrální schéma

NEFUNKČNĚ: propaguje informaci nesprávným směrem

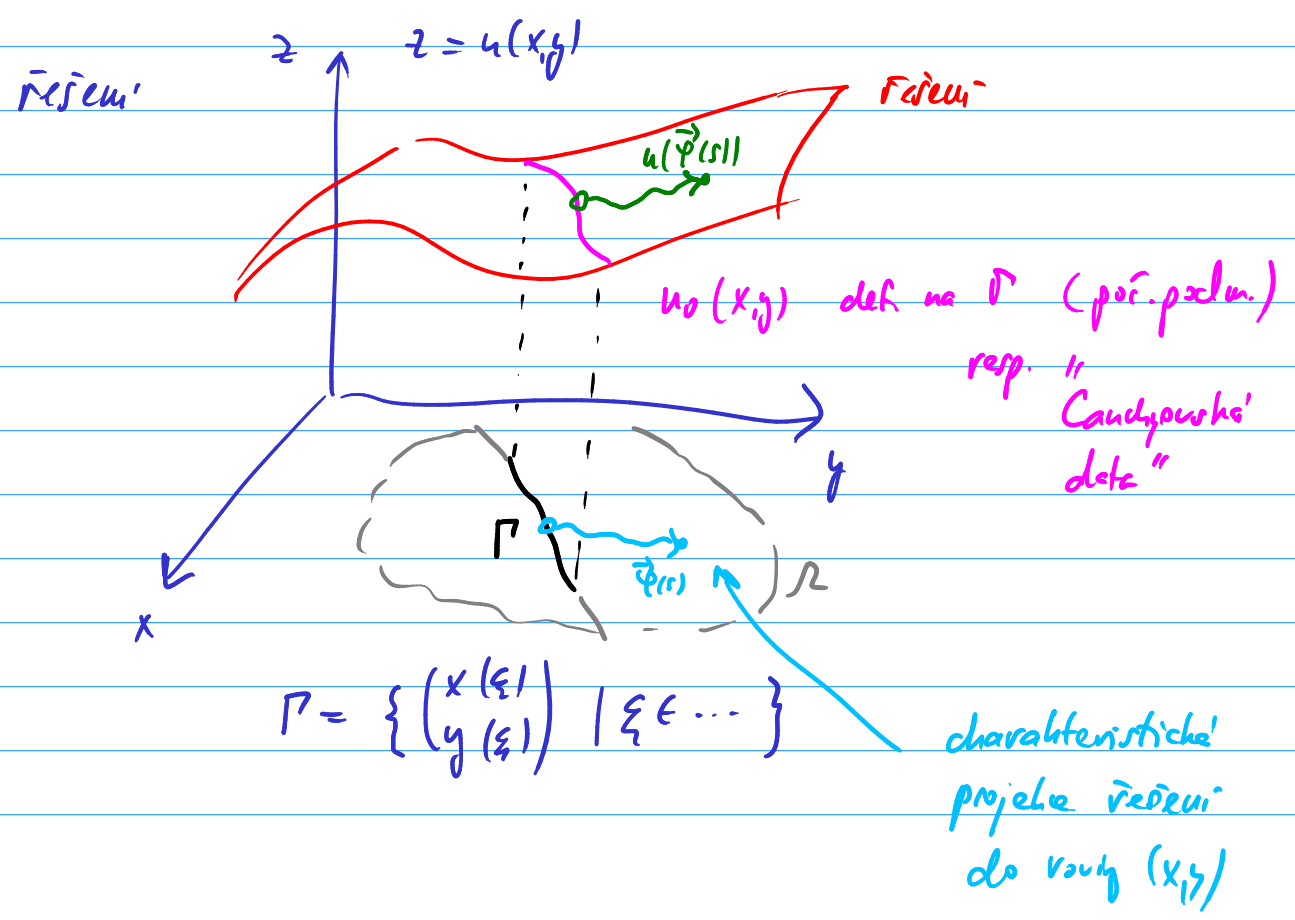


$$\uparrow \partial_x u(t, x_i) = \frac{u(t, x_i) - u(t, x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

KLASIFIKACE PDR (2. řádu), CHARAKTERISTIKY

nejdříve 1 rovnice 1. řádu (kvalitativně) ve 2D
pro neznámou funkci $u = u(x, y)$

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad | \text{det } (*)$$



na Γ : $\frac{du_0}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{d\xi}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{du_0}{d\xi} \end{pmatrix}$

1. řádek = PDR

2. řádek

Řešení (jednoznačné) ex. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \end{vmatrix} \neq 0$

PDR řešíme podle křivky $\varphi = \langle \vec{\varphi} \rangle$ $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(s)$, ktera

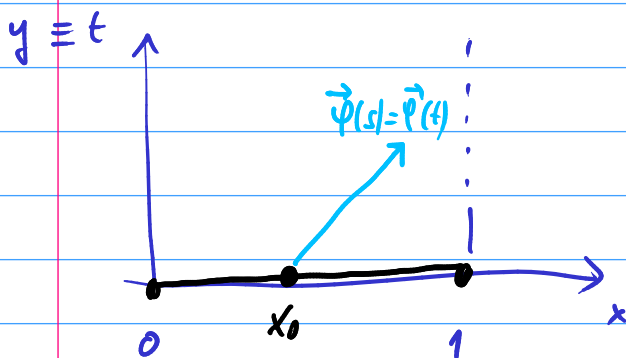
záadne na Γ , tj. $\vec{\varphi}(0) = \begin{pmatrix} x(\xi) \\ y(\xi) \end{pmatrix}$ pro dané ξ

Funkce u řeší (*) na křivce $\varphi \Leftrightarrow \vec{\varphi}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$

(*) $\left. \begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ \parallel & \\ c &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot b \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{ds} = a(x, y, u(x, y)) \\ \frac{dy}{ds} = b(x, y, u(x, y)) \\ \frac{du}{ds} = c(x, y, u(x, y)) \end{cases}$

Pr. transportní rovnice $\partial_t u + a \partial_x u = 0$

$t \equiv y$
 $b \equiv 1, c = 0$



$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$

$\frac{dx}{ds} = a, \frac{dt}{ds} = 1, t|_{s=0} = 0$
 $\frac{du}{ds} = c = 0$
 $s = t$

$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt} = a \right) \wedge \left(x|_{t=0} = x_0 = \vec{\Gamma}(\xi) \right) \Rightarrow x(t) = x_0 + at$

$$\Rightarrow u(t, x) = u_0(0, x_0) = u_0(0, x - at) \leftarrow$$

"Tolůž" pro soustavu gLPR

$$A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} = \vec{c} \quad \vec{u} = \vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^n$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A, B = A, B(x, y, u)$$

⋮
hledáme tzv. charakteristické směry

Rovnice 2. řádku (kva zilineární)

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = g$$

↑ neuvažuje "h.u"

$$\Rightarrow v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & c \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g - dv - ew \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. řádek: $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

uzavřenost dif. formy
 $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = v dx + w dy$

přeformulováno jsou rovnice 2. ř. pomocí 2 rovnic 1. řádku

\Rightarrow (bez důkazu) charakteristický splňují: $\frac{dy}{dx} = \lambda$, kde

$$\begin{vmatrix} 2b - a\lambda & c \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0 \quad \text{kvad. rovnice pro } \lambda$$

$$\text{kde } \lambda_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$D = b^2 - ac$$

PDR se nazývá!

- $D > 0 \Rightarrow$ existují 2 kořeny \Rightarrow 2 charakteristické \rightarrow HYPERBOLICKÁ
- $D = 0 \rightarrow$ exist. 1 kořen \Rightarrow 1 charakt. \Rightarrow PARABOLICKÁ
- $D < 0 \Rightarrow$ nek. λ (charakt. jsou imaginární) \Rightarrow ELIPTICKÁ

Pozn k úzvoslovi: $Q(x,y) = ax^2 - 2bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0$

$D > 0 \Rightarrow Q=0$ je rovnice HYPERBOLY

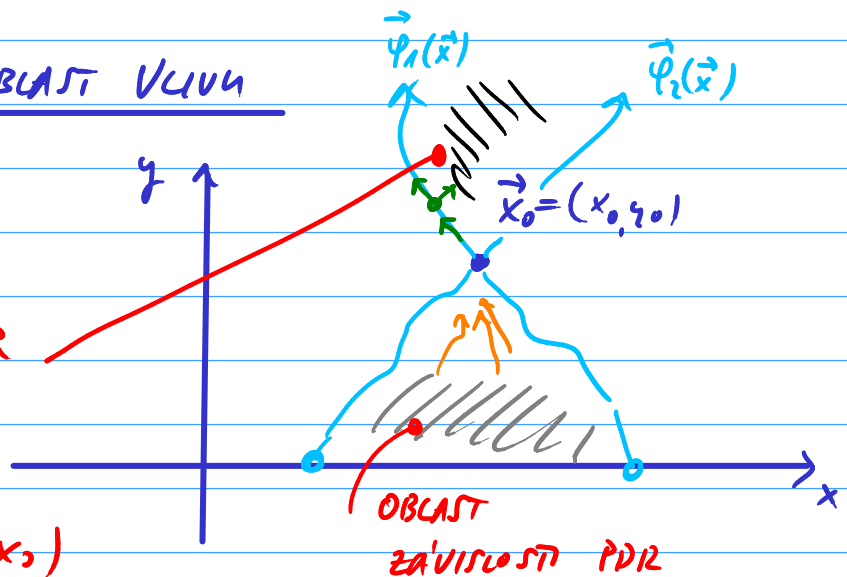
$D = 0$ PARABOLY

$D < 0$ — " — ELIPSY

OBLAST ZA'VISLOSTI A OBLAST VLIUVU

1) HYPERBOLICKÁ ROVNICE

OBLAST VLIUVU PDR
hodnota u v bodech
vlivu je ovlivněna
hodnotou u v bodech x_0)



($u(x_0)$ závisí na hodnotách
 u v bodech ležících v
oblasti závislosti)

2) PARABOLICKÁ PDR

např. rovnice vedení
tepla

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} = g$$

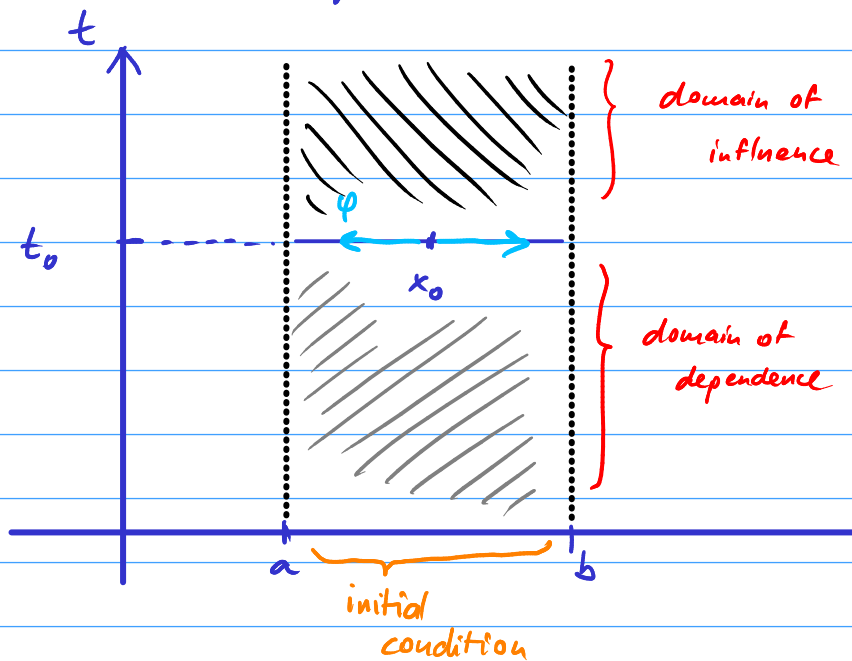
$a=1$ $b, c, d=0$ $e=-1$

$$\Rightarrow \text{mluvne } \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = 0$$

$$y \equiv t$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \equiv \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \text{charakteristiky jsou rovnoběžné s osou } \vec{x}$$

informace se šíří
podél prostorové osy
(osy x) nekonečně
rychle v každém
čase t_0 .



Pozn: typ ① a typ ②
hyp. parzb.

se dějí řešit jako evoluční

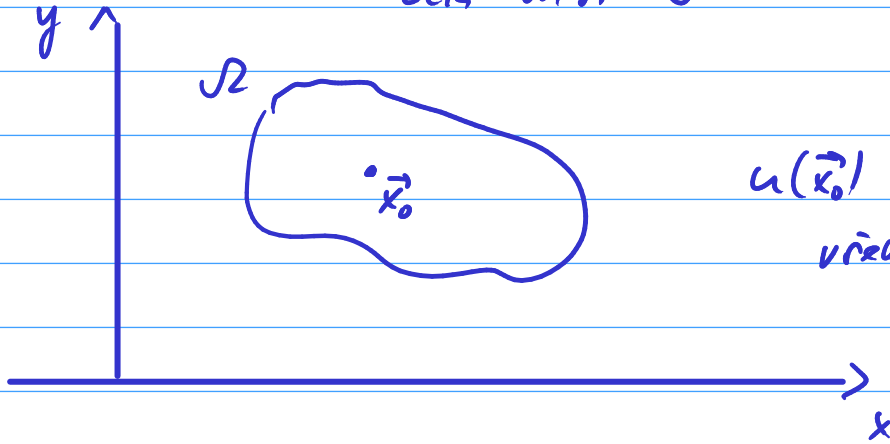
3) ELIPTICKÁ PPR

např.

$$\Delta u = f$$

- neexistují charakteristiky

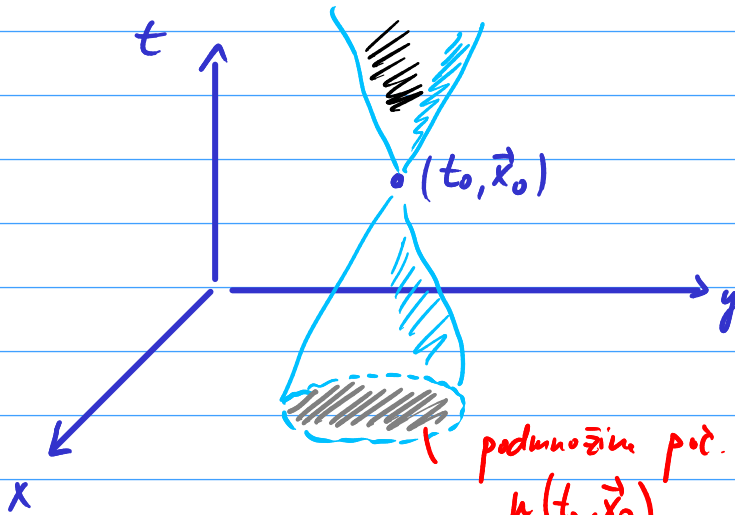
- oblast vlivu i oblast zdatnosti je celá oblast Ω



$u(\vec{x}_0)$ závisí na u ve všech bodech Ω

Pozn : LICHTA VE VYŠŠÍ DIMENZI

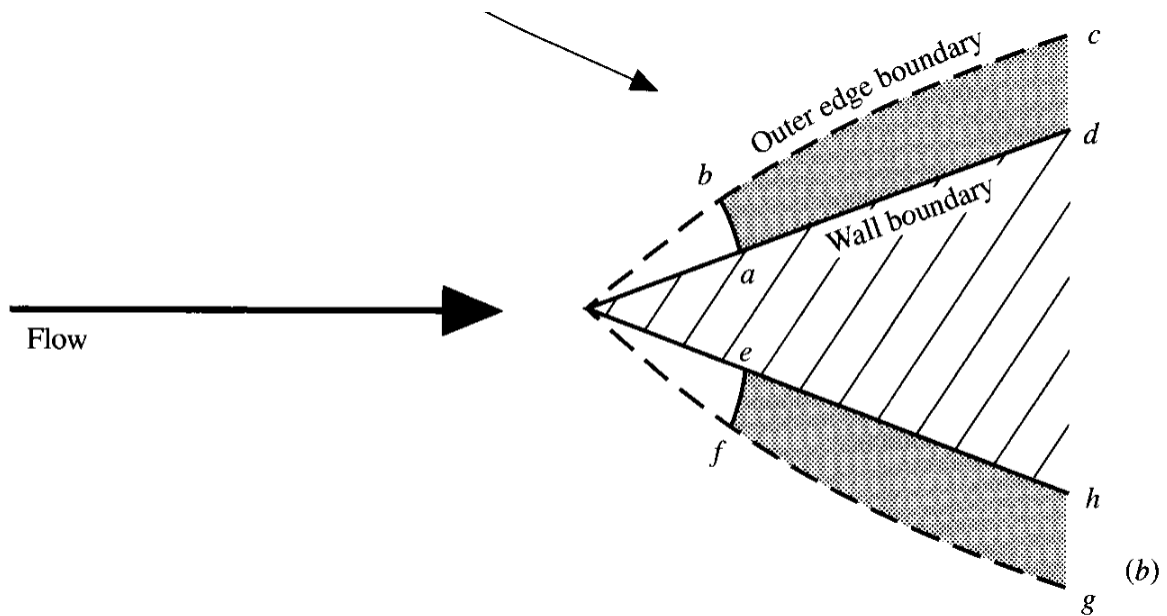
Hyperbolické rovnice v oblasti $\mathbb{Y} \times \Omega$ kde $\mathbb{Y} = (0, T_{max})$
 $\Omega \in \mathbb{R}^2$



(podmnožina poč. podmínek, na které závisí $u(t_0, \vec{x}_0)$)

Pozn : NS rovnice mohou být tzv. "smíšeného typu"

- podzvukové vazké proudění \Rightarrow parabolické dnovaní
- nadzvukové proudění \Rightarrow hyperbolické dnovaní



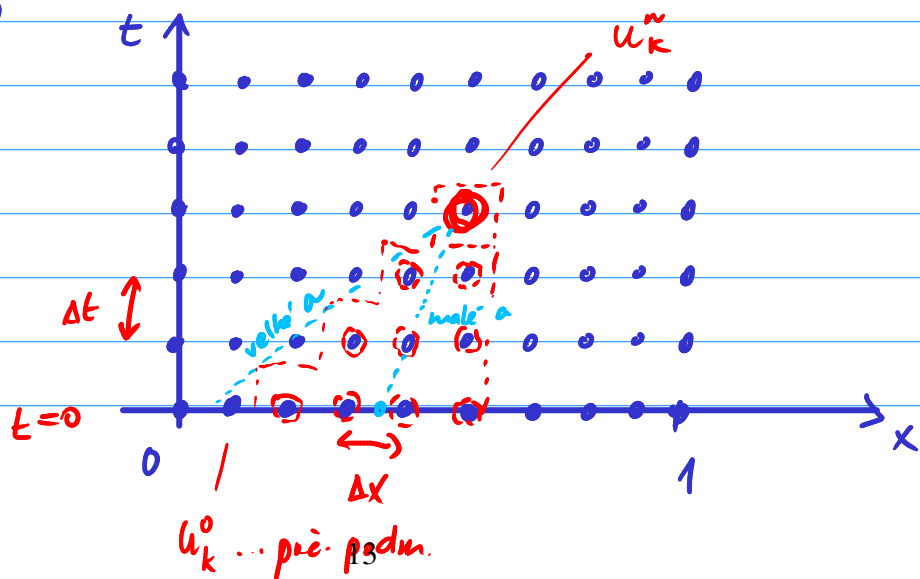
- nevazké proudění (Eulerovy rovnice) \Rightarrow hyperbolické

zpět ke schémata pro transportní rovnici:

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0 \quad \rightarrow \quad u_k^{n+1} = u_k^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_k^n - u_{k-1}^n)$$

pro $a > 0$

$$u_k^n \approx u(\text{nat}, k\Delta x)$$



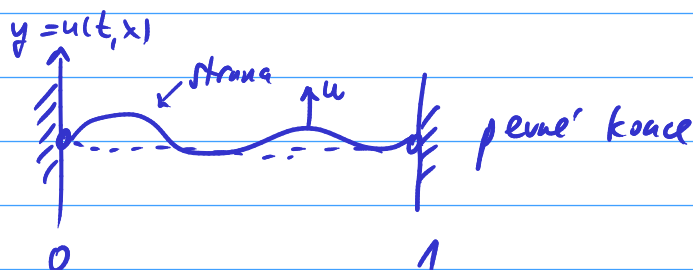
CFL Podmínka (Courant, Friedrichs, Lewy) (1928)

Nutná podmínka konvergence numerického schématu je, aby oblast závislosti PDR byla podmnožinou oblasti závislosti numerického schématu.

Pro transportní rovnici: $a \Delta t \leq \Delta x \Leftrightarrow \frac{a \Delta t}{\Delta x} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left(\frac{1}{a} \right) \text{ Courantovo číslo}$$

Vlnová rovnice u 1D



$$\partial_{tt} u = a^2 \partial_{xx} u$$

okraj. p. $u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \forall t$

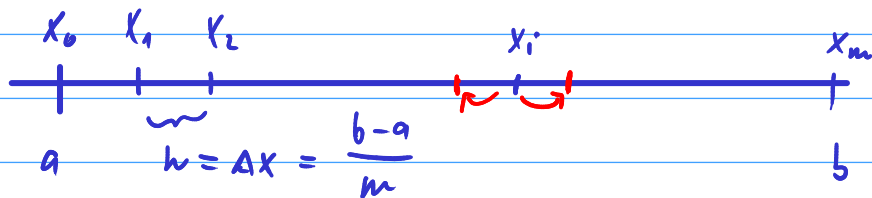
poč. p. $u(0, x) = u_0(x) \quad \text{poč. poloha}$

$\partial_t u(0, x) = v_0(x) \quad \text{poč. rychlost}$

num. schéma: přístě + CFL podmínka

METODA KONEČNYCH DIFERENCIÍ

diferenciální hodnoty derivací funkce $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 $u \in C^{(l)}(a, b)$



def $u_i := u(a + ih) (= u(x_i))$ $i \in \{0, \dots, m\}$
 ale i pro $i \in \mathbb{R}$
 $u_i^{(k)} := u^{(k)}(a + ih)$ $u_i' := u_i^{(1)}$

Necht' jsou dána čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$

Potom $\exists c_1, \dots, c_l$ takové, že

$$u_i' = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j u_{i+\alpha_j} + \mathcal{O}(h^{l-1})$$

$\approx k \cdot h^{l-1}$
řídá aproximace

(Dk:) Jak najít c_j ?

$$u_{i+\alpha_j} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{u_i^{(k)}}{k!} \underbrace{\left(\underbrace{a + (i+\alpha_j)h}_{= x_i + \alpha_j} - \underbrace{(a+ih)}_{x_i} \right)^k}_{\alpha_j h} + \mathcal{O}(h^l) \quad \forall j$$

dosadíme

$$\frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j u_{i+\alpha_j} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j \left[\sum_{k=0}^{l-1} \frac{u_i^{(k)}}{k!} (\alpha_j h)^k + \mathcal{O}(h^l) \right] =$$

$$\sum_{k=0}^{l-1} u_i^{(k)} \underbrace{\sum_{j=1}^l \frac{\alpha_j^k h^{k-1}}{k!} c_j}_{b_k} + \mathcal{O}(h^{l-1}) \stackrel{!}{=} u_i'$$

chtene $b_1 = 1$ a $b_k = 0$ pro $k \neq 1$

podminky tvorí soustavu lin. rovnic pro c_j ve tvaru

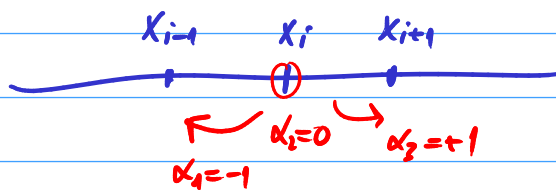
$$A \vec{c} = \vec{b} \quad \text{kde} \quad A = (a_{kij}) = \left(\frac{\alpha_j^k h^{k-1}}{k!} \right) \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

$$k \in \{0, \dots, l-1\}, j \in \{1, \dots, l\}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pr. 6

centrální diference : $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$



j 1 2 3

$$\begin{matrix} k \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{h}{2} & 0 & \frac{h}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{h}{2} & 0 & \frac{h}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

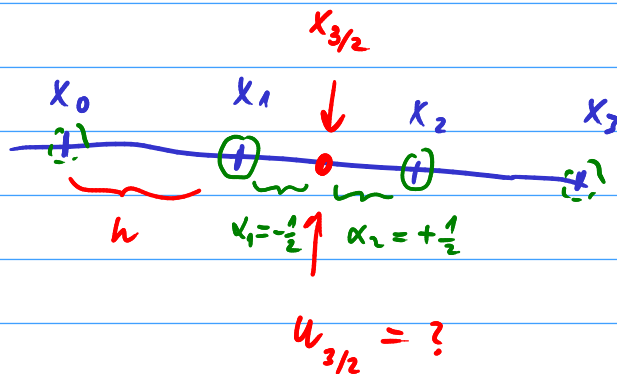
$$c_3 = \frac{1}{2}, c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = 0$$

$$u'_i = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^l c_j u_{i+\alpha_j} + O(h^{l-1})$$

$$u'_i = \frac{1}{2h} (-u_{i-1} + 0 \cdot u_i + u_{i+1}) + O(h^2)$$

$$= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

POZN - INTERPOLACE



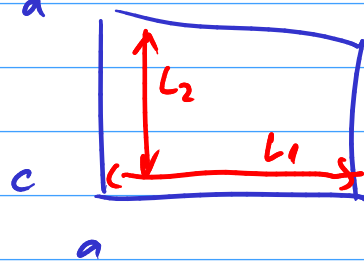
DŮ: najít interpolaci $u_{3/2}$ pomocí $\begin{cases} u_1, u_2 \\ u_0, u_1, u_2, u_3 \end{cases}$

ZÁKLADNÍ POJMY METODY KONEČNÝCH DIFFERENCÍ

na $\mathcal{Y} \times \Omega$ kde $\mathcal{Y} = (0, t_{\max})$, $\Omega = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$

$$t \in \mathcal{Y}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Omega$$

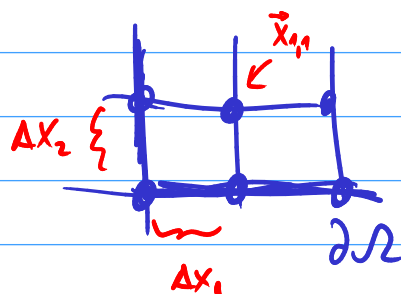
e $L_1 = b - a, L_2 = d - c$



na Ω definujeme sít' ekvidistantních bodů (uzlů) o $(m_1+1) \cdot (m_2+1)$ uzlech

def $\Delta x_1 = \frac{L_1}{m_1}, \Delta x_2 = \frac{L_2}{m_2}$

def. $\vec{x}_{i,j} = \begin{pmatrix} i\Delta x_1 \\ j\Delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$

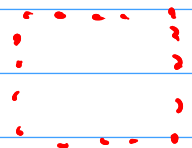


- def. $h = \max(\Delta x_1, \Delta x_2) \approx \frac{1}{h}$ ^{$\leftarrow \min\left(\frac{m_1}{L_1}, \frac{m_2}{L_2}\right)$} budeme uvažovat prostorové rozlišení sítě

- množina vnitřních uzlů sítě $\omega_h = \left\{ \vec{x}_{ij} \mid i \in \{1, \dots, m_1-1\}, j \in \{1, \dots, m_2-1\} \right\}$

- množina všech uzlů sítě $\bar{\omega}_h = \left\{ \vec{x}_{ij} \mid i \in \{0, \dots, m_1\}, j \in \{0, \dots, m_2\} \right\}$

- množina hraničních uzlů $\gamma_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$



- def. $\Delta t = \frac{t_{\max}}{N}$

a $t^n = n \Delta t$ pro $n \in \{0, \dots, N\}$ nazýváme n-tou časovou vrstvou

- množina časových vrstev

$$\begin{aligned} z^{\Delta t} &= \{t^n \mid n \in \{1, \dots, N\}\} \\ \bar{z}^{\Delta t} &= \{t^n \mid n \in \{0, \dots, N\}\} \end{aligned}$$

- prostor síťových funkcí

$$\mathcal{H}_h^{\Delta t} = \left\{ w_h^{\Delta t} \mid w_h^{\Delta t}: \bar{z}^{\Delta t} \times \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R} \right\}$$

prvky $\mathcal{H}_h^{\Delta t}$ jsou "síťové funkce"

- $w_{ij}^n := w_h^{\Delta t}(t^n, \vec{x}_{ij})$

- operátor projekce na síť $\mathcal{P}_h^{\Delta t}: C(\bar{\gamma} \times \bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{H}_h^{\Delta t}$

definujeme $\left(\mathcal{P}_h^{\Delta t} u \right)_{ij}^n = u(t^n, \vec{x}_{ij})$
 $\in \mathcal{H}_h^{\Delta t}$

Pozn: pro vekt. fce lze totéž po složkách

DIFERENCIÁLNÍ NÁHRADY PROSTOROVÝCH PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ

$u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \Omega)$ $w \in \mathcal{J}_h^{\Delta t}$

def. $\left(\overleftarrow{\delta}_{x_1} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i,j}^n - w_{i-1,j}^n}{\Delta x_1}$

střední derivace na $\bar{z}^{\Delta t} \times w_h$ zprávná dif.

platí když $w = \mathcal{P}_h^{\Delta t} u$:
 $\left(\overleftarrow{\delta}_{x_1} \mathcal{P}_h^{\Delta t} u \right)_{ij}^n = \partial_{x_1} u(t^n, \vec{x}_{ij}) + \mathcal{O}(h)$

$\left(\overrightarrow{\delta}_{x_1} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n}{\Delta x_1}$ dopředná dif.

$\left(\overleftrightarrow{\delta}_{x_1} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2\Delta x_1}$ centrální dif.

$\left(\overleftarrow{\delta}_{x_2} w \right)_{ij}^n = \frac{w_{i,j}^n - w_{i,j-1}^n}{\Delta x_2}$ atd

$\overrightarrow{\delta}_{x_2} w, \overleftrightarrow{\delta}_{x_2} w$

Pozn: kdyby byl $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$ na $\bar{z}^{\Delta t} \times \bar{w}_h$ pak $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$ na $\bar{z}_x^{\Delta t} \times w_h$ pak $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$ na $\bar{z}_x^{\Delta t} \times w_h$ pak $\mathcal{J}_h^{\Delta t}$

Pozn: DIV, GRAD

$\overleftarrow{\nabla}_h w = \begin{pmatrix} \overleftarrow{\delta}_{x_1} w \\ \overleftarrow{\delta}_{x_2} w \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla}_h = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

$\overleftrightarrow{\nabla}_h w = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix}$

$\overleftrightarrow{\nabla}_h \vec{w} = \overleftarrow{\delta}_{x_1} w_1 + \overleftarrow{\delta}_{x_2} w_2$ kde $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

$w_1, w_2 \in \mathcal{J}_h^{\Delta t}$

atd. $\overrightarrow{\nabla}_h \cdot \vec{w}, \overleftrightarrow{\nabla}_h \cdot \vec{w} = \dots$

DIFERENČNÍ NAHRADY ČAS. DERIVACE

$$\left(\overleftarrow{\delta}_t w \right)_{ij}^n = \frac{w_{ij}^n - w_{ij}^{n-1}}{\Delta t}, \quad \left(\overrightarrow{\delta}_t w \right)_{ij}^n = \frac{w_{ij}^{n+1} - w_{ij}^n}{\Delta t}$$

zpětci
dopředu

sifové funkce def. na $z^{At} \times \bar{w}_h$

KONZISTENCE, KONVERGENCE A STABILITA DIF. SCHEMAT

(Př) upwind schéma pro $\partial_t u + a \partial_x u = 0$ ($a > 0$)
 na $\mathbb{T} \times \Omega$, $\Omega = (0, 1)$ $\leftarrow u \in C^1(\mathbb{T} \times \Omega)$

↓ num. řešení je $u_h^{At} \in \mathcal{I}_h^{At}$ ($h = \Delta x$)

def. $u_h^{At}(t^n, x_k) =: u_k^n$ *zjednodušené
značení*
 $\neq u$

*ne explicitně
vyjádřit*

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftarrow{\delta}_x u_h^{At} = 0$$

$\rightarrow x_k, t_n \rightarrow$

(*) PDR: $Lu = f(t, \vec{x}, u)$ $L \dots$ diferenciální operátor (lin.)

(***) MKD: $L_h^{At} u_h^{At} = f_h^{At}$ $L_h^{At} \dots$ diferenciální operátor
(diferenciální schéma) *pokud $f = f(t, \vec{x}) \dots f_h^{At} = P_h^{At} f$*

$$f_k^n := \left(f_h^{At} \right)_k^n = f(t^n, x_k) \quad \forall 10$$

$$\text{pokud } f = f(t, \vec{x}, u) \dots f_k^n = f(t^n, x_k, u_k^n)$$

- norma $\|\cdot\|_h^{\Delta t}$ na $\mathcal{I}_h^{\Delta t}$ je KONZISTENTNÍ, existuje-li

norma $\|\cdot\|_C$ na $C(\bar{\gamma} \times \bar{\Omega})$ taková, že

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|\mathcal{P}_h^{\Delta t} u\|_h^{\Delta t} = \|u\|_C$$

(h, Δt) → (0)

Např. norma $\|w\|_h^{\Delta t} = \max_{\bar{\gamma}^{\Delta t} \times \bar{\omega}_h} |w(t, \vec{x})|$ je konzistentní

$$\text{a normou } \|u\|_C = \max_{\bar{\gamma} \times \bar{\Omega}} |u(t, \vec{x})|$$

- chyba aproximace diferenciálního operátora je síťová funkce

$$E(u) = L_h^{\Delta t} (\mathcal{P}_h^{\Delta t} u) - \mathcal{P}_h^{\Delta t} (Lu) \quad : \quad \mathcal{I}^{\Delta t} \times \omega_h \rightarrow \mathbb{R}$$

kde $\|\cdot\|_h^{\Delta t}$ je konzistentní norma

- pokud $\|E(u)\|_h^{\Delta t} = \mathcal{O}(h^p + (\Delta t)^q)$, řekneme, že $L_h^{\Delta t}$ aproximuje L s řádem p v prostoru a s řádem q v čase

pokud $p, q > 0$, tak diferenciální schéma ~~XX~~ nazýváme KONZISTENTNÍ

- numerické schéma ~~XX~~ je KONVERGENTNÍ (\Leftrightarrow)

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \|u_h^{\Delta t} - \mathcal{P}_h^{\Delta t} u\|_h^{\Delta t} = 0 \quad \text{kde } \|\cdot\|_h^{\Delta t} \text{ je konzist.}$$

" $u_h^{\Delta t}$ konverguje k u "

$(\Delta t, h) \in \mathcal{A}$... viz dále

může a nemusí navíc!

Pozn: $e_h^{At} = u_h^{At} - P_h^{At} u$ je globální chyba aproximace

Pozn: Aproximace okraj. podmínek

$$Lu = f$$

poč. podm

$$u(0, \vec{x}) = u_{ini}(\vec{x})$$

okraj. podm

$$Bu(t, \vec{x})|_{\partial\Omega} = g(t, \vec{x})$$

operator okrajové podm

$$L_h^{At} u_h^{At} = f_h^{At}$$

$$u_h^{At} \Big|_{\{0\} \times \bar{\omega}_h} = u_{ini} \Big|_{\bar{\omega}_h}$$

$$B_h^{At} u_h^{At} \Big|_{\bar{z}^{At} \times \gamma_h} =$$

$$\bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{H}_h = \{w: \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$= g \Big|_{\bar{z}^{At} \times \gamma_h}$$

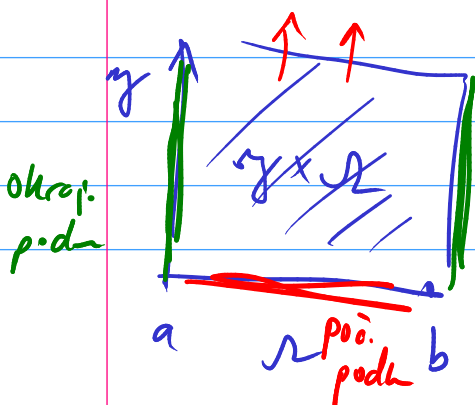
pak můžeme rozšířit

$$E(u) = B_h^{At} (P_h^{At} u) - P_h^{At} (Bu) \quad \text{na } z^{At} \times \gamma_h$$

$$a \quad E(u) = u_h^{At}(0, \vec{x}) - u_{ini}(0, \vec{x}) = 0 \quad \text{na } \{0\} \times \bar{\omega}_h$$

• Dirichletovy okraj. podmínky $\Rightarrow B, B_h^{At}$ je identity operator

\Rightarrow pak $E(u) = 0$ i na $z^{At} \times \gamma_h$



poč. podm = Dirichletova okraj. podm v časoprostorové oblasti $\gamma \times \mathcal{I}$

Pozn : konzist. max. norma $\|u_h^{At}\|_h = \max_{(t, \vec{x}) \in \bar{z}^{At} \times \bar{\omega}_h} |u_h^{At}(t, \vec{x})| < u_k^n \approx 10$

$$= \max_{\bar{z}^{At}} \left(\max_{\bar{\omega}_h} |u_h^{At}(t, \vec{x})| \right)$$

$$= \max_{\bar{z}^{At}} \|u_h^n(t, \vec{x})\|_h$$

max norma jen přes prostor
norma na \mathcal{H}_h

hde $u_h^n = u_h^{At}(t^n, \cdot) : \bar{\omega}_h \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{H}_h$

DEF : Numerické schéma $L_h u_h^{At} = f_h^{At}$ je STABILNÍ,

právě když existuje množina $\mathcal{A} = \{(\Delta t, h) | \dots\} \subset \mathbb{R}^2$ taková, že \uparrow oblast stability (stability region)

- 1) $(0,0)$ je hraničním bodem \mathcal{A}
- 2) $\forall (\Delta t, h) \in \mathcal{A} \quad \forall \phi \in \mathcal{H}_h^{At}$ má úloha

$$L_h u_h^{At} = \phi$$

$$R_h u_h^{At} = g_h^{At} \quad \text{obřej. p.}$$

$$u_h^0 = u_{h,ini} \quad \text{poč. p.}$$

}

*

jednoznačné řešení (označujeme ho $u_{h,\phi}^{At}$)

- 3) Existuje konst $k > 0$ tak, že $\forall (\Delta t, h) \in \mathcal{A}, \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}_h^{At}$

$$\|u_{h,\phi_1}^{At} - u_{h,\phi_2}^{At}\|_h \leq k \|\phi_1 - \phi_2\|_h^{At}$$

hde $\|\cdot\|_h^{At}$ je konzist. norma

(Laxova - Richtmyerova věta o ekvivalenci)
VĚTA (Laxova) Necht' v **(**)** je L_h^{At} LINEÁRNÍ

diferenční operátor, ϕ necht' nezdíví na u_h^{At} .
 Necht' **(*)** má jediné řešení a L_h^{At} aproximuje L
 s řádem přesnosti $O(h^p + \Delta t^q)$ $p, q > 0$

Potom diferenční schéma **(**)** je stabilní \Leftrightarrow je konvergentní!

Rád konvergence je tedy $O(h^p + \Delta t^q)$. **(\Rightarrow)** - DK

(DK) pro Dirichletovy okraj. podm.

převodní PDR: $Lu = f$ $\xrightarrow{\text{lin.}} \text{nezdíví na } u$ \searrow projekce na síť

• $P_h^{At}(Lu) = P_h^{At} f$

()** : • $L_h^{At} u_h^{At} = \phi = \underline{P_h^{At} f}$ je projekce f na síť

odečteme $P_h^{At}(Lu) - L_h^{At} u_h^{At} = 0$

$P_h^{At}(Lu) - L_h^{At}(P_h^{At} u) + L_h^{At}(P_h^{At} u) - L_h^{At} u_h^{At} = 0$

- $E(u)$ dílne doprava \downarrow L_h^{At} je lin.

chyba aproximace
dif. op.

$L_h^{At} (P_h^{At} u - u_h^{At}) = E(u)$ **(#)**

e_h^{At} ... glob. chyba num. řeš.

(#) je úloha pro e_h^{At} s nulovými Dirichletovými
 okrajovými podmínkami a nulovou poč. podm.

$$\text{stabilita} \quad \| U_{h,\phi_1}^{At} - U_{h,\phi_2}^{At} \|_h \leq K \| \phi_1 - \phi_2 \|_h^{At}$$

zvolne $\phi_1 = E(u), \quad \phi_2 = 0$

$$\Updownarrow \\ U_{h,\phi_1}^{At} = e_h^{At}$$

$$\Updownarrow \\ U_{h,\phi_2}^{At} = 0$$

lin. dif. op. L_h^{At} , nulova' p.s. $\phi_2 = 0$
 a nulova' Dir. okroj. podm
 a nulova' poč. podm

$$\| e_h^{At} \|_h^{At} \leq K \| E(u) \|_h^{At} = (K) O(h^p + \Delta t^q)$$

VĚTA : Necht' jsou splněny body (1), (2) v def. stability, udt' schéma

$$L_h^{At} u_h^{At} = f_h^{At} \quad (*)$$

je lineární.

Necht' $\exists C, 0 > 0$ tak, že $\forall (At, h) \in \mathcal{A} \quad \forall f_h^{At} \in \mathcal{F}_h^{At}$

platí $\| u_h^n \|_h \leq C \| u_h^0 \|_h + \underbrace{Dn\Delta t}_{t^n} \| f_h^{At} \|_h^{At} \quad \forall n = 1, \dots, N$

Potom schéma (*) je stabilní

(Dk):

Necht' $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}_h^{At}$. Pak $L_h^{At} u_{h,\phi_1}^{At} = \phi_1$
 $L_h^{At} u_{h,\phi_2}^{At} = \phi_2$ } odeduče

ozeň. $\varepsilon_h^{At} = u_{h,\phi_1}^{At} - u_{h,\phi_2}^{At}$

$$\| \phi_1 - \phi_2 \|_h^{At}$$

$$\Rightarrow L_h^{At} \varepsilon_h^{At} = \phi_1 - \phi_2 \quad \text{kde } \varepsilon_h^0 = 0$$

Pak: $\| \varepsilon_h^{At} \|_h^{At} \leq K \max_n \| \varepsilon_h^n \|_h \leq K \max_n Dn\Delta t \| \phi_1 - \phi_2 \|_h^{At} \leq K D t_{\max} \| \phi_1 - \phi_2 \|_h^{At}$

Uvažujme rovnici $Lu=0$ a schéma $L_h^{AT} u_h^{AT} = 0$,

lineární, BÜNO jen v 1D

$$u_k^{n+1} = u_k^n + (\dots)$$

DEF: $L_h^{AT} u_h^{AT} = 0$ je pozitivní $(\Rightarrow) u_k^{n+1} = \sum_{p \in S_k} a_{p,k} u_{k+p}^n$... viz *

$$\left(L_h^{AT} u_h^{AT} \right)_k^n = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + \dots$$

prostorové diference \rightarrow

$$\wedge a_{p,k} \geq 0 \quad \forall p \in S_k$$

VĚTA: Jestliže Lu obsahuje jen derivace u , pak každé pozitivní schéma je konvergentní.

(Dk:)

• koef. u u_{k+p}^n v dif. náhradě každé derivace jsou v rovnici rovný 0 ... viz 1. řádek matice v odvaze u diferencíálních náhrad

$$\Rightarrow \sum_{p \in S_k} a_{p,k} = 1 \quad (\forall k \dots \text{viz } *)$$

zvolne maximum normu $\| \cdot \|_h^{AT}$

Potom: $\| u_h^{n+1} \|_h = \max_k |u_k^{n+1}| = \max_k \left| \sum_{p \in S_k} a_{p,k} u_{k+p}^n \right| \leq$

$$\leq \max_k \sum_{p \in S_k} |a_{p,k}| |u_{k+p}^n| \leq \max_k \sum_{p \in S_k} |a_{p,k}| \left(\max_j |u_j^n| \right)$$

$$\leq \max_k \underbrace{1 \cdot \|u_h^n\|_h}_{\text{nezávislost na } k} = \|u_h^n\|_h$$

\uparrow z pozitivity $\sum |a_{p,k}| = \sum a_{p,k} = 1$

\uparrow analogicky lze pokračovat:

$$\leq \dots \|u_h^{n-1}\|_h \leq \dots \leq \|u_h^0\|_h$$

\Rightarrow princip max \Rightarrow stabilita \Rightarrow konvergence.
LAX

* zavislost na k znamená, že numerické řešení nemusí být natvře stejné ve všech uzlech sítě; např. u krajů může být přizpůsobeno kvůli zachování řádu přesnosti 26

SCHEMA UPWIND PRO ROVNICI $\partial_t u + a \partial_x u = 0$

pro obecné a : def. $a_+ = \max(a, 0)$
 $a \in \mathbb{R}$, konst. $a_- = \min(a, 0)$

$$\Rightarrow \vec{\partial}_t u_h^{At} + a_+ \overleftarrow{\partial}_x u_h^{At} + a_- \vec{\partial}_x u_h^{At} = 0$$

$$\text{tj.} \quad \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a_+ \frac{u_k^n - u_{k-1}^n}{\Delta x} + a_- \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} = 0$$

Pozn:

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \Leftrightarrow \partial_t u + \underbrace{f'(u)} \partial_x u = 0$$

$$a_+(u) = \max(f'(u), 0)$$

$$a_-(u) = \min(f'(u), 0)$$

Stabilita (a t_k p_odem konvergence) upwind schéma

1) pozitivita: $a > 0$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a (u_k^n - u_{k-1}^n)$$

$$= u_k^n \underbrace{\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x} a}_{> 0} u_{k-1}^n$$

vždy

pokud $a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$

stajne jako CFL ... ale ted' mame
i postačující podmínku

2) Von Neumannova spektrální analýza stability

$\partial_t u + a \partial_x u = 0$ s periodickými okrajovými podmínkami

$$\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$$

$$u(t, b) = u(t, a)$$

DEF: Diferenciální rovnice $L_h^{\text{At}} u_h^{\text{At}} = f_h^{\text{At}}$ se nazývá
 JEDNOKROKOVÉ \Leftrightarrow síťová funkce $\left(L_h^{\text{At}} u_h^{\text{At}} \right)^n$

je závislá pouze na u_h^n a u_h^{n+1} , resp. u_h^{n-1} a u_h^n .

POZ: Jednokrokové lin. schéma je ve tvaru

$$u_h^{n+1} = A u_h^n + \Delta t f_h^n \quad \text{explicitní}$$

$$B u_h^{n+1} = A u_h^n + \Delta t (C f_h^n + D f_h^{n+1}) \quad \text{implicitní}$$

Uvažujme (BUNO) explicitní schéma dlež s nulovou pravou stranou ve tvaru

$$\textcircled{\#} \quad u_k^{n+1} = \sum_p a_p u_{k+p}^n \quad \forall \text{ } 1D$$

Předpokládáme $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $x_k = a + k \Delta x$, $t^n = n \Delta t$

$$L = b - a$$

$$k = 0, \dots, m; \quad n = 0, \dots, N$$

Uvažujme $u_{\text{ini}}(x) \in C(\Omega)$

$$\tilde{u}_{\text{ini}} = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l \exp\left(\frac{2\pi i l x}{L}\right) \quad c_l = \frac{2}{L} \int_a^b u_{\text{ini}}(x) \exp\left(\frac{2\pi i l x}{L}\right) dx$$



poč. podm. pro num. řešení

$$u_k^0 = u_{ini}(x_k)$$

⇓

$$u_k^0 = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_l \exp\left(\frac{2\pi i l (a + k\Delta x)}{L}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \underbrace{C_l \exp\left(\frac{2\pi i l a}{L}\right)}_{\tilde{C}_l} \underbrace{\exp\left(i l k \frac{2\pi \Delta x}{L}\right)}_{\exp(\alpha i l k)} \quad \alpha = \frac{2\pi \Delta x}{L}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \exp(\alpha i l k)$$

Pokud jsou splněny tzv. periodické okraj. podm. $u(a) = u(b)$

$$u_0^n = u_m^n$$

⇒ 1) rozvoj platí i v krajních bodech

⇒ 2) řešení (#) platí $\forall k = 0, \dots, m$

$$u_k^1 = \sum_p a_p u_{k+p}^0 = \sum_p a_p \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \exp(\alpha i l (k+p)) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \underbrace{\sum_p a_p \exp(\alpha i l p)}_P \exp(\alpha i l k)$$

$\lambda(\alpha l)$... zesilující (amplifikační) faktor

$$\Rightarrow u_k^n = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{C}_l \lambda^n(\alpha l) \exp(\alpha i l k)$$

$\theta := \alpha l \in \mathbb{R}$ pro různé $\Delta x, l$

POTOM: $|\lambda(\theta)| \leq 1$ pro $\forall \theta \in \mathbb{R} \Rightarrow u_k^n$ je omezená $\forall k, \forall n$

$$\Rightarrow \|u_k^n\|_n \leq C \|u_0^0\|_n$$

⇒ stabilita ⇒ konvergence

• $\exists \theta$ tak, že $|\lambda(\theta)| > 1 \Rightarrow u_k^n$ roste nade všechny meze pro $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$ nekonzvergence

Zpět k upwind schématu:

do schématu: $u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_k^n - u_{k-1}^n)$ pro $a > 0$

dosadíme $u_k^n = (c) \exp(ik\theta)$ kde $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= \exp(ik\theta) - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\exp(ik\theta) - \exp(i(k-1)\theta)) \\ &= \exp(ik\theta) \left[\left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \exp(-i\theta) \right] \end{aligned}$$

ozn. $\sigma := \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lambda(\theta) = 1 - \sigma(1 - e^{-i\theta}) = 1 - \sigma(1 - \cos\theta) - i\sigma \sin\theta$$

$$|\lambda(\theta)|^2 = (1 - \sigma(1 - \cos\theta))^2 + \sigma^2 \sin^2\theta$$

$$= ((1 - \sigma) + \sigma \cos\theta)^2 + \sigma^2 \sin^2\theta$$

$$= (1 - \sigma)^2 + 2(1 - \sigma)\sigma \cos\theta + \sigma^2$$

$$= 1 - 2\sigma + 2\sigma^2 + 2(1 - \sigma)\sigma \cos\theta$$

$$= 1 - 2\sigma(1 - \sigma)(1 - \cos\theta)$$

$\underbrace{> 0}_{\geq 0} \quad \underbrace{\geq 0} \quad \underbrace{\geq 0} \quad \underbrace{\leq 1}$

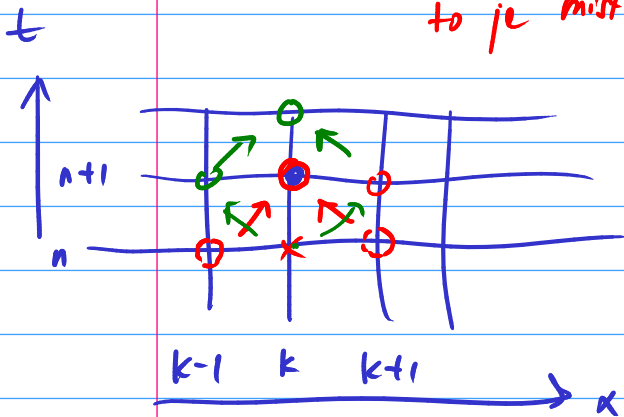
$$\Rightarrow \sigma \leq 1 \Rightarrow \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

LAXOVO - FRIEDRICHSOVO SCHEMA pro $\partial_t u + a \partial_x u = 0$

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{k-1}^n + u_{k+1}^n) - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)$$

to je místo u_k^n

$$\frac{1}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) = [\overset{\leftrightarrow}{\partial_x} u]_k^n$$



prepíseme

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

$$\overset{\rightarrow}{\partial_t} u_n^{\Delta t} = -a \overset{\leftrightarrow}{\partial_x} u_n^{\Delta t} + \mu_{num} \overset{\rightarrow}{\partial_x} \overset{\leftarrow}{\partial_x} u_n^{\Delta t}$$

aprox. $\partial_x u$
2. řádu

∂_{xx}

aproximace $\partial_{xx} u$
v bode (t^n, x_k)
centrální diference

to je aproximace rovnice
s přesností $O(\Delta t + \Delta x^2)$

$$\partial_t u + a \partial_x u = \mu_{num} \partial_{xx} u$$

modifikovaná rovnice

$$\mu_{num} = \frac{\Delta x^2}{2 \Delta t} \quad \text{numerická viskozita}$$

LF scheme \rightarrow MODIFIKOVANE' LF SCHEMA

$$\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kde } \varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

$$\parallel$$

$$\frac{1}{2}$$

zde

$$\mu_{\text{num}} = \varepsilon \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$$

$\varepsilon = 1 \dots \Rightarrow$ LF scheme

$\varepsilon = 0 \Rightarrow$ explicitni CENTRALNI SCHEMA

STABILITA' POKOC' VOZ NEUMENNOU ANALIZY $u_k^n = \exp(ik\theta)$

$$\lambda(\theta) = 1 - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\varepsilon}{2} (e^{-i\theta} - 2 + e^{i\theta})$$

$$= 1 - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin \theta - \varepsilon (1 - \cos \theta)$$

$$|\lambda(\theta)|^2 = [1 - \varepsilon(1 - \cos \theta)]^2 + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2\varepsilon(1 - \cos \theta) + \varepsilon^2(1 - \cos \theta)^2 + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \theta$$

restime $1 \geq |\lambda(\theta)|^2$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$$

$$2\varepsilon(1 - \cos \theta) \geq \varepsilon^2(1 - \cos \theta)^2 + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \theta \quad \Bigg| \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

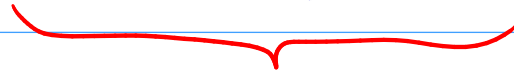
$$2\varepsilon \geq \varepsilon^2(1 - \cos \theta) + \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (1 + \cos \theta) \quad \theta \neq 2k\pi$$

$$z = \cos \theta$$

\parallel



$$2\varepsilon \geq \varepsilon^2(1-z) + \left(\frac{aAt}{Ax}\right)^2(1+z) \quad \forall z \in \langle -1, 1 \rangle$$



lin. fce $z \Rightarrow$ hodnoty min./max u $z = \pm 1$

$$z=1: \quad 2\varepsilon \geq 2\left(\frac{aAt}{Ax}\right)^2$$



$$z=-1: \quad 2\varepsilon \geq 2\varepsilon^2$$

$\varepsilon \geq \varepsilon^2$, což platí $\forall \varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$.
(pouze takové uvažujeme)

\Rightarrow konvergence mod. LF schémata je \Leftrightarrow $\frac{aAt}{Ax} \leq \sqrt{\varepsilon}$

$$\mu_{\min} = \varepsilon \frac{Ax^2}{2At} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

\leftarrow pokud $\frac{aAt}{Ax} = \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow \mu_{\min} \approx \sqrt{\varepsilon} \dots$ num. vizkozita klesá s $\varepsilon \rightarrow 0$

Důsledky: $\varepsilon = 1$

$\frac{aAt}{Ax} \leq 1 \dots$ LF řešení ke stejné podm. konvg jako upwind

$\varepsilon \in (0, 1) \dots$ ubíráme num. difuzi \Rightarrow zpřesňuje se podmínka na čas krok

$\varepsilon = 0 \dots$ podm. konvg. **NEJDE NIKDY splnit**

\Rightarrow explicitní centrální schéma JE

NEPODMÍNĚNĚ NESTABILNÍ

IMPLICITNÍ EULEROVŮ SCHEMA

$$\overleftarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{Ax} = 0$$

$$\left(\overleftarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{Ax} \right)_k^n = \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \dots \text{ soustava li. rovnic}$$

pro neznámý
vektor $u_h^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_{m-1}^n \end{pmatrix}$

$$\left(\overleftarrow{\delta}_t u_h^{At} + a \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{Ax} \right)_k^{n+1} = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad \dots \text{ s 3-diag. maticí}$$

"+" je nově oprávně explicit,
centrálním schématu

$\theta = \alpha \Delta t \in \mathbb{R}$

$$u_k^n = e^{ik\theta}$$

$$u_k^{n+1} = \lambda(\theta) e^{ik\theta}$$

dosaďme:

$$\frac{1}{\Delta t} (\lambda(\theta) - 1) e^{ik\theta} + \frac{a}{2\Delta x} \lambda(\theta) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) e^{ik\theta}$$

ozn. $\sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$

$$\lambda(\theta) - 1 + \frac{\sigma}{2} \lambda(\theta) (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 0$$

$$= \lambda(\theta) - 1 + \lambda(\theta) \sigma i \sin \theta = 0$$

$$\lambda(\theta) = \frac{1}{1 + i\sigma \sin \theta}$$

$$\Rightarrow |\lambda(\theta)| = \frac{1}{|1 + i\sigma \sin \theta|} \leq 1$$

\Rightarrow IMPLIC. SCHEMA JE NEPODMÍNĚNĚ STABILNÍ

POZN : explicitní řešení

At můžeme zjednodušit s AX
více snadných časových kroků
snadná, flexibilní a efektivní
paralelizace

implicitní řešení

At nezávisle na Δx
méně náročnějších časových
kroků

paralelizace : tak dobře,
jách dobře se dá paralelizovat
řešení soustavy lin. rovnic

Průběh : upwind pro a > 0 :

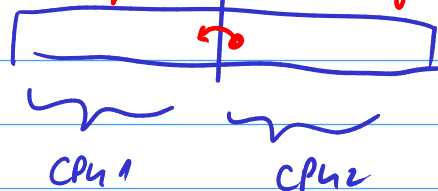
```

    #pragma omp parallel for OPEUMP
    for (k=1; k < m; k++)
        u_new[k] = u[k] + (Δt/Δx) * (u[k-1] - u[k]);
    
```

1 časový
krok

u_k^{n+1}
 u_k^n

posílání zpráv na 2 strojích (MPI)



SCHEMATA KONČNÝCH DIF. PRO ROVNICI VEDENÍ TEPLOTA

1D : $\partial_t u = \lambda \partial_{xx} u$ (*)

2D, 3D : $\partial_t u = \lambda \Delta u$ poč. podmín $u|_{t=0} = u_{ini}$

r-D : $\partial_t u = \lambda \sum_{j=1}^r \partial_{j,j} u$ okraj podm $u|_{\partial\Omega} = 0$

(*) pokud $\lambda = \lambda(x)$ $\Rightarrow \partial_t = \partial_x (\lambda \partial_x u)$ ^{teplota}

v 1D ... centrální explicitní schéma

$$\left(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{At} \right)_k^n = \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} = \lambda \overleftrightarrow{\delta}_{xx} u_h^{At}$$

v r-D $\overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} = \lambda \sum_{j=1}^r \overleftrightarrow{\delta}_{x_j x_j} u_h^{At}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \partial_{x_j} u = \underline{\partial_j} u$$

$$\overleftrightarrow{\delta}_j \equiv \overleftrightarrow{\delta}_{x_j}$$

Pozn: $\overleftrightarrow{\delta}_{xx} u_h^{At} = \overleftrightarrow{\delta}_x \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{At} = \overleftrightarrow{\delta}_x \overleftarrow{\delta}_x u_h^{At}$

*) $\overrightarrow{\delta}_t u_h^{At} = \overleftrightarrow{\delta}_x (\lambda \overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{At})$

Nebo: $\partial_x (\lambda(x) \partial_x u(x)) = \partial_x \lambda(x) \partial_x u(x) + \lambda(x) \partial_{xx} u(x)$

Stabilita schémat v 1D: $u_k^n = e^{ik\theta}$, $u_k^{n+1} = \lambda(\theta) e^{ik\theta}$

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

Pozn: Stabilita a konvergence díky pozitivitě

bu: ověřit řadu přetvořit centrální dif. úchřady

$$1 - \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

$$\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\lambda(\theta) = 1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (e^{-i\theta} - 2 + e^{i\theta})$$

$$= 1 + 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \dots \text{reálné číslo}$$

$$|\lambda(\theta)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \leq 1$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$

$$-2 \leq 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \leq 0$$

\Rightarrow $\neq 0$ \Rightarrow splněno vždy

$$-2 \leq -2 \cdot 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$

Δt klade jako Δx^2
 \Rightarrow může být výhodné použít implicit. schéma

Dů: ukázat, že implicitní centrální schéma

$$\sum_{\tau} u_h^{\Delta t} = \lambda \sum_{xx} u_h^{\Delta t}$$

je nepodmíněně stabilní

Stabilita explicit. schématu v r -D ... $\Omega = (0, 1)^r$

každý "mód" r -rozměrné Fourierovy řady má tvar

$$u_{k_1, k_2, \dots, k_r}^n = e^{ik_1 \theta_1} e^{ik_2 \theta_2} \dots e^{ik_r \theta_r} = \prod_{j=1}^r e^{ik_j \theta_j}$$

$$\theta_j = \frac{\Delta x_j}{2\pi}$$

$$u_{k_1, k_2, \dots, k_r}^{n+1} = \lambda(\theta_1, \dots, \theta_r) \prod_{j=1}^r e^{ik_j \theta_j}$$

10:

$$\begin{aligned} \lambda(\theta) &= 1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (e^{-i\theta} - 2 + e^{i\theta}) \\ &= 1 + 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x^2} (\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

↓ po dosazení do r -rozměrného dif. schématu

$$\lambda(\theta_1, \dots, \theta_r) = 1 + \sum_{j=1}^r 2 \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_j^2} (\cos \theta_j - 1)$$

$$|\lambda(\theta_1, \dots, \theta_r)| \leq 1 \quad \forall (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2 \cdot \sum_{j=1}^r \frac{2\lambda \Delta t}{\Delta x_j^2} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^r \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_j^2} \leq \frac{1}{2}$$

pro pravidelnou síť z hyperkrychliček : $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_r = h$
o straně h

$$\frac{\lambda \Delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2r}$$

Napr. v 3D když zjemníme z rozlišení $\frac{1}{h}$ na $\frac{2}{h}$, tak :

- síť bude mít 2^3 -krát více uzlů
- časový krok bude potřeba 2^2 -krát více

\Rightarrow celkem 2^5 -krát více operací $(2^5 = 32)$

\Rightarrow celkem 2^3 -krát více paměti

Pozn : advekční vs. difuzivně dominované úlohy
(NS rovnice pro vazké proudění)

- rychlost proudění vs. viskozita
- numerická viskozita
- turbulentní viskozita

KLASICKÁ SCHÉMATA METODY KONČNÝCH DIFERENCÍ

Schéma Cranka a Nicolsonové

$$u(t_{n+1}, x) = u(t_n, x) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \partial_t u(t, x) dt = u(t_n, x) + \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_t u(t_{n+1}, x) + \partial_t u(t_n, x) \right) + O(\Delta t^3)$$

$f(\xi) + \underbrace{O(L^2)} \quad \underbrace{O(L)}$

$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a)+f(b)}{2} \cdot (b-a) + O(L^2)$ Lichoběžňukové pravidlo

$L=b-a$

\Rightarrow pro rovnici $\partial_t u = \underbrace{L_x u}_{\text{prostorová derivace}}$ (L_x je dif. op. v prostorových souř.)

$\left(\overset{\rightarrow}{\partial_t} u_h^{at} \right)_h^n = \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{L_h u_h^n}_{\substack{\text{dif. náhled} \\ L_x u \\ \text{v čase } t_n}} + \underbrace{L_h u_h^{n+1}}_{\substack{\text{---} \\ \text{v čase } t_{n+1}}} \right)$ $L_h \dots$ diferenciální op. v prostor. souř.

Např. pro rovnici vedení tepla:

$\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} = \lambda \cdot \frac{1}{2} \left(\overset{\leftarrow}{\partial_{xx}} u_h^n + \overset{\rightarrow}{\partial_{xx}} u_h^{n+1} \right)$

$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \lambda \frac{1}{2} \left(\frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right)$

(semi) implicitní a nepodmíněně stabilní schéma 2. řádu v čase

a v prostoru je řád stejný jako řád aproximace L_x operátorem L_h

(pro rovnici vedení tepla také 2. řád)

SCHEMA MKO PRO VLNOVOU ROVNICI

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u \quad \dots \quad a \partial_{xx} u + 2b \partial_{xy} u + c \partial_{yy} u + \dots = 0$$

1. řád

zde $t \equiv y$

$$a \equiv c^2$$

$$b \equiv 0$$

$$c \equiv -1$$

$$D = b^2 - ac$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \quad \text{kde} \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$$

$$\Rightarrow D = b^2 - ac \equiv c^2 > 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{c} = \frac{dt}{dx}$$

\Rightarrow HYPERBOLICKÁ PDR 2. řád

FDM:

$$\delta_{tt} u_h^{\Delta t} = c^2 \delta_{xx} u_h^{\Delta t}$$

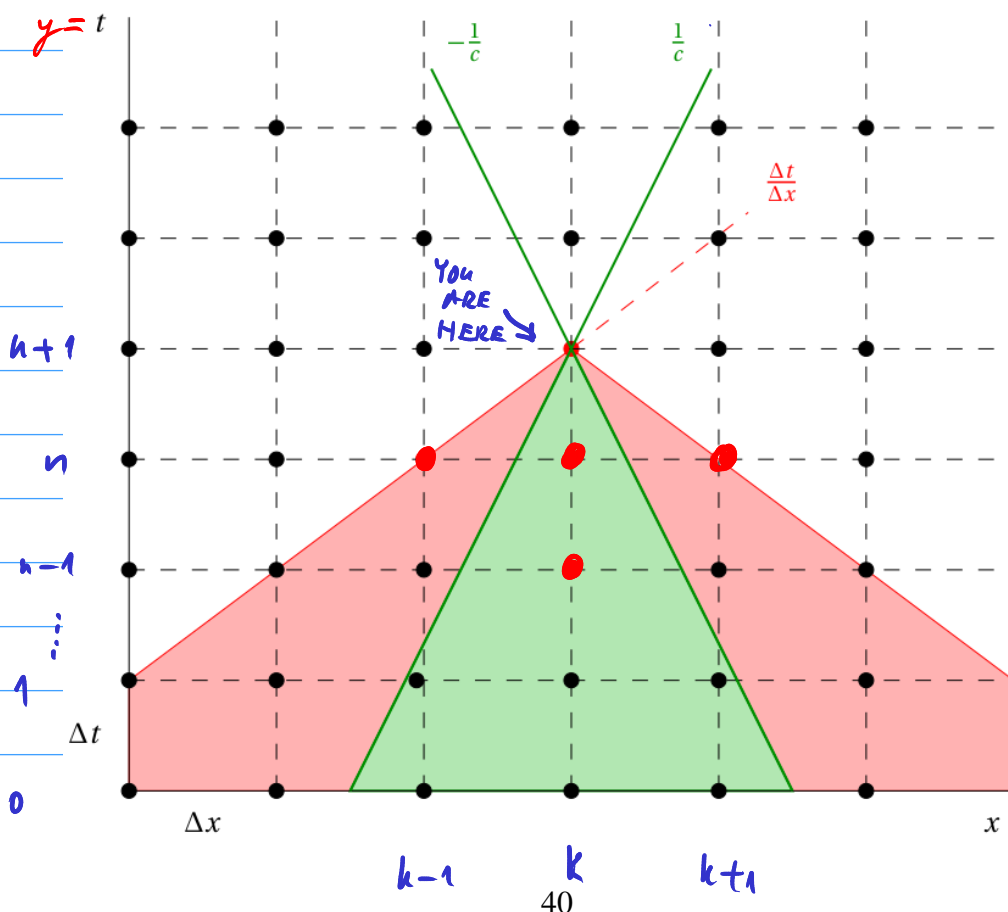
$$\frac{u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}$$

CFL :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c}$$

nutná
podmínka
konvergence

Dů:
von Neumannova
analýza



Poč. podm.: $u|_{t=0} = u_0$ $\partial_t u|_{t=0} = v_0$ + DĽRAN. PODM.
 poč. poloha poč. rýchlosť $u(a) = u(b) = 0$
 (pevné konce)

DISKRETIZACE ↓

$$u_h^{At} \Big|_{t=0} = \left(P_h^{At} u \right) \Big|_{t=0}$$

$$u_k^0 = u(0, x_k) = u_0(x_k)$$

$$\vec{\partial}_t u_h^{At} \Big|_{t=0} = P_h^{At} \partial_t u \Big|_{t=0}$$

$$\frac{u_k^1 - u_k^0}{\Delta t} = \partial_t u(0, x_k) = v_0(x_k)$$

⇒ dopítať

$$u_k^1 = u_k^0 + \Delta t v_0(x_k)$$

LAXOVO-WENDROFFOVO SCHEMA PRO TRANSPORTNÉ ROVNICE

rozvoj $u(t+\Delta t, x) = u(t, x) + \Delta t \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \partial_{tt} u(t, x) + O(\Delta t^3)$

rovnice $\partial_t u + a \partial_x u = 0 \Rightarrow \partial_t u = -a \partial_x u$

$$\Rightarrow \partial_{tt} u = \partial_t \partial_t u = \partial_t (-a \partial_x u) =$$

$$= -a \partial_x \partial_t u = -a \partial_x (-a \partial_x u) = a^2 \partial_{xx} u$$

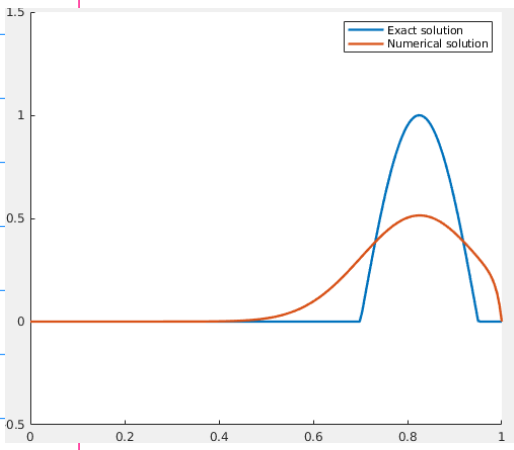
$$\Rightarrow u(t+\Delta t, x) = u(t, x) - a \Delta t \partial_x u(t, x) + \frac{1}{2} a^2 \Delta t^2 \partial_{xx} u(t, x) + O(\Delta t^3)$$

$$\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = -a \partial_x u(t, x) + \frac{1}{2} a^2 \Delta t \partial_{xx} u(t, x) + O(\Delta t^2)$$

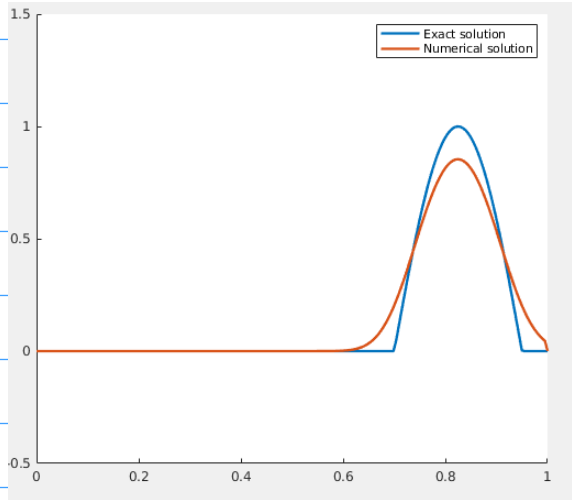
2. řád v prostoru

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u_h^{At} \right|_{(t^n, x_k)} = -a \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial x}} u_h^{At} + \frac{1}{2} a^2 \Delta t \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} u_h^{At} \Big|_{(t^n, x_k)}$$

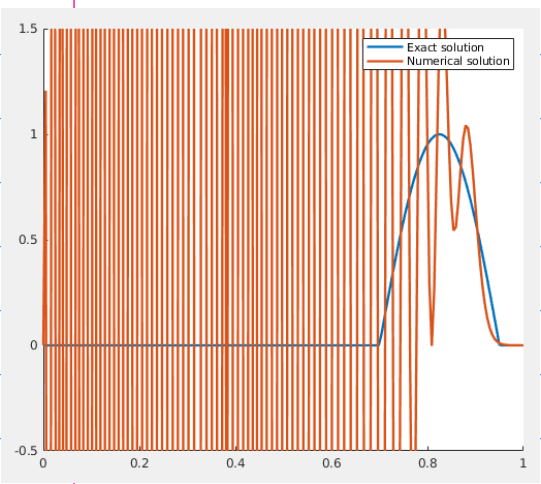
$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{a^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n)$$



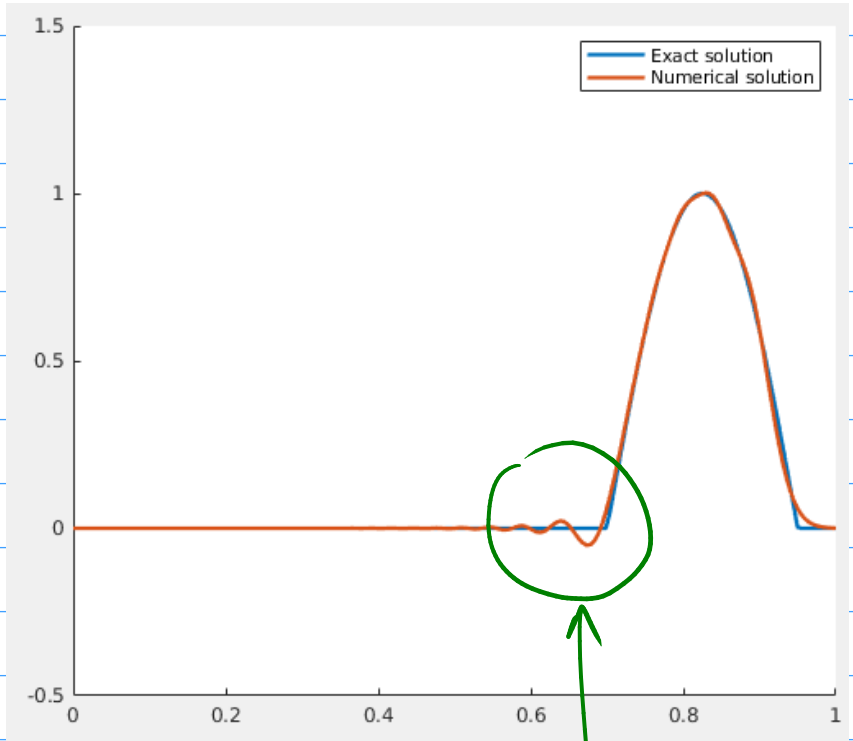
LF ... silně num. difuze



upwind



explicitní centrální (vždy nestabilní)



LW

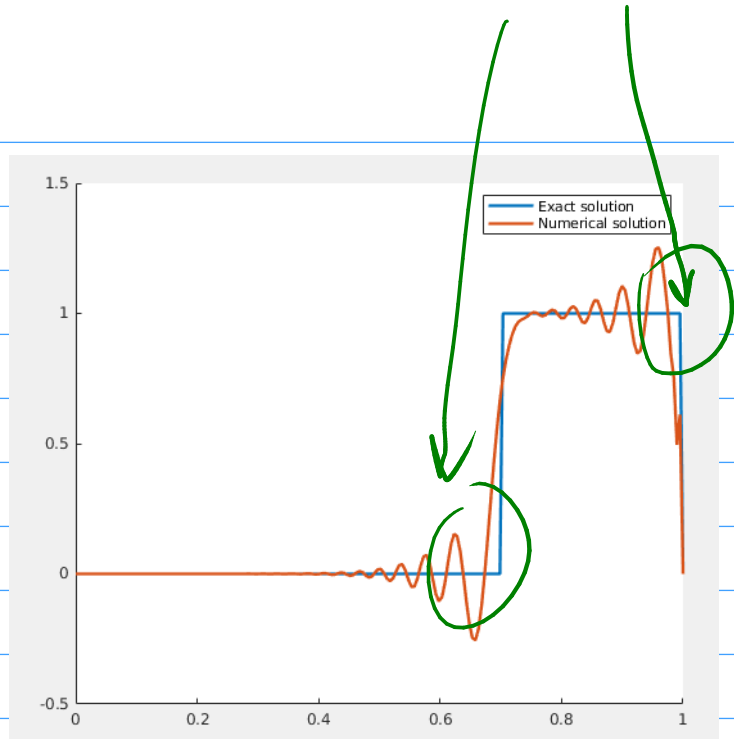
OSCILACE NA NESPOJITOSTECH

• modifikované rovnice
(viz LF)

obracuje DISPERSIÍ
ČLEN

$$c \cdot \partial_{xxx} u$$

=> důvod oscilací



ŘEŠENÍ (obecně pro schemata vyššího řádu)

SLOPE LIMITER

$$L_x u_h^{\Delta t} = \underbrace{\phi(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t})}_{\approx 1 \text{ pro malé hodnoty derivací } u} \underbrace{L_x^{(H)} u_h^{\Delta t}}_{\text{dif. op. v prost. s. s vysokým řádem}} + \underbrace{(1 - \phi(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t}))}_{\text{opačné chování}} \underbrace{L_x^{(L)} u_h^{\Delta t}}_{\text{dif. op. v prost. s. s řádem aproximace 1}}$$

$L_x u_h^{\Delta t}$: diferenciální operátor v prostoru u souč.
 $\phi(\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t})$: $\alpha \rightarrow 0$ pro $\overleftrightarrow{\delta}_x u_h^{\Delta t} \rightarrow +\infty$
 $L_x^{(H)} u_h^{\Delta t}$: dif. op. v prost. s. s vysokým řádem
 $L_x^{(L)} u_h^{\Delta t}$: dif. op. v prost. s. s řádem aproximace 1

Pozn : LW schéma pro nelineární úlohu $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$

$$\text{ozn: } f_k^n := f(u_k^n)$$

$$f'(u) \partial_x u$$

$$\Rightarrow u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{k+1}^n - f_{k-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (f_{k+1}^n - 2f_k^n + f_{k-1}^n)$$

Pozn : LW schéma lze vyčíslit ve 2 krocích

1) PREDIKTOR

2) KOREKTOR

9.7.2.1 Richtmyerova varianta LW schématu

Uvedeme tvar v nelineárním případě. Prediktor je LF schéma pro časový krok $\Delta t/2$ a prostorový krok $\Delta x/2$:

$$u_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{k+1}^n + u_k^n) - \frac{\omega \Delta t}{2\Delta x} (f_{k+1}^n - f_k^n).$$

$u_k^{n+1} - u_k^n \leftarrow$ v lin. případě

Korektor je centrální schéma

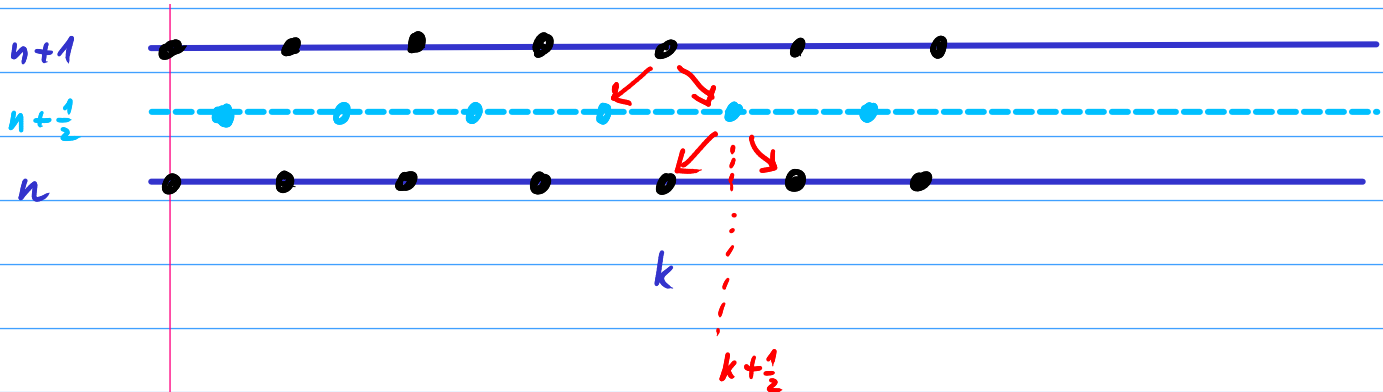
$$u_k^{n+1} = u_k^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).$$

Lze použít také variantu bez půlení prostorového kroku. Prediktor je potom

$$u_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (f_{k+1}^n - f_{k-1}^n)$$

a korektor

$$u_k^{n+1} = u_k^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).$$



9.7.2.2 McCormackova varianta LW schématu

Prediktor je jednoduché schéma s prostorovou diskretizací dopřednou diferencí

$$u_k^{n+\frac{1}{2}} = u_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{k+1}^n - f_k^n)$$

$\vec{\partial}_t^{1/2}$
 $\vec{\partial}_t^{1/2} u + \vec{\partial}_x f(u_n^{At}) = 0$

a korektor provádí prostorovou diskretizací zpětnou diferencí. Má tvar

$$u_k^{n+1} = \frac{1}{2} (u_k^n + u_k^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).$$

$\vec{\partial}_x f(u_n^{At})$

pozn : FDM (Lax-Friedrichs) ve 2D pro Eulerovy rovnice

$$\partial_t \vec{W} + \partial_x \vec{F} + \partial_y \vec{G} = \vec{0}$$

vektor nezvaných (konzervativních veličin) $\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{W}_{k,l}^{n+1} = \frac{1}{4} \left(\vec{W}_{k-1,l}^n + \vec{W}_{k+1,l}^n + \vec{W}_{k,l-1}^n + \vec{W}_{k,l+1}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x_1} \left(\vec{F}_{k+1,l}^n - \vec{F}_{k-1,l}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x_2} \left(\vec{G}_{k,l+1}^n - \vec{G}_{k,l-1}^n \right)$$

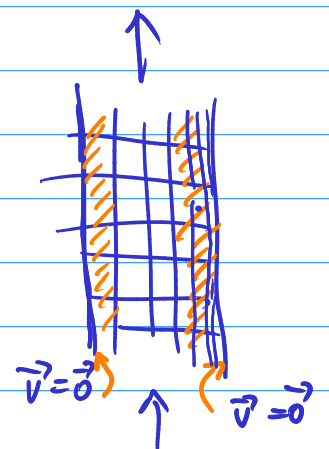
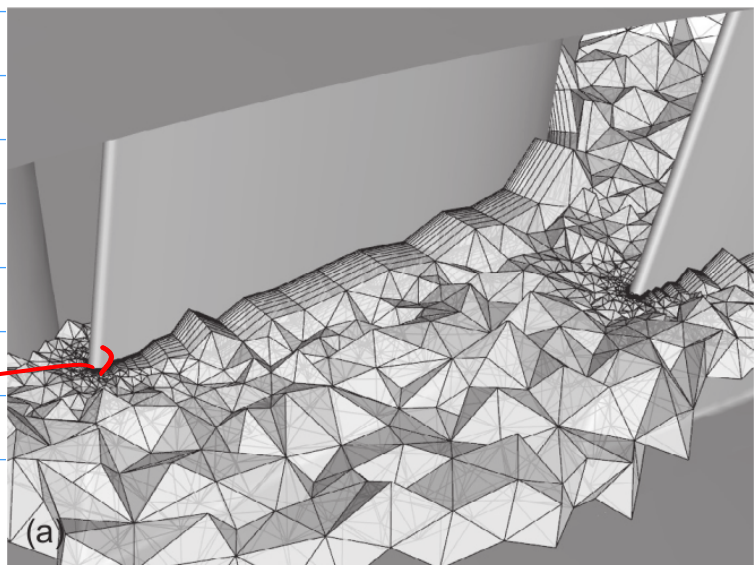
NESTRUKTOUROVANÉ SÍŤE PRO METODU KONEČNÝCH OBJEMŮ

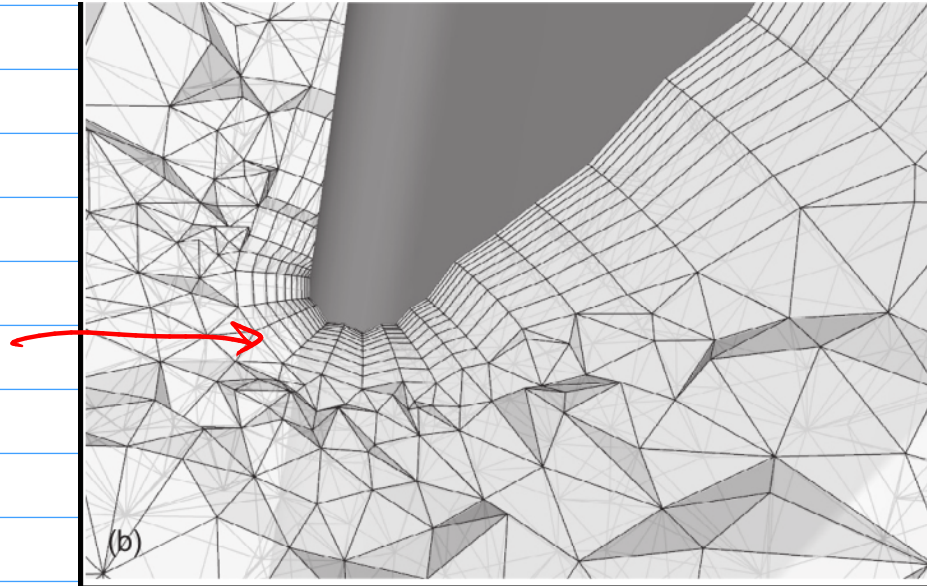
vypočítací oblast Ω rozdělíme ve 2D na polygonální
a ve 3D na polyhedrální buňky

MKO (angl. FVM - finite volume method) aproximuje
integrály nezvaných veličin přes buňky sítě

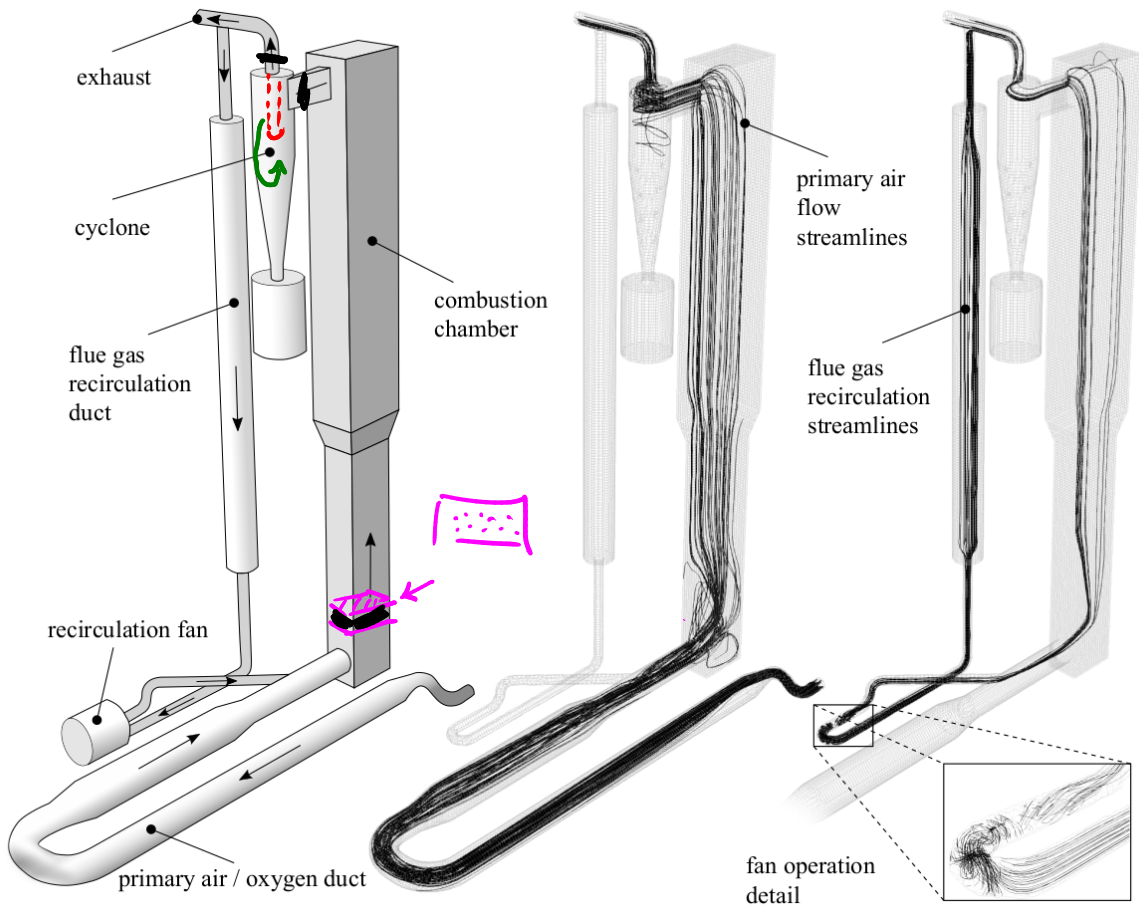
(Pr)

zjemnění
sítě
u hranice

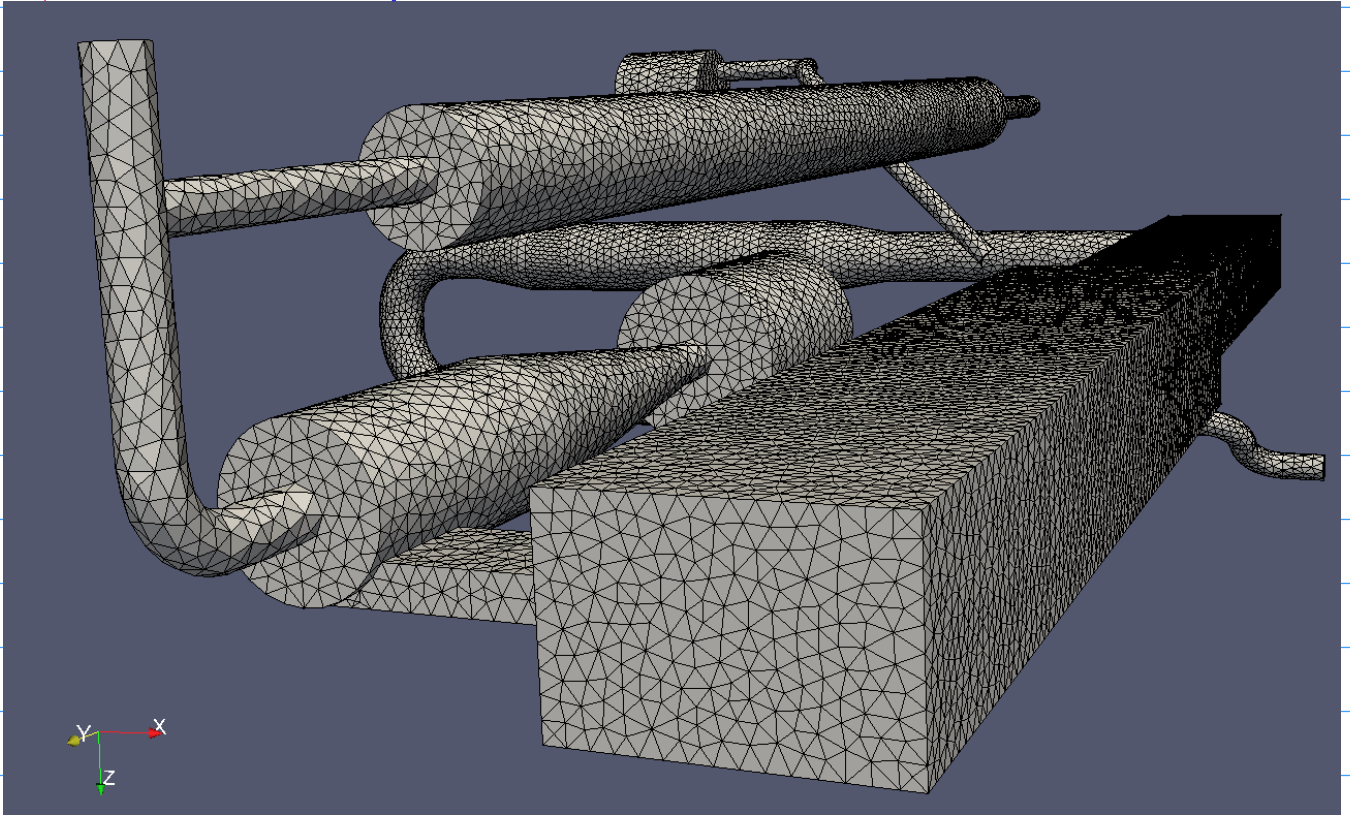




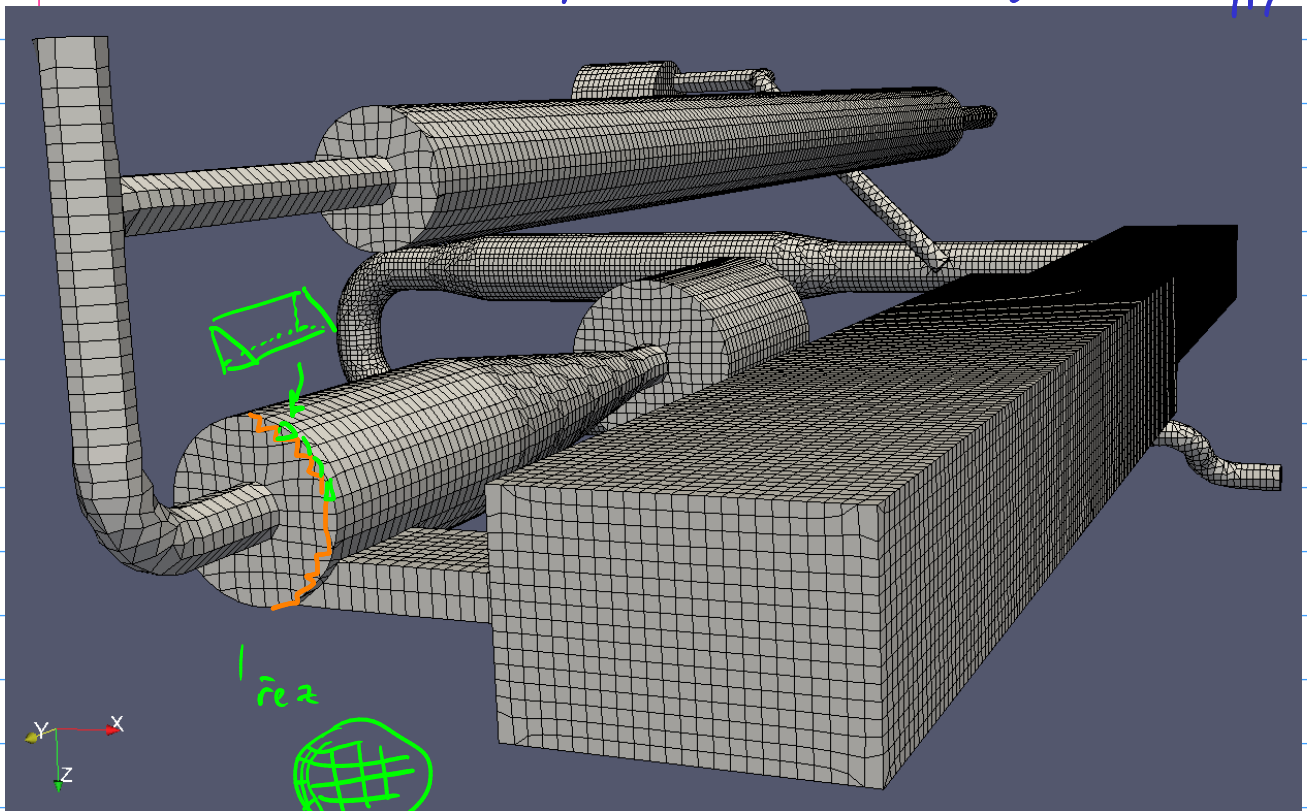
Př - fluidní kotel

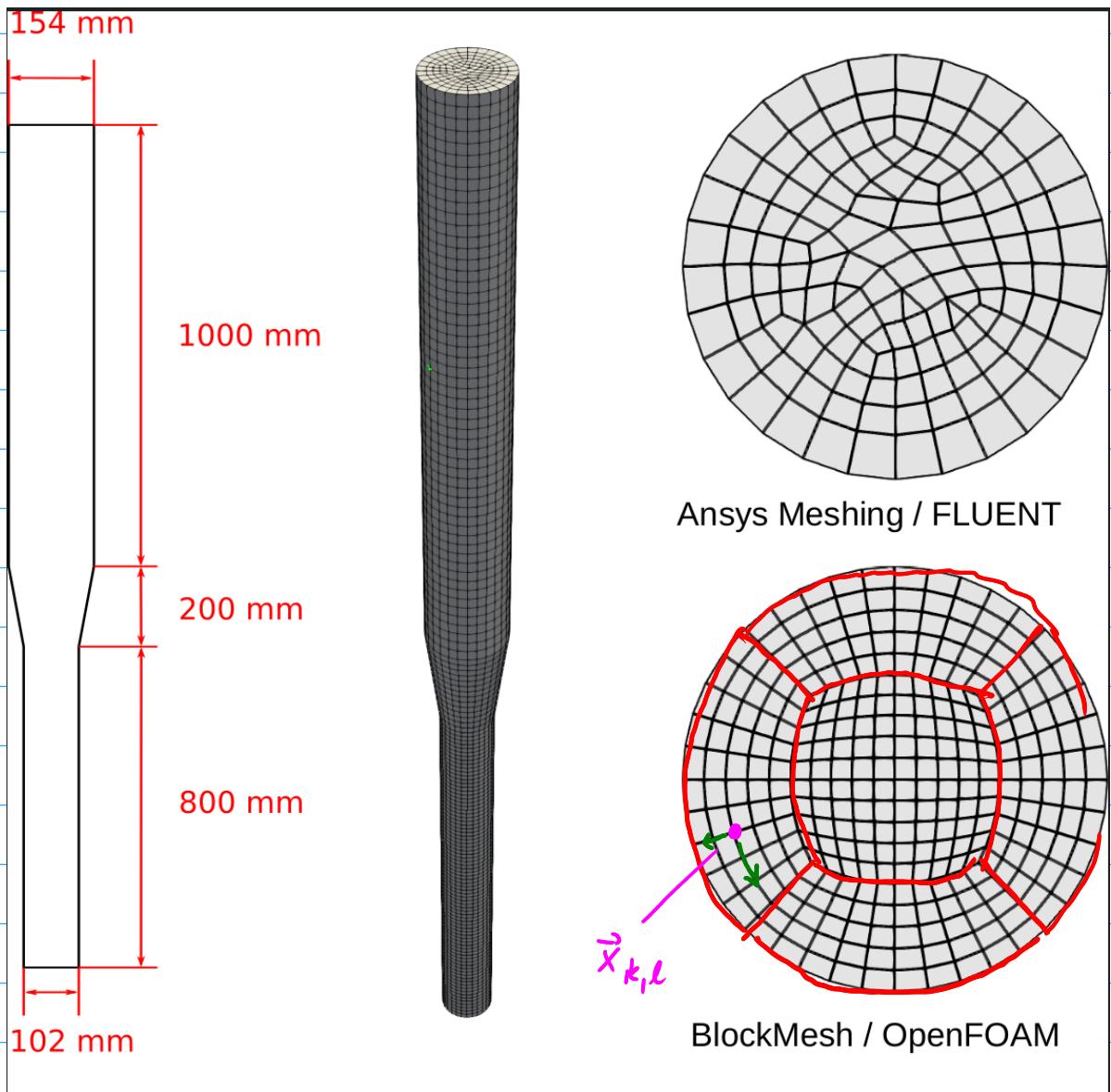


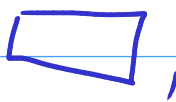
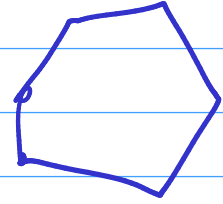
sít' ze čtyřstěnic (gmsh)



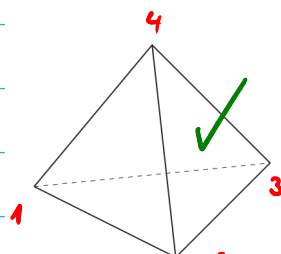
sít' ze šestistěnic se zjemněním u stěn (OpenFOAM BlockMesh + snappyHexMesh)



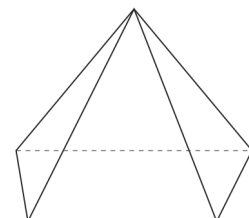


Typy buněk; ve 2D ... Δ , , 

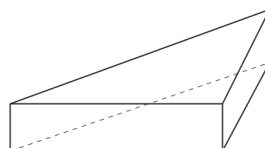
ve 3D



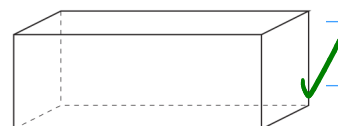
Tetrahedron



Pyramid

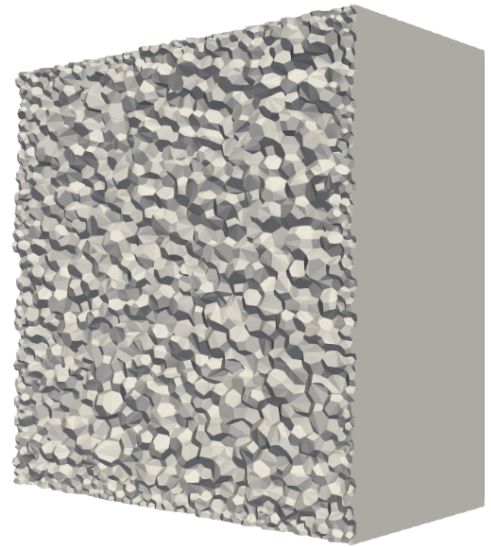
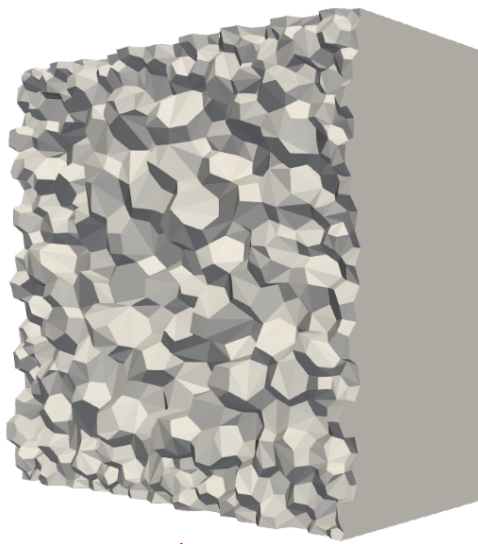


Prism

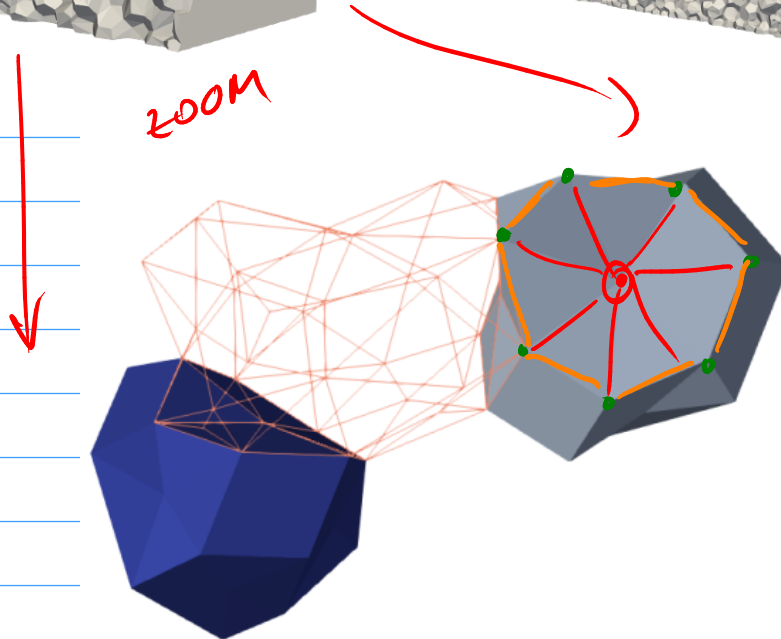


Hexahedron

sítě z obecných mnohostěnů



ZOOM



neplanární stěny!

GEOMETRIE A TOPOLOGIE NESTRUKTUROVANÝCH SÍTÍ

Eymard,
Gallouët

• \mathcal{T} ... síť ... množina buněk (konvexních objemů)

• $K \in \mathcal{T}$ K ... buňka $K \subset \mathbb{R}^r$ $r \in \{2, 3\}$

• $\partial K = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sigma$

σ ... stěny ve 3D, hrany ve 2D

\mathcal{E}_K ... množina stěn tvořících hranici K

$\setminus \text{mathcal} \{E\}$

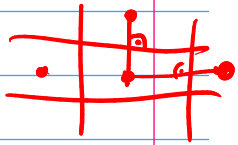
• $E \dots \bigcup_{K \in \mathcal{T}} E_K \dots$ množina vřed stěn síti

• $E = E_{\text{int}} \uplus E_{\text{ext}}$ kde $\bigcup_{\sigma \in E_{\text{ext}}} \sigma = \partial\Omega$

množina vnitřních stěn / množina hraničních stěn

$\sigma_1 = K|L = \partial K \cap \partial L \in E_K \cap E_L$

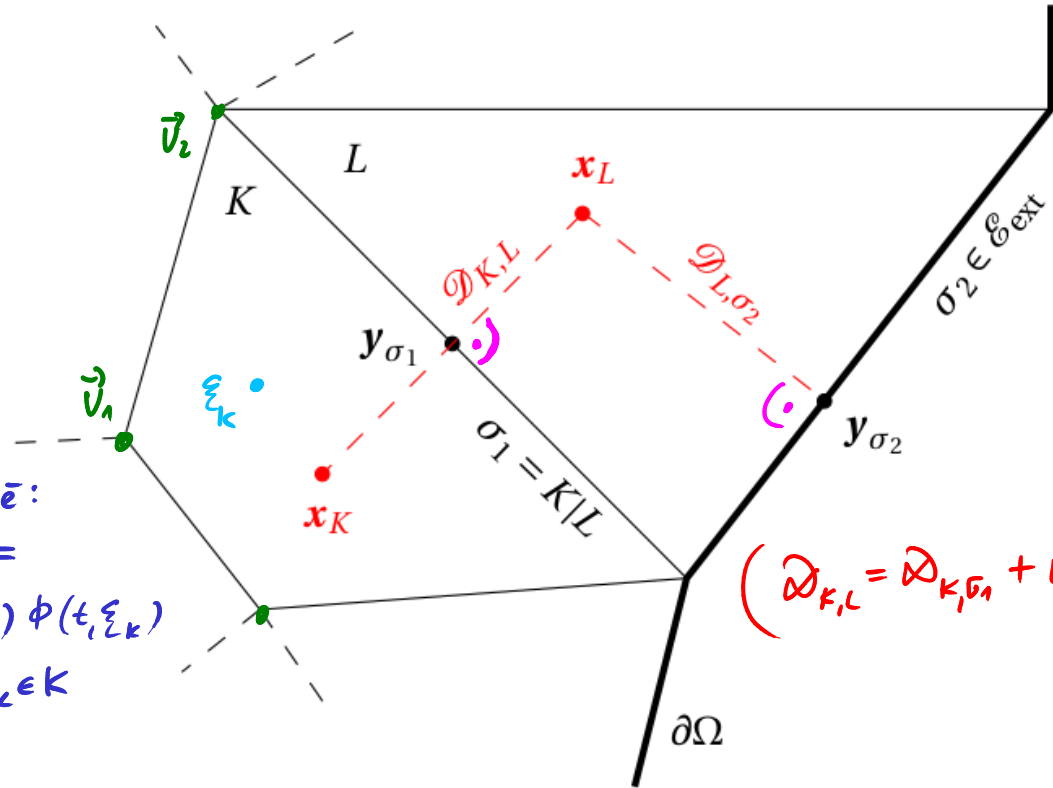
Pr. 2D



PRINCIP:

věta o střední hodnotě:

$\int_K \phi(t, \vec{x}) d\vec{x} = m(K) \phi(t, \xi_K)$
kde $\xi_K \in K$

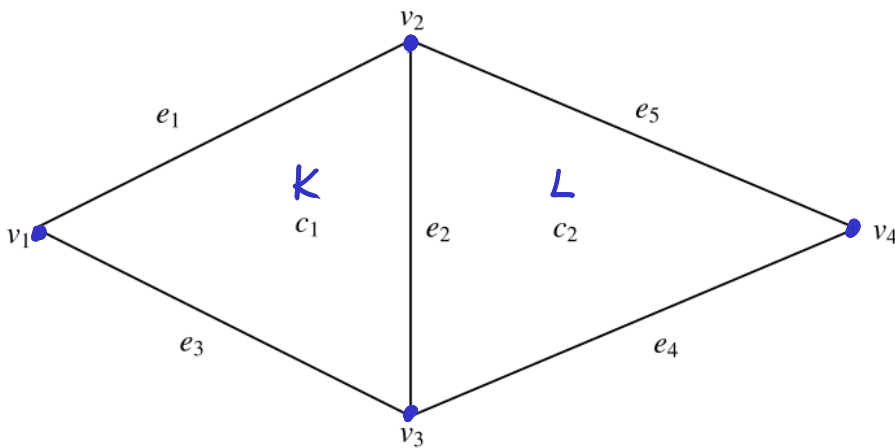


- "cell-centered" schéma ... v každé buňce K je def. "významný bod" \vec{x}_K (centroid) kde vyčísľujeme hodnoty neznámých f.
- "cell-vertex" schéma ... hodnoty vyčísľujeme ve vrcholech \vec{v}_i
- "staggered-grid" schéma ... kombinuje oba přístupy "střídavě"

- $D_{K,L}$... vzdálenost bodů \vec{x}_K, \vec{x}_L pro $K, L \in E_{int}$
- $D_{K,\sigma}$... vzdálenost \vec{x}_K a $\vec{y}_{K,\sigma}$... průmět \vec{x}_K na hranici stěny $\sigma \in E_{ext}$
- $\vec{x}_K \vec{x}_L \perp (K, L) \Rightarrow$ přípustná síť (admissible mesh)
- $P = \{ \vec{x}_K \mid K \in \mathcal{T} \}$
- množinu funkce $\mathcal{H}_\tau = \{ w : P \rightarrow \mathbb{R} \}$ nazýváme množinou síťových funkcí

TOPOLOGICKÁ INFORMACE O SÍTI ... GRAFOVÝ PŘÍSTUP

2D



$$\underbrace{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}_{\in \mathcal{T}^0} \cup \underbrace{\{e_1, \dots, e_5\}}_{\in \mathcal{T}^1} \cup \underbrace{\{c_1, c_2\}}_{\in \mathcal{T}^2} = \mathcal{T}^* \quad \text{všechny "entity" sítě}$$

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^0 \cup \mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}^2$$

dimenze entity

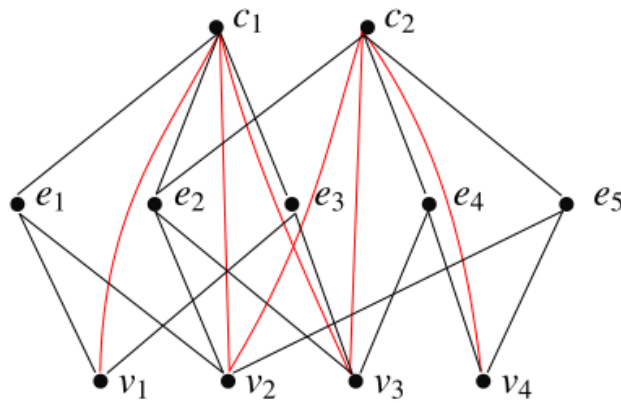
$e, f \in \mathcal{T}^*$ jsou "spojené" $\Leftrightarrow (e \subset \partial f \vee f \subset \partial e)$

tedy $E = \{ (e, f) \mid e, f \text{ jsou spojené, } e, f \in \mathcal{T}^* \}$
 množina hran (teorie grafů) grafu (V, E) kde $V = \mathcal{T}^*$

spojení entit

$$A = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\Leftrightarrow) (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{--- } \in \mathcal{T}^*$$



A lze rozdělit na bloky podle dimenze

$$A^{d_1, d_2} = (a_{ij}^{d_1, d_2})$$

$$a_{ij}^{d_1, d_2} = \begin{cases} 1 & (\Leftrightarrow) (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

kde $v_i \in \mathcal{T}^{d_1}, v_j \in \mathcal{T}^{d_2}$

$$A_{G_{\mathcal{T}^*}} =$$

| | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5 | c_1 | c_2 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| v_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| v_2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| v_3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| v_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| e_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| e_2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| e_3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| e_4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| e_5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| c_1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| c_2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$$A_{G_{\mathcal{T}^*}} =$$

| | \mathcal{T}^0 | \mathcal{T}^1 | \mathcal{T}^2 |
|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| \mathcal{T}^0 | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{0,0}$ | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{0,1}$ | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{0,2}$ |
| \mathcal{T}^1 | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{1,0}$ | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{1,1}$ | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{1,2}$ |
| \mathcal{T}^2 | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{2,0}$ | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{2,1}$ | $A_{G_{\mathcal{T}^*}}^{2,2}$ |

"Rekonstrukce" A pomocí A^{d_i, d_j} :

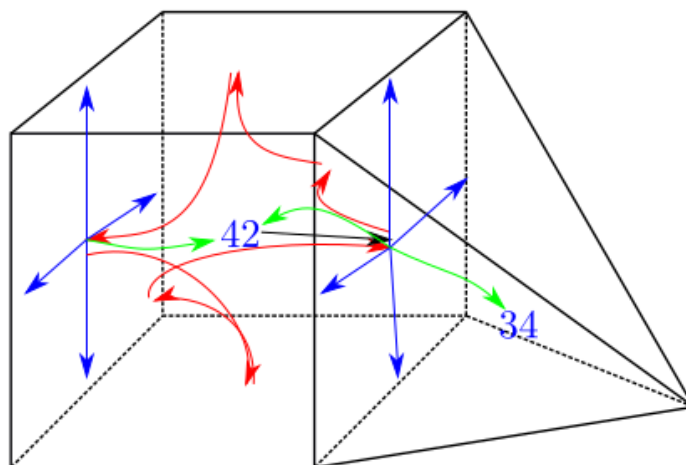
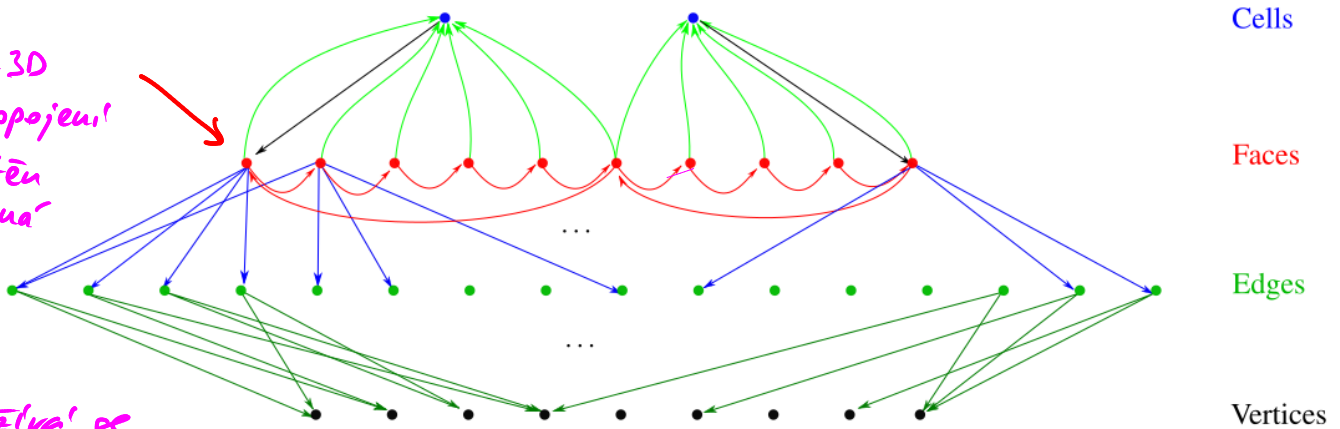
$$[\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_1, d_2}]_{ij} = \text{connect}(\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_1, d_3}, \mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_3, d_2})$$

$$d_1 < d_3 < d_2$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } (\exists k \in \{1, 2, \dots, N_{\mathcal{T}^*}^{d_3}\}) \left([\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_1, d_3}]_{ik} [\mathbb{A}_{G_{\mathcal{T}^*}}^{d_3, d_2}]_{kj} = 1 \right), \\ 0 & \text{else,} \end{cases}$$

TOPOLOGICKÁ INFORMACE VE 3D

! ve 3D
 • propojení stěn
 nemá smysl
 jako ve 2D,
 ale používá se
 k iteraci přes stěny
 (v lib. pořadí)

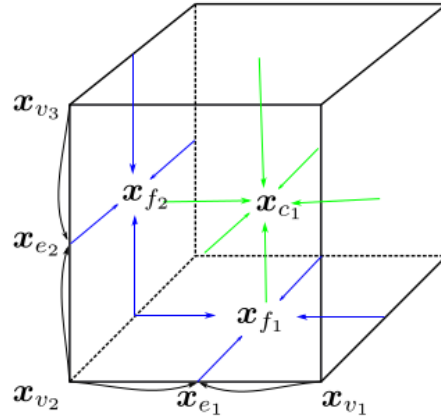


VÝPOČET GEOMETRICKÉ INFORMACE O SÍTI

- pozice bodů \vec{x}_k (centroidů)

a) - hierarchicky
od dimenze 0
po dimenzi $r \in \{2, 3\}$

nebo



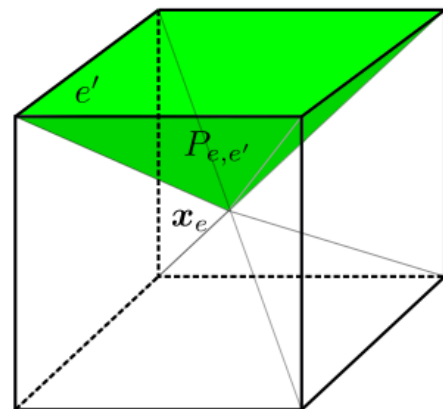
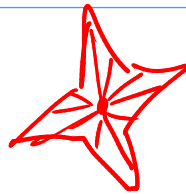
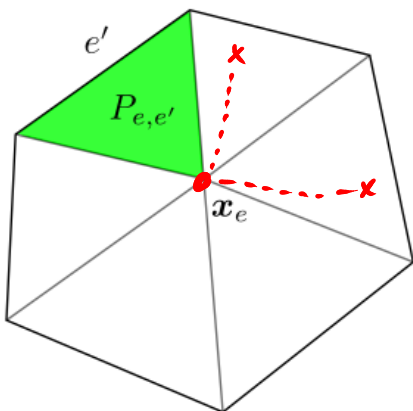
b) - těžiště vrcholů spojených s entitou (buněk)

(a) ani (b) obecně nemají splnit předpoklad ortogonalitu

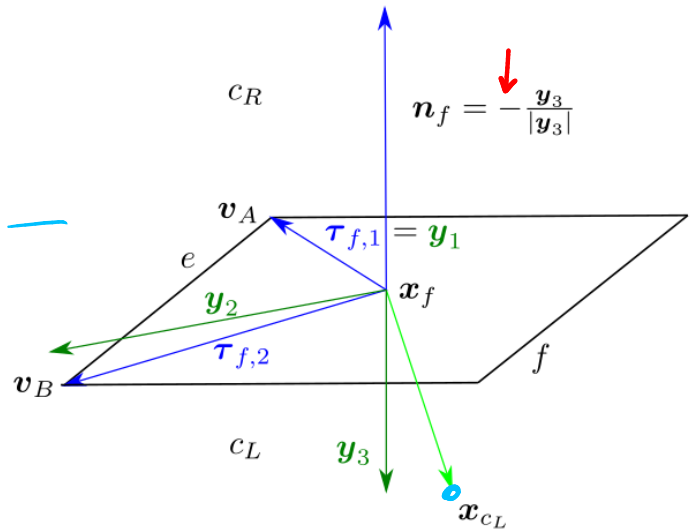
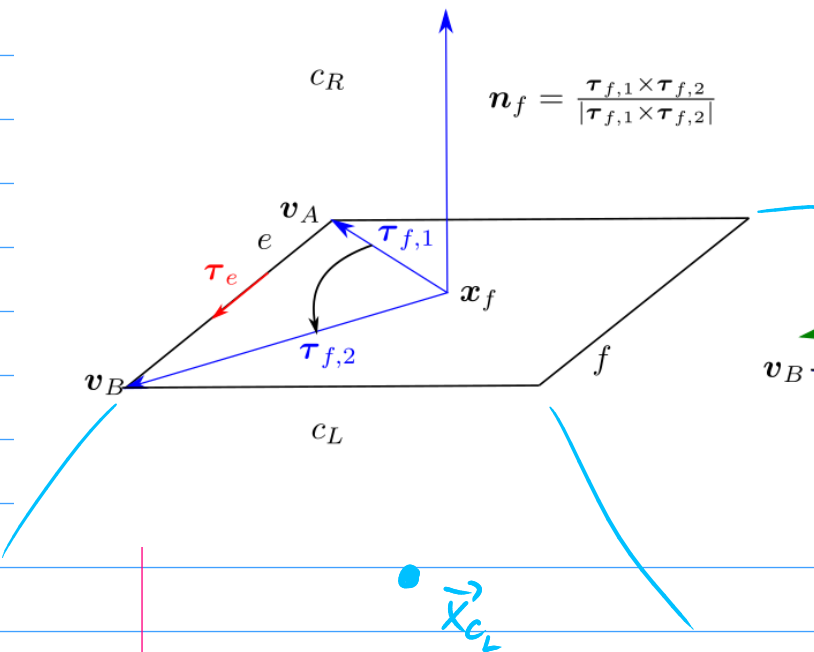
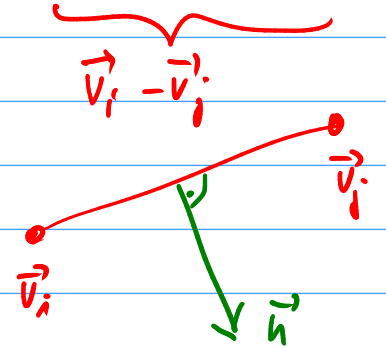
-
- "velikost" (Lebesgueova d-rozměrná míra) d-rozměrných entit

- předpokládáme tzv. hvězdicovitost entit vzhledem k

jejich centroidům

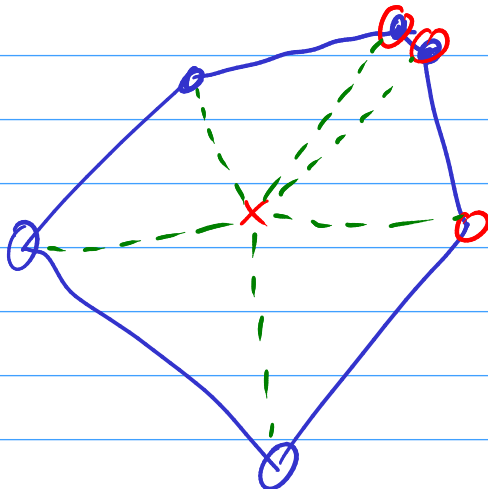


- výpočet normál ke stěněm ve 3D, resp. hraněm ve 2D



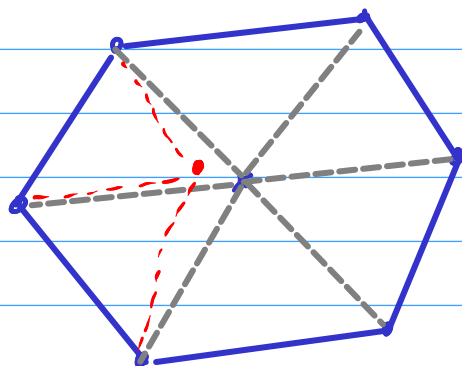
nejedná o jistý orientaci \vec{n}_f

G-S ortogonalizace proces
 \Rightarrow normální vektor souřadnice
 ve 2D buňky C_L



Pozor k robustnosti výpočtu

NEPLANA'RNI' STENY



METODA KONEČNÝCH OBJEMŮ PRO NS ROVNICE

ve 2D: $\partial_t \vec{W} + \underbrace{\partial_1 \vec{F} + \partial_2 \vec{G}}_{\text{nerazke' fyz. toky}} = \underbrace{\partial_1 \vec{R} + \partial_2 \vec{S}}_{\text{vazke' toky}}$

nerazke'
fyz. toky

vazke' toky

\vec{R}, \vec{S} obsahují derivace
podle x_1, x_2

MKO: zintegrujeme NS rovnice přes $K \in \mathcal{T}$

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{x} + \underbrace{\int_K \partial_1 \vec{F} + \partial_2 \vec{G} d\vec{x}}_{\text{použijeme Greenovu formuli}} = \underbrace{\int_K \partial_1 \vec{R} + \partial_2 \vec{S} d\vec{x}}_{\text{použijeme Greenovu formuli}}$$

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{x} + \int_{\partial K} \vec{F} n_1 + \vec{G} n_2 dS = \int_{\partial K} \vec{R} n_1 + \vec{S} n_2 dS$$

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{x} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{G} n_{2,\sigma} dS = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \vec{R} n_{1,\sigma} + \vec{S} n_{2,\sigma} dS$$

↓ předved k síťové funkci

fyzikální toky $\vec{F} \dots \vec{F}_\sigma \dots$ numerické toky

$\vec{W} \dots \vec{W}_K(t) := \vec{W}_K(t, \vec{x}_K)$

cell-centered
scheme

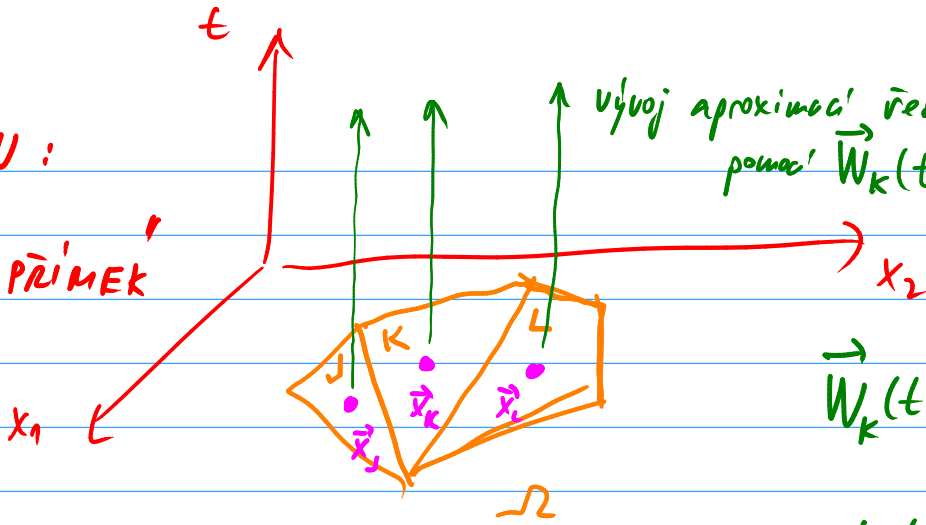
hodnota
v centroidu \vec{x}_K

síťová funkce

POZN :

METODA PŘÍMEK

(method of lines)



vývoj aproximací řešení $\vec{W}(t, \vec{x}_k)$
pomocí $\vec{W}_k(t)$

$\vec{W}_k(t)$ je vektor

neznámých funkcí jedné proměnné (t)

\Rightarrow jde o soustavu ODR

\Rightarrow volnost ve volbě časové integrace systému ODR
(Euler expl. / impl., Runge-Kuttovy metody atd.)

$$\frac{d}{dt} \int_K \vec{W} d\vec{r} + \sum_{\sigma \in \Sigma_K} \int_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{G} \cdot \vec{n}_{2,\sigma} dS = \sum_{\sigma \in \Sigma_K} \int_{\sigma} \vec{R} \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{S} \cdot \vec{n}_{2,\sigma} dS$$

$$\frac{d}{dt} m(K) \vec{W}(t, \vec{\xi}_K) + \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) [\vec{F}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{G}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) \cdot \vec{n}_{2,\sigma}] =$$

délka hrany σ (ve 3D by to byla plocha stěny σ)

$$\vec{\xi}_K \in K \quad \vec{\xi}_{\sigma} \in \sigma \quad = \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) [\vec{R}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{S}(t, \vec{\xi}_{\sigma}) \cdot \vec{n}_{2,\sigma}]$$

\downarrow náhrada síťovou formou

$$\frac{d}{dt} m(K) \vec{W}_K(t) + \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) (\vec{F}_{K,\sigma}(t) \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{G}_{K,\sigma}(t) \cdot \vec{n}_{2,\sigma}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_K} m(\sigma) (\vec{R}_{K,\sigma}(t) \cdot \vec{n}_{1,\sigma} + \vec{S}_{K,\sigma}(t) \cdot \vec{n}_{2,\sigma})$$



$$\vec{n}_{K,\sigma} = -\vec{n}_{L,\sigma}$$

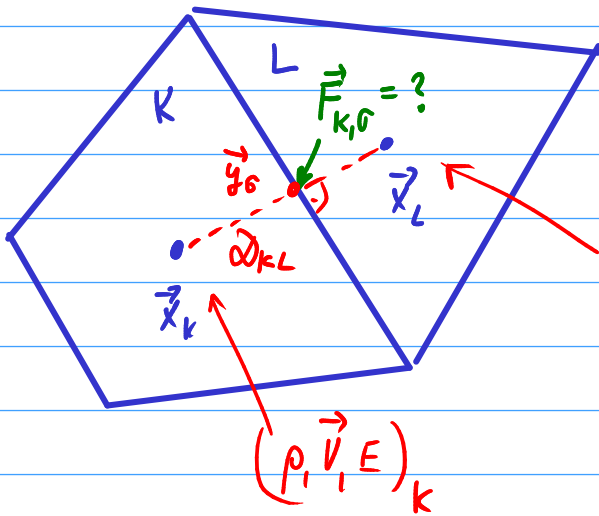
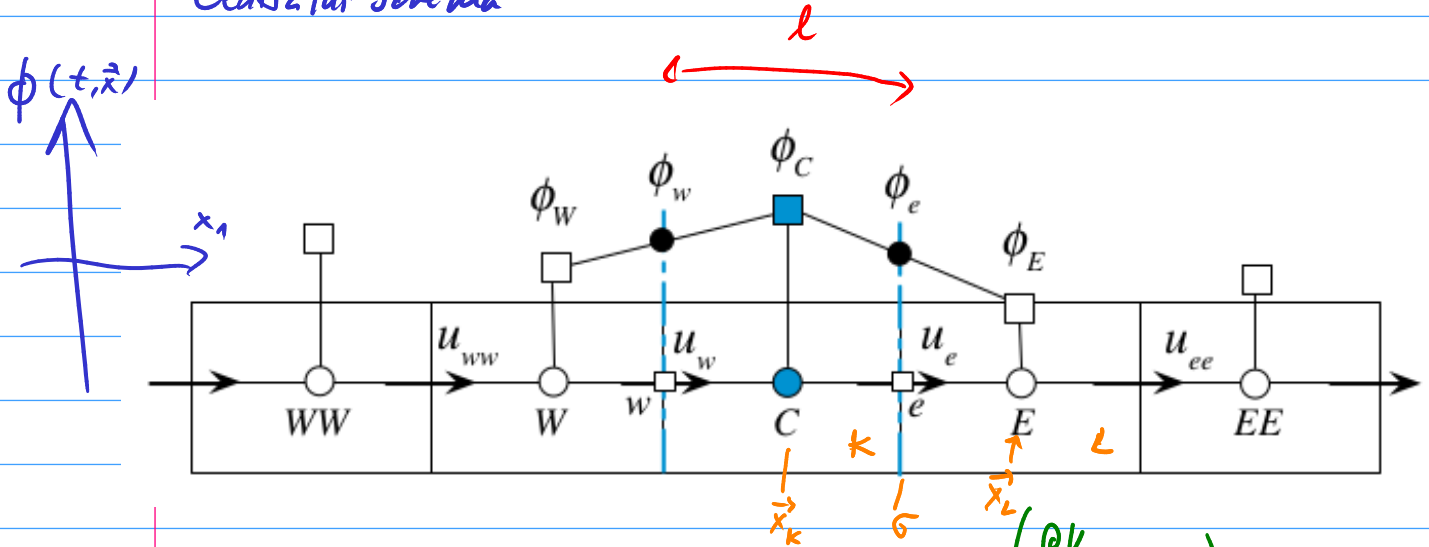
\Downarrow
PŘIROZENÉ
KONZERVATIVNÍ
SCHEMA

neplanární stěny
 $m(\sigma) \vec{F}_{K,\sigma}(t) \cdot \vec{n}_{1,\sigma} = \sum_i m(\sigma_i) \vec{n}_{1,\sigma_i} \cdot \vec{F} \dots$

$$u_{1,\sigma} = \frac{\sum u(\sigma_i) n_{1,\sigma_i}}{u(\sigma)}$$

APPOXIMACE (NA'HRADY) NEVAZKY'CH (ADVEKČNÍ'CH) TOKU

Centrální schéma



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho V_1 \\ \rho V_1^2 + P \\ \rho V_1 V_2 \\ (\rho E + P) V_1 \end{pmatrix}$$

ϕ obecná skalární veličina

známe ϕ_K, ϕ_L
tj. veličiny v bodech $\vec{x}_K, \vec{x}_L (\dots)$

a chceme ϕ_G

centrální schéma: lin. interpolace ϕ mezi \vec{x}_K, \vec{x}_L

$$\phi_G = \phi_K + \frac{|\vec{y}_G - \vec{x}_K|}{\omega_{KL}} (\phi_L - \phi_K)$$

charakteristická vzdálenost

Pozn: Pécletovo číslo

$$Pe_\ell = \frac{\ell |\vec{v}|}{D}$$

difuzivita veličiny ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \Delta \phi$$

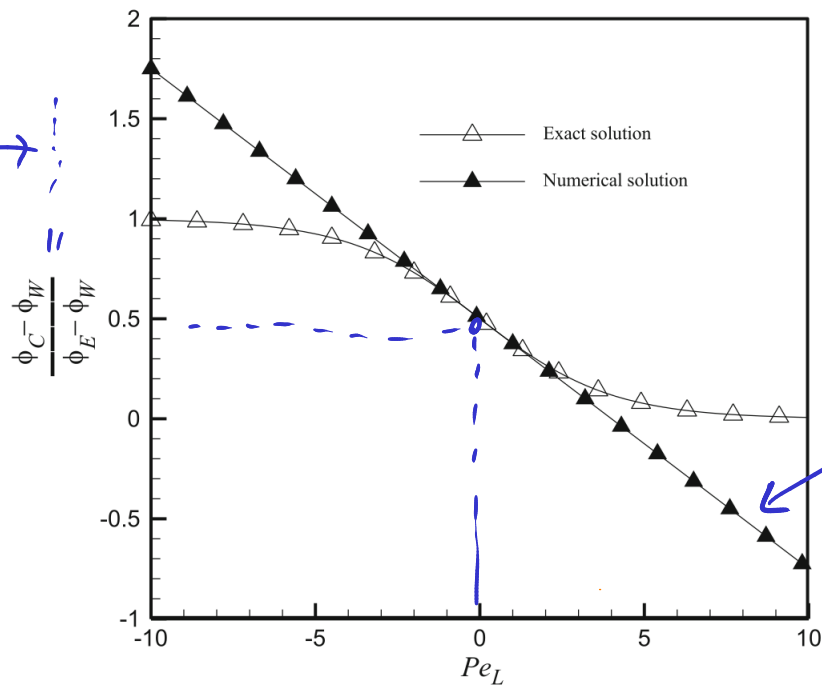
VZOROVÝ PŘÍKLAD - STACIONÁRNÍ ADVEKCE + DIFUZE

Pokud l je velikost buňky v (1D případ)

$$(lepe \ l = |\vec{x}_E - \vec{x}_W|)$$

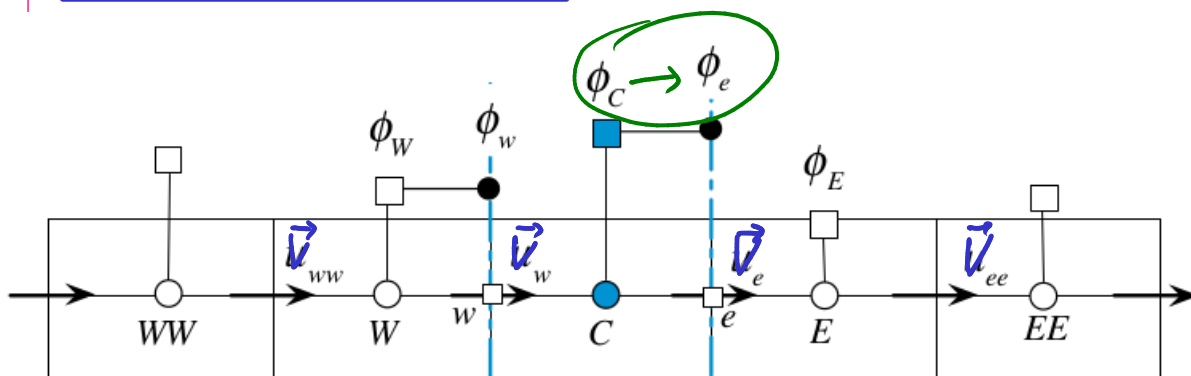
520

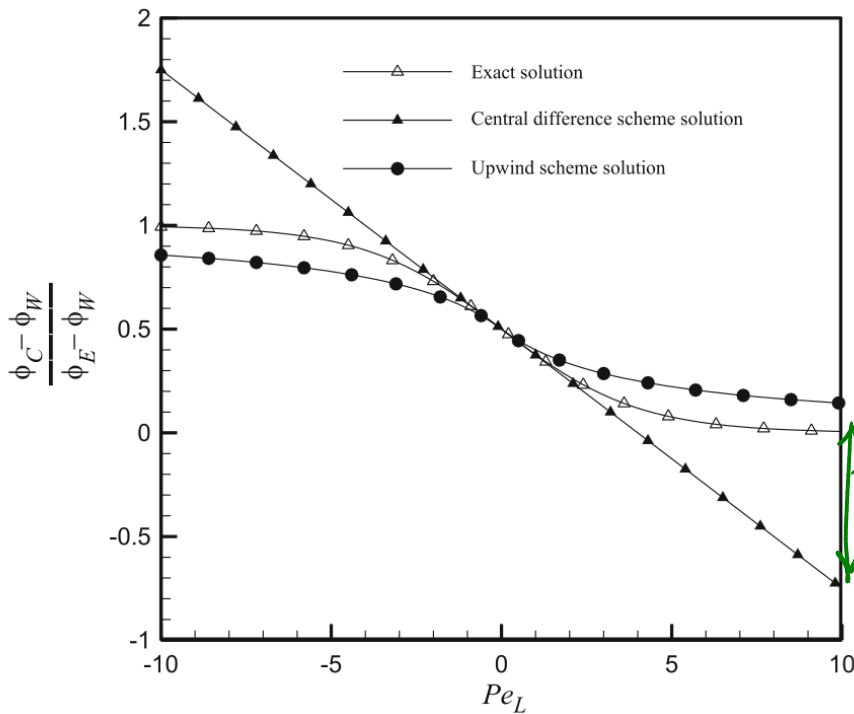
explicitní
vzorec
závislý
na Pe_L



hodnoty
dosazené
z num. řešení
pomocí
centrálního
schémata

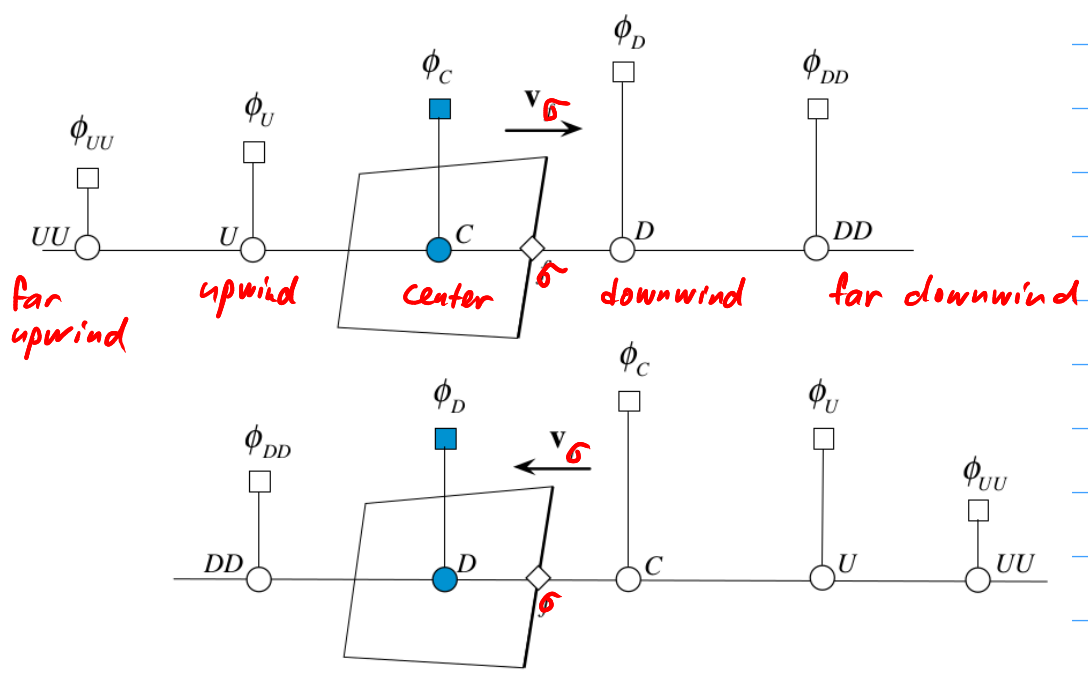
Upwind schéma 1. řádu





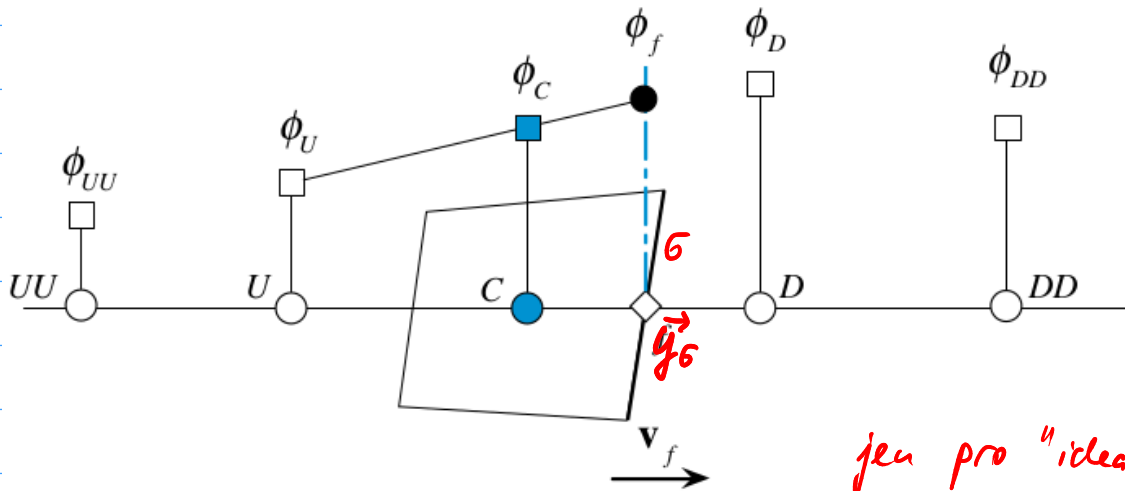
→
 chyba centrálního
 schématu
 roste
 větší ↓
 menší 0, resp. k
 >>>

Snaha o upwind diskretizaci vyššího řádu než 1 (ten. 2)



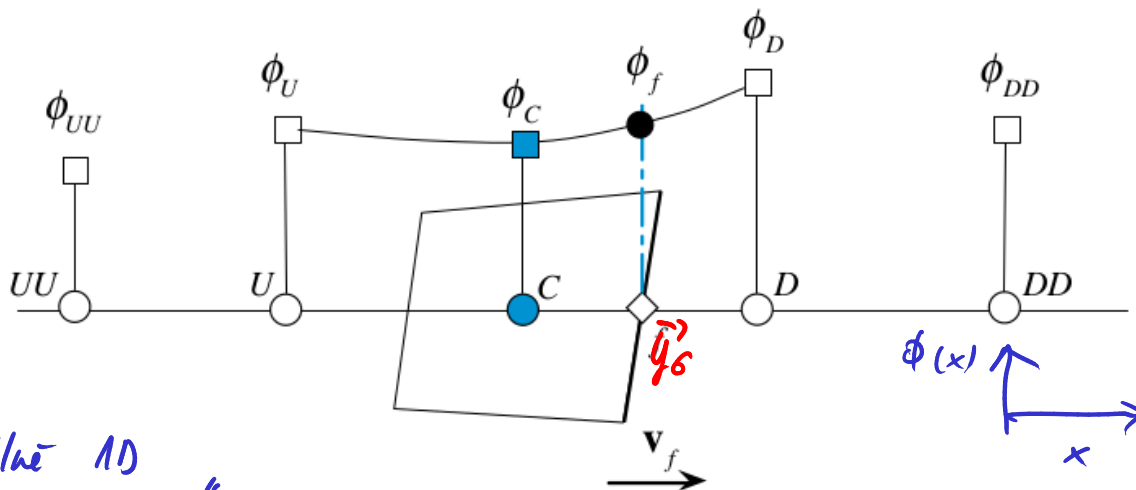
V praxi : vezmeme lin. interpolaci \vec{v}_k, \vec{v}_l ,
 ziskáme aproximaci \vec{v}_σ (na hraně, resp. středě)
 Směr upwindu určuje znaménko $\vec{v}_\sigma \cdot \vec{n}_\sigma$

SOU schéma (Second Order Upwind)



jen pro "ideální" případ, kdy (U, C, f) tj. $(\vec{x}_U, \vec{x}_C, \vec{y}_0)$ jsou na přímce

QUICK schéma (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)



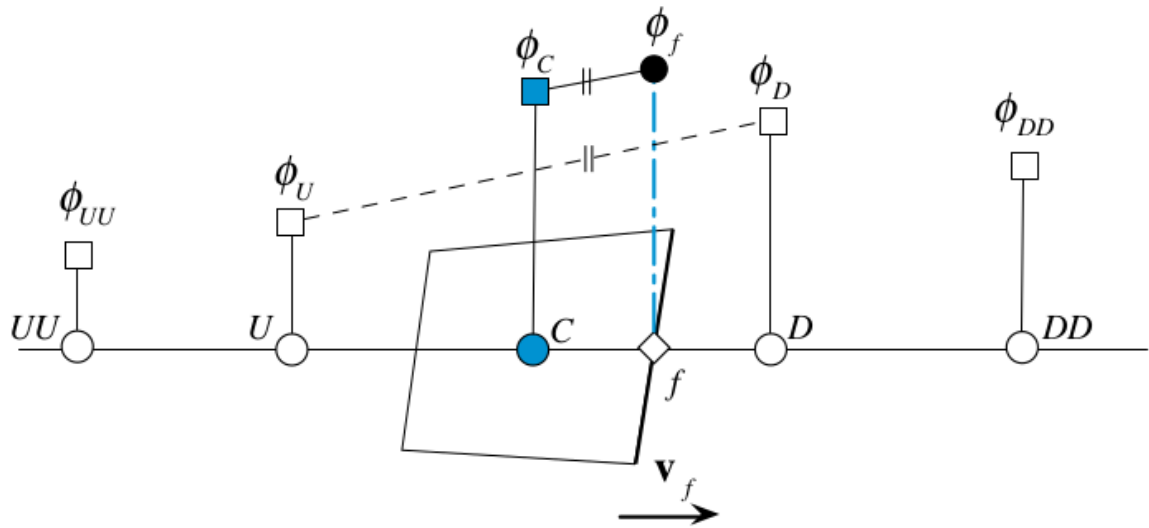
"lokálně 1D proudění"

$$\phi = k_0 + k_1x + k_2x^2,$$

interpolace kvadratickou funkcí

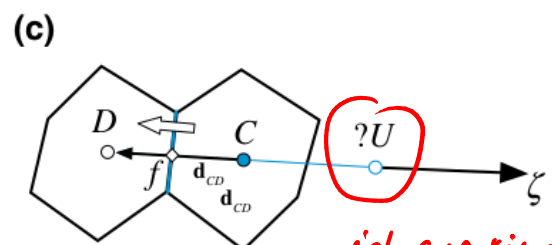
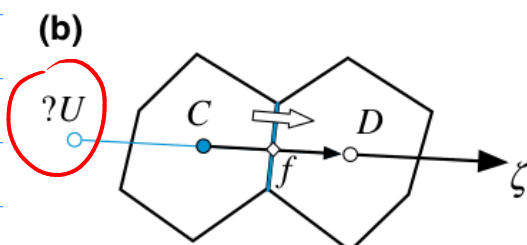
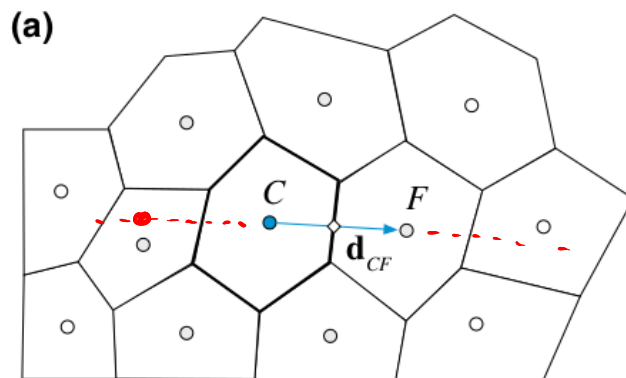
$$\text{kde } \phi(\vec{x}) = \begin{cases} \phi_U & \text{pro } \vec{x} = \vec{x}_U \\ \phi_C & \text{pro } \vec{x} = \vec{x}_C \\ \phi_D & \text{pro } \vec{x} = \vec{x}_D \end{cases}$$

FROMM schéma



$$\phi(x) = \phi_U + \frac{\phi_D - \phi_U}{x_D - x_U} (x - x_U)$$

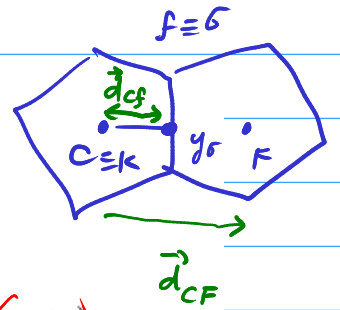
? jak na upwind na nerovnomernych sitich
v 2D, 3D



jak aproximovat
\$\phi\$ ve virtualnim uzlu \$U\$?

řešení: aproximace gradientu ϕ na stěně ($\nabla\phi_f$), resp. v uzlu \vec{x}_c ($\nabla\phi_c$)

$$\|\vec{d}_{cf}\| = \mathcal{D}_{cf}$$



Upwind scheme :

$$\phi_f = \phi_c$$

Central difference :

$$\phi_f = \phi_c + \nabla\phi_f \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

SOU scheme :

$$\phi_f = \phi_c + (2\nabla\phi_c - \nabla\phi_f) \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

FROMM scheme :

$$\phi_f = \phi_c + \nabla\phi_c \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

QUICK scheme :

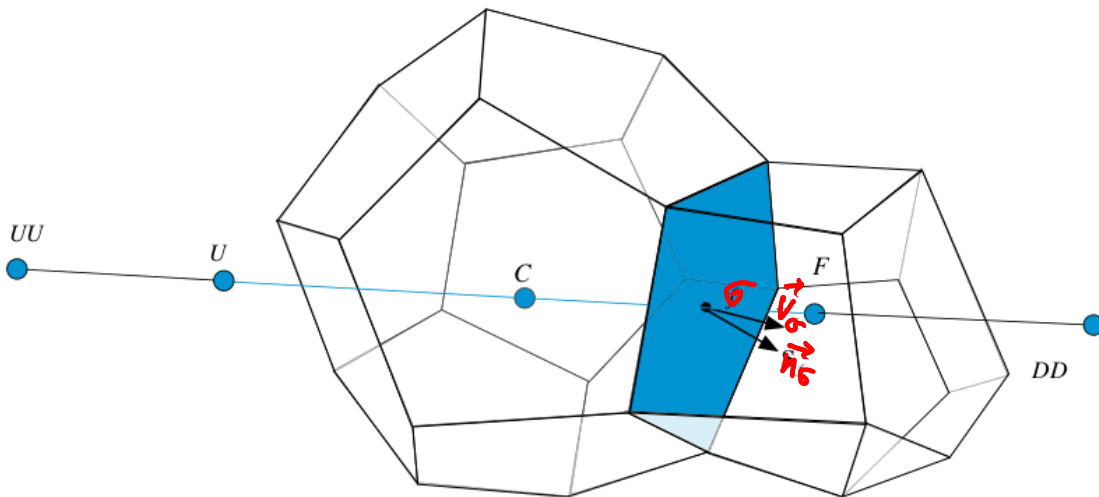
$$\phi_f = \phi_c + \frac{1}{2} (\nabla\phi_c + \nabla\phi_f) \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

Downwind scheme :

$$\phi_f = \phi_c + 2\nabla\phi_f \cdot \mathbf{d}_{cf}$$

gradient na stěně
gradient ve středě buňky

ve 3D



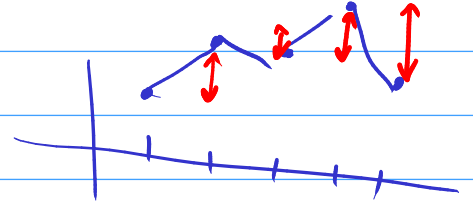
Otázka : jak aproximovat $\nabla\phi_c, \nabla\phi_f$ ($f = \sigma$) ... dále

STABILITA SCHEMAT (podle "TVD" vlastnosti)

- v metodě konečných dif. na pravidelné 1D síti:

$$TV(u^n) = \sum_k |u_{k+1}^n - u_k^n|$$

totální variace



- "TVD" vlastnost (Total Variation Diminishing) je

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad \forall n$$

(\Rightarrow) v čase nevznikají oscilace

- každé TVD schéma je stabilní

- monotónní schéma \Rightarrow TVD schéma \Rightarrow schéma zachovávající monotónii

$$\begin{aligned} \text{pokud } u_k^n \leq v_k^n, \\ \text{pak } u_k^{n+1} \leq v_k^{n+1} \end{aligned}$$

pro lin. rovnici:
pozitivní = monotónní

(monotonicity preserving scheme)

$$\begin{aligned} \text{pokud } u^n \text{ je} \\ \text{monotónní v } k \\ \Rightarrow u^{n+1} \text{ je také} \\ \text{monotónní} \end{aligned}$$

- Hartenova věta: schéma ve tvaru

$$u_k^{n+1} = u_k^n + C(u_{k+1}^n - u_k^n) - D(u_k^n - u_{k-1}^n), \quad (11.1)$$

pro které platí $C, D \geq 0$ a zároveň $C + D \leq 1$, je TVD, a pro skalární rovnici je i konvergentní.

TVD na nerestrikt sítí: $TV = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \\ \sigma = KIL}} |\phi_K - \phi_L|$

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}}_{RHS} \quad a \quad RHS = -a(\phi_C - \phi_U) + b(\phi_D - \phi_C)$

u... je rychlost, center upwind downwind

$a \geq 0, b \geq 0, \text{ and } 0 \leq a + b \leq 1$

$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_i \vec{V}) = \dots$

tok přes hranici √

⇓
TVD

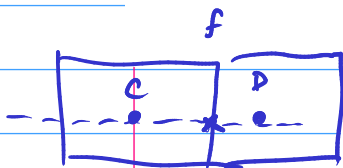
Motivace: aproximace advektivního toku

→ stabilní ⇐ upwind
→ vyřídilo úsudek ⇐ centrální schéma než!

Centrální schéma

↳ umíte přepsat

$\phi_f = \frac{1}{2}(\phi_D + \phi_C) = \underbrace{\phi_C}_{\text{upwind}} + \frac{1}{2}(\phi_D - \phi_C)_{\text{anti-diffusive flux}}$



→
⇓

$\phi_f = \phi_C + \frac{1}{2} \psi(r_f) (\phi_D - \phi_C)$

flux (≈ slope) limiter

≈ 0 na nepojitech

≈ 1 na hladkému řešení

kde $r_f = \frac{\phi_C - \phi_U}{\phi_D - \phi_C}$

(poměr dopředné a zpětné diference)

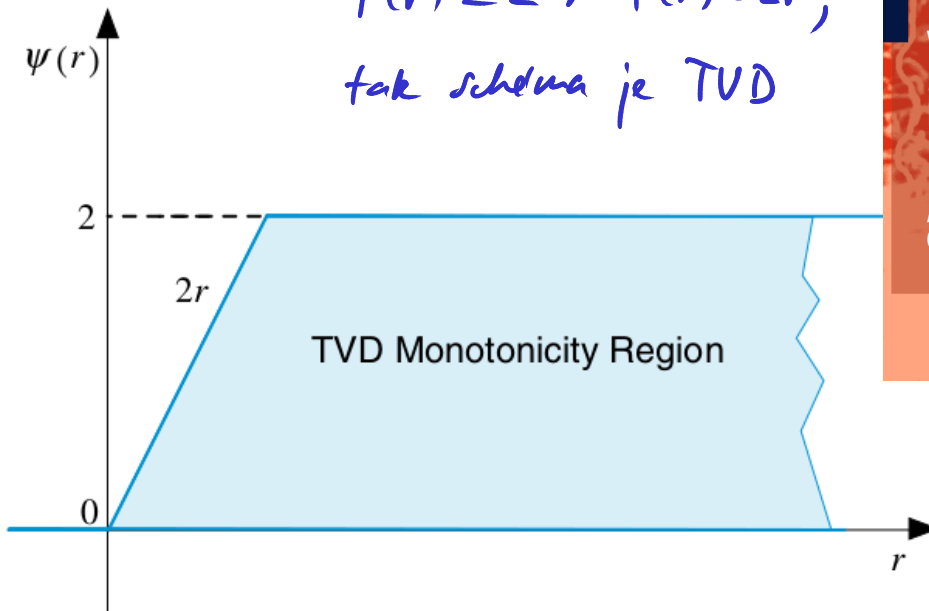
The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics

An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®

lze odvodit, že pokud
postav. / podm.

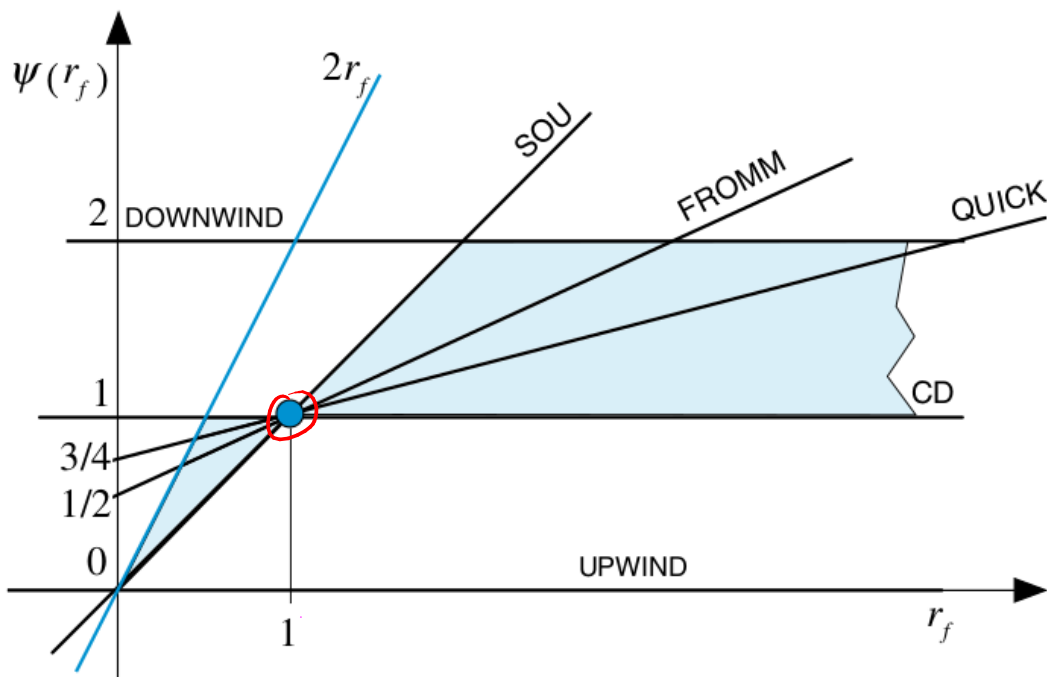
$$\psi(r) \leq 2 \wedge \psi(r) \leq 2r,$$

tak schéma je TVD



| | | |
|---|----------|---------------------------------|
| { | Upwind | $\psi(r_f) = 0$ |
| | Downwind | $\psi(r_f) = 2$ |
| | FROMM | $\psi(r_f) = \frac{1 + r_f}{2}$ |
| | SOU | $\psi(r_f) = r_f$ |
| | CD | $\psi(r_f) = 1$ |
| | QUICK | $\psi(r_f) = \frac{3 + r_f}{4}$ |

⇒

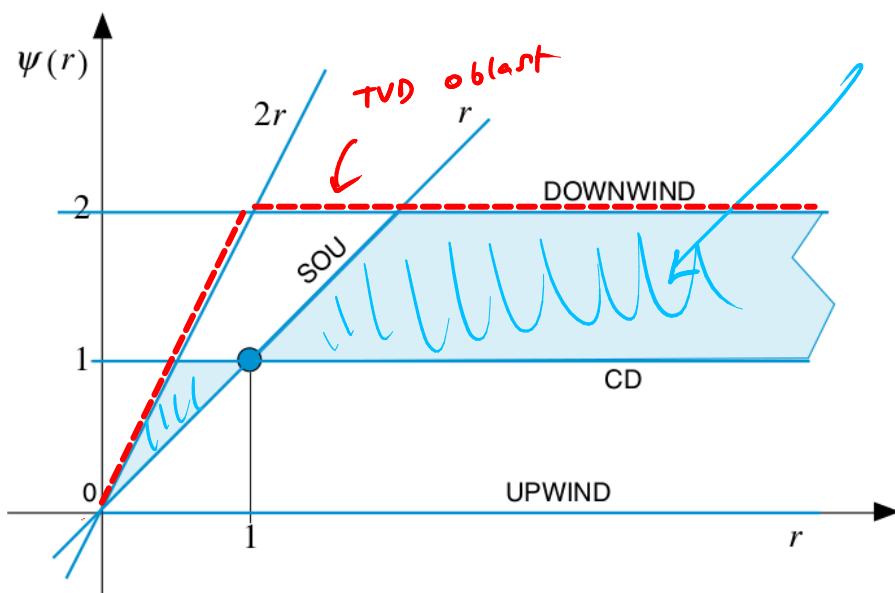


Pozn: Každé řešení 2. řádu se dá upravit jako kombinace CD a SOU

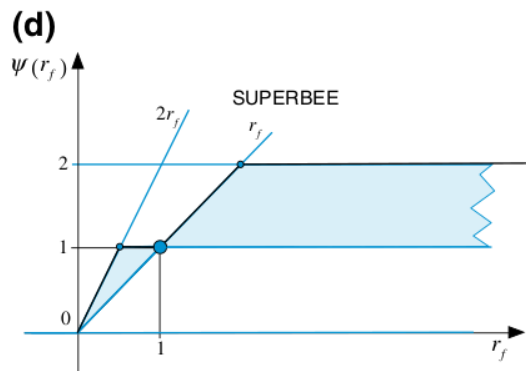
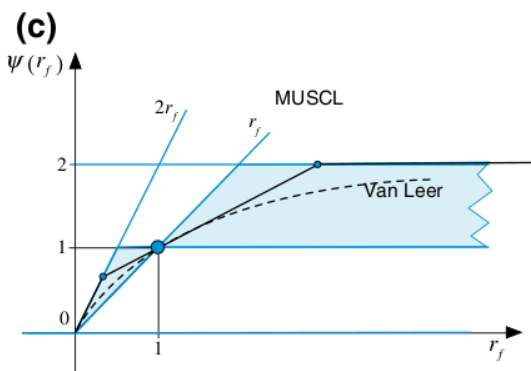
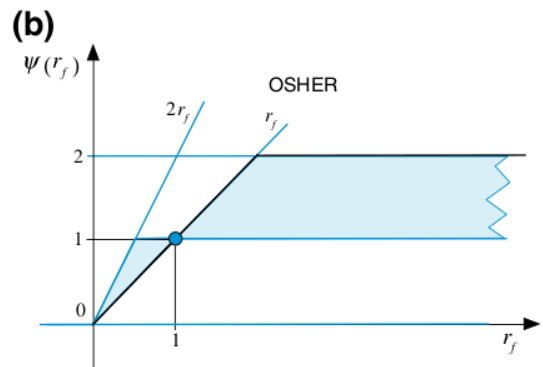
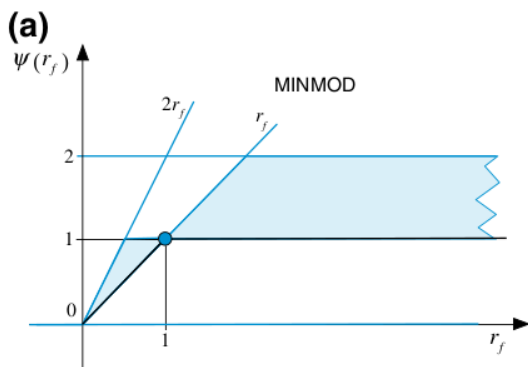


pokud $r=1$, tak
lineární rekonstrukce
 ϕ_F je přesná

aby řešení bylo 2. řádu, musí $\psi(r)$ procházet bodem $(1,1)$



V PRAXI POUŽÍVANE' LIMITERS



SUPERBEE $\psi(r_f) = \max(0, \min(1, 2r_f), \min(2, r_f))$

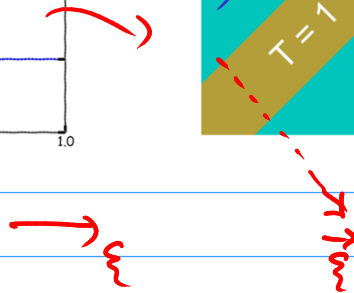
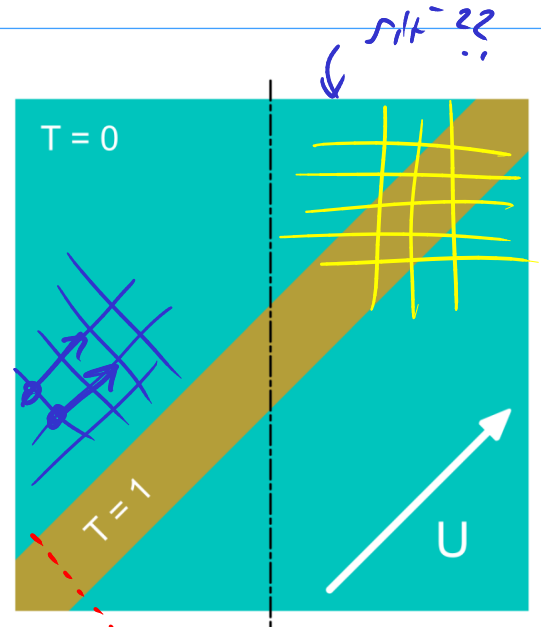
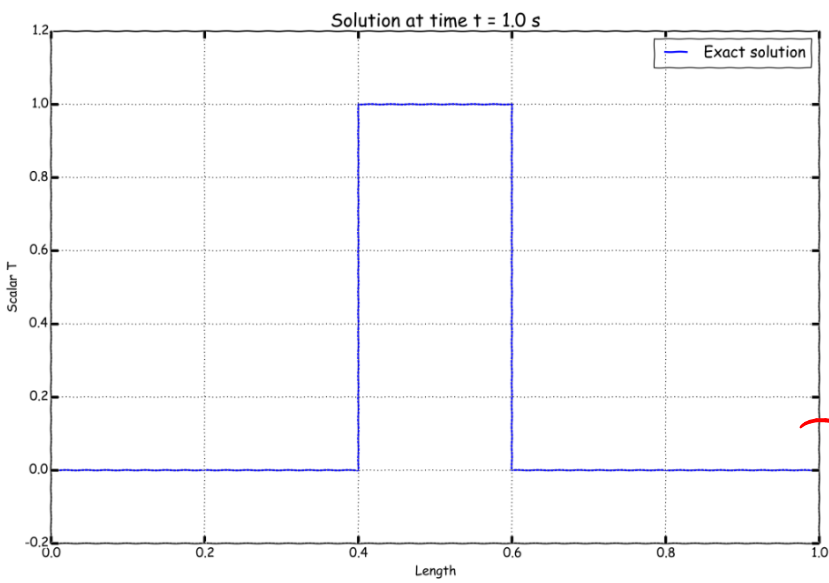
MINMOD $\psi(r_f) = \max(0, \min(1, r_f))$

OSHER $\psi(r_f) = \max(0, \min(2, r_f))$

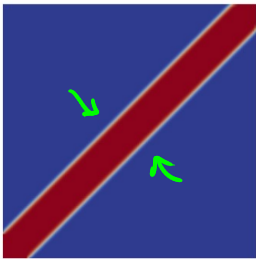
Van Leer $\psi(r_f) = \frac{r_f + |r_f|}{1 + |r_f|}$

MUSCL $\psi(r_f) = \max(0, \min(2r_f, (r_f + 1)/2, 2))$

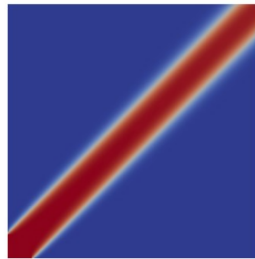
BENCHMARK



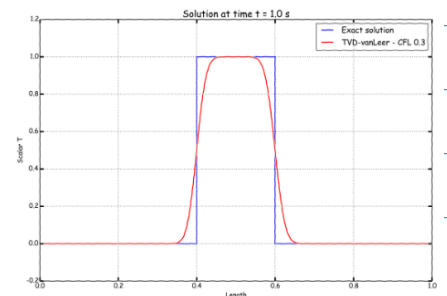
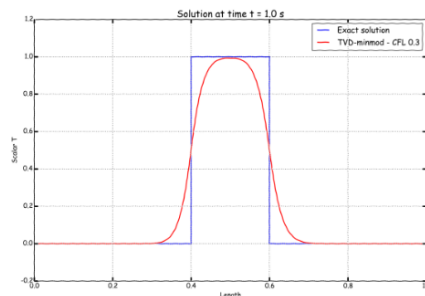
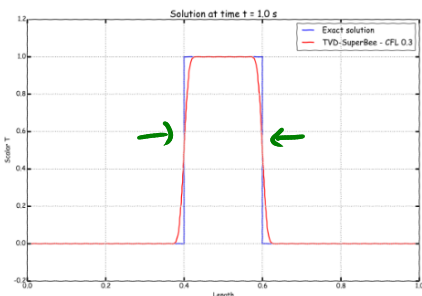
SuperBee - Compressive



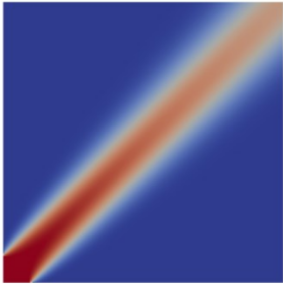
Minmod - Diffusive



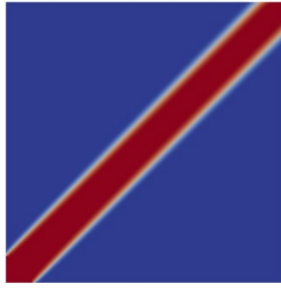
vanLeer - Smooth



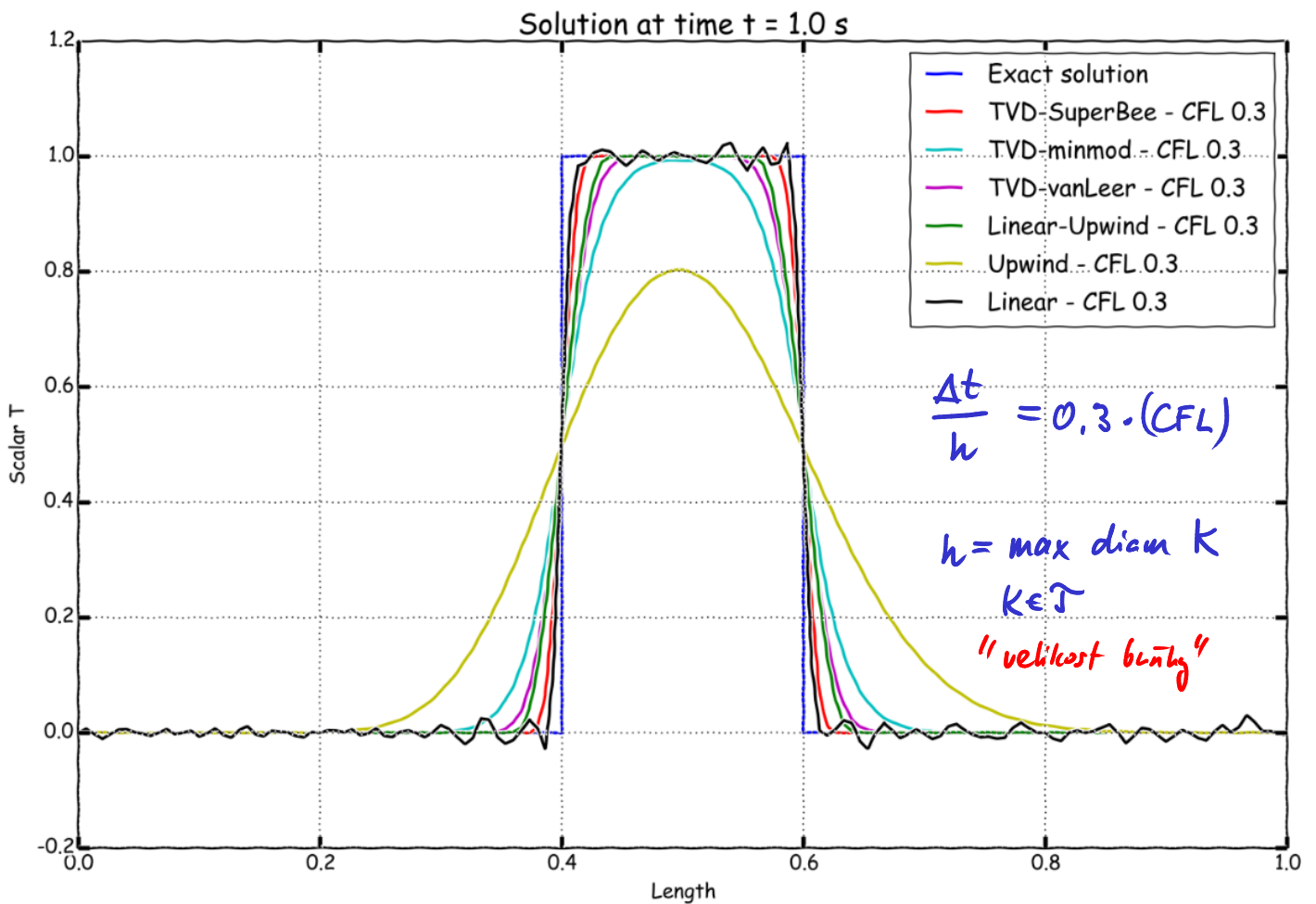
Upwind – 1st order



Linear Upwind – 2nd order



SuperBee – TVD



- alternativa k TVD je "NUF" .. Normalized Variable Formulation

- implementace schémat 2. řádku může být schéma 1. řádku + dodatečná korekce (Deferred Correction)

⇒ zhoršeni rychlosti konvergence implicitních řešičů

⇒ možnost zlepšení $\left\{ \begin{array}{l} \text{DWF (Downwind Weighting Factor)} \\ \text{NWF (Normalized WF)} \end{array} \right.$

DALŠÍ PŘÍSTUPY $\partial_t \vec{W} + \partial_{x_1} \vec{F} + \partial_{x_2} \vec{G} = \dots$

• flux vector splitting

... AUSM

(Advective Upstream Splitting Method)

... uhybnocije

lokálně na stěněch

Machovo číslo

$$M = \frac{|\vec{V}|}{A} \quad \text{— (lok) rychlost}$$

lok. rychlost zvuku

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ v_1 (\rho E + p) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho H \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

advekce $F(c)$

i proti směru rychlosti (pro podzvukové proudění!)

Pozn:

E ... celková energie $\frac{\text{Htka}}{\text{objem}}$
 \mathcal{H} ... celk. entalpie $\mathcal{H} = E + PV$

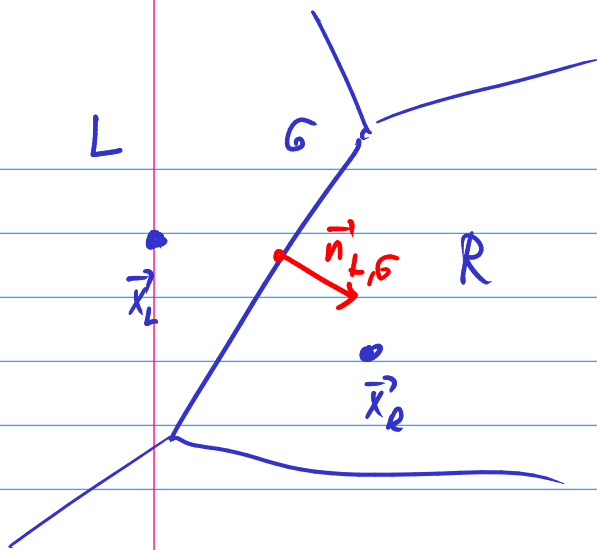
specifická entalpie $H = \frac{\mathcal{H}}{m} = E + \frac{p}{\rho} \Rightarrow \rho H = \rho E + p$
 hustota

A New Flux Splitting Scheme

MENG-SING LIU AND CHRISTOPHER J. STEFFEN, JR.

Internal Fluid Mechanics Division, NASA Lewis Research Center, Cleveland, Ohio 44135

Received May 8, 1991



aproximace $F^{(c)}$ na stěně G

$$F_G^{(c)} = \frac{V_{1,G}}{A} \begin{pmatrix} AP \\ APV_1 \\ APV_2 \\ APH \end{pmatrix} = M_G \begin{pmatrix} PA \\ PAV_1 \\ PAV_2 \\ PAH \end{pmatrix}_G$$

kde

$$(\bullet)_G = \begin{cases} (\bullet)_L & \text{pokud } M_G \geq 0 \\ (\bullet)_R & \text{pokud } M_G \leq 0 \end{cases}$$

M_G ... charakt rychlost na stěně G ($|M_G| < 1 \Rightarrow$ podzvuk, $> 1 \Rightarrow$ nadzvuk)

$$M_G = M_L^+ + M_R^-$$

Van Leerovo rozdělení (splitting)

$$M_{\bullet}^{\pm} = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_{\bullet} \pm 1)^2 & \text{pro } |M_{\bullet}| \leq 1 \text{ (podzvuk)} \\ \frac{1}{2} (M_{\bullet} \pm |M_{\bullet}|) & \text{pro } |M_{\bullet}| > 1 \text{ (nadzvuk)} \end{cases}$$

$M_{\bullet} \pm 1$ kde " \bullet " $\in \{L, R\}$ je charakt. rychlost zúhoší vlny (projekce do směru $\vec{n}_{L,G}$) blížíci se od L , resp. R k G

Zpracování fláka:

$$P_G = P_L^+ + P_R^-, \text{ kde}$$

každé polyn. 3. st v M_{\bullet}

$$P_{\bullet}^{\pm} = \begin{cases} \frac{P_{\bullet}}{4} (M_{\bullet} + 1)^2 (2 \mp M_{\bullet}) & \text{pro } |M_{\bullet}| \leq 1 \\ \frac{P_{\bullet}}{2} (M_{\bullet} \pm |M_{\bullet}|) / M_{\bullet} & \text{pro } |M_{\bullet}| > 1 \end{cases}$$

$\in \{2, 0\}$

valzení polyn. 1. st. v M.

$$P_0^\pm = \begin{cases} \frac{p}{2}(1 \pm M) & \text{pro } |M| \leq 1 \\ \frac{p}{2}(M \pm |M|)/M & \text{pro } |M| > 1 \end{cases}$$

rozšíření: \swarrow AUSM+
CUSP

Flux Difference Splitting - Roe's upwind scheme [Blazek, str. 104]

$$\partial_t \vec{W} + \partial_{x_1} \vec{F} + \partial_{x_2} \vec{G} \approx \partial_t \vec{W} + \underbrace{\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{W}}}_{\text{Jacobitko matice}} \partial_{x_1} \vec{W} + \underbrace{\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{W}}}_{\text{Jacobitko matice}} \partial_{x_2} \vec{W}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho h \end{pmatrix}$$

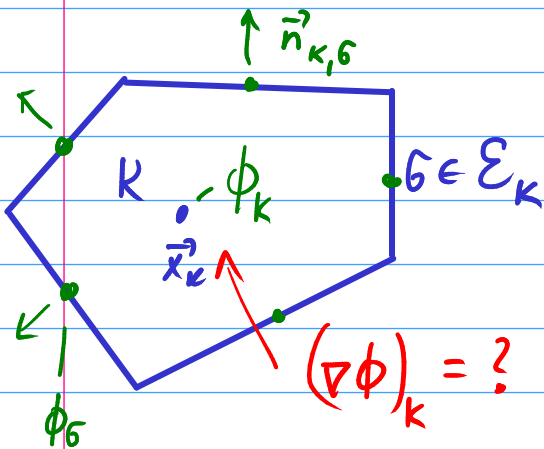
Jacobitko matice
 \Rightarrow approximate Roe's matice $A_{Roe}^{(F)}$
 $A_{Roe}^{(G)}$

$$A_{Roe}^{(F)} = R^T \Lambda R$$

Aproximace gradientu

motivace $\left\{ \begin{array}{l} \text{vzájemné toky } \vec{R}, \vec{S} \dots \text{ obsahují derivace } \partial_i V_k \\ \text{na } \mathcal{G} \Rightarrow \text{nutnost aproximace } \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \\ \text{na stěně} \\ \text{aproximace vzdálených "virtuálních" uzlů pro} \\ \text{upwind 2. řádu (SOU, FROMM, QUICK, TVD...)} \\ \Rightarrow \text{nutnost znát } \nabla \phi \quad \phi \in \mathcal{E} \rho, \rho v, \dots \} \\ \text{ve středech buněk} \end{array} \right.$

GRADIENTY VE STŘEDECH BUNĚK



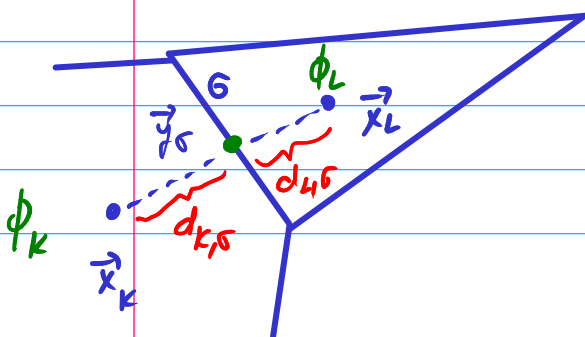
1) Gaussova - Greenova aproximace

$$\int_K \partial_i \phi d\vec{x} = \int_{\partial K} \phi n_i dS$$

sloužky pod sebou

$$\int_K \nabla \phi d\vec{x} = \int_{\partial K} \phi \vec{n} dS$$

$$(\nabla \phi)_k = \frac{1}{m(K)} \sum_{\mathcal{G} \in \mathcal{E}_K} m(\mathcal{G}) \phi_{\mathcal{G}} \vec{n}_{k,\mathcal{G}}$$

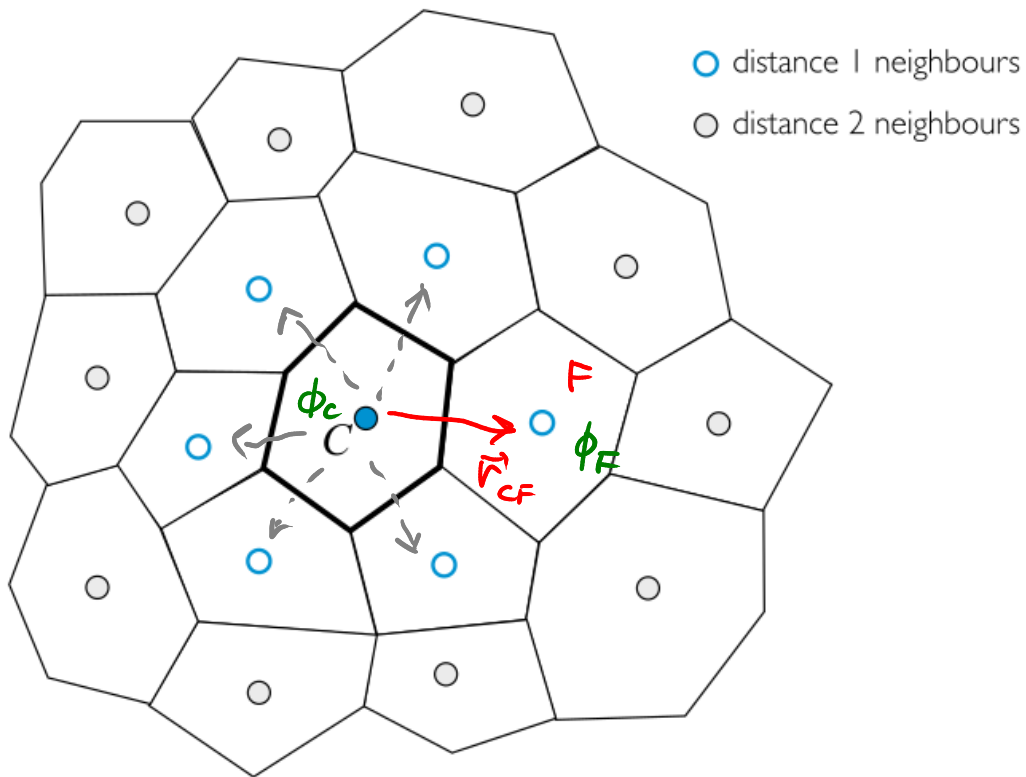


$$\phi_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} (\phi_K + \phi_L) \quad (1. \text{ řádu})$$

nebo přerůjní lin. interpolaci (2. řádu)

$$\phi_{\mathcal{G}} = \frac{d_{k,L}}{\mathcal{D}_{KL}} \phi_L + \frac{d_{k,K}}{\mathcal{D}_{KL}} \phi_K$$

2) aproximační gradientní metoda nejmenších čtverců



$$\phi_F \approx \phi_C + (\nabla\phi)_C \cdot \underbrace{(\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_C)}_{\mathbf{r}_{CF}} + \mathcal{O}(|\vec{r}_{CF}|^2)$$

(přes všechny sousední buňky C

minimalizujeme

$$G_C = \sum_{k=1}^{NB(C)} \left\{ w_k \left[\phi_{F_k} - (\phi_C + \nabla\phi_C \cdot \mathbf{r}_{CF_k}) \right]^2 \right\}$$

váhy

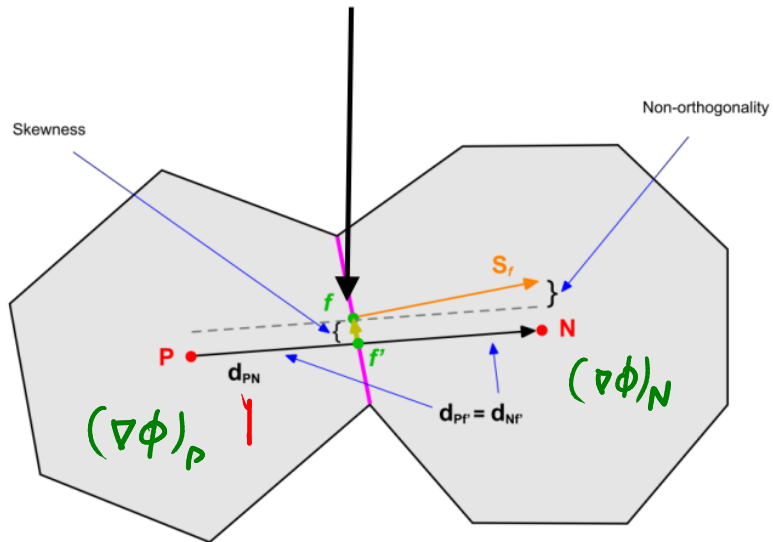
stat. hodnota

aproximace

APPROXIMATION GRADIENTU NA STĚNA'CH

nejjednodušší

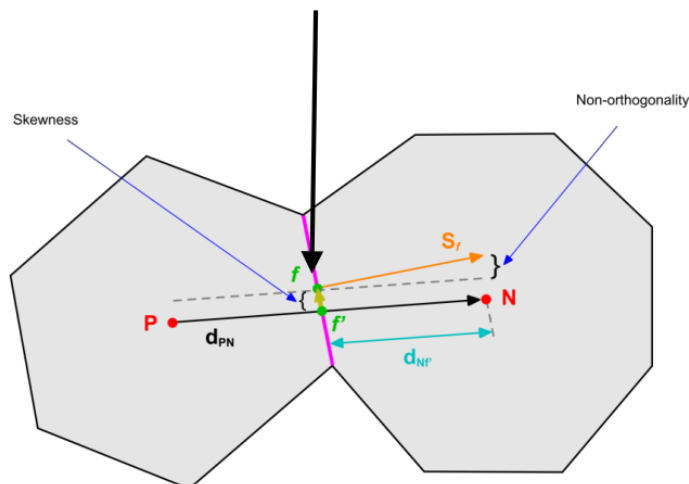
$$\nabla\phi_f = \frac{\nabla\phi_P + \nabla\phi_N}{2}$$



lin. interpolace

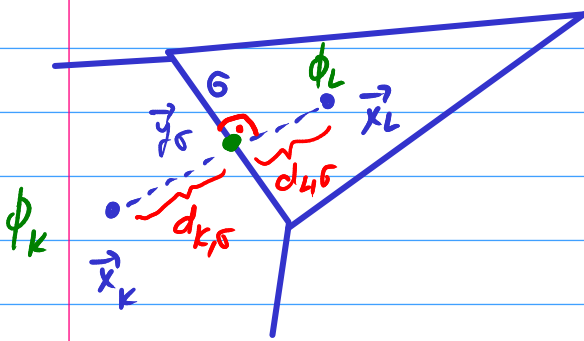
$$\nabla\phi_f = f_x \nabla\phi_P + (1 - f_x) \nabla\phi_N \quad \text{where} \quad f_x = fN/PN$$

$\frac{f}{d_{PN}}$



Pozná: nestlačit - proudění $\nabla \cdot \vec{\Pi}_D \rightarrow \mu \Delta \vec{V}$

Green: $\int_K \Delta \vec{V} d\vec{x} = \int \nabla \vec{V} \cdot \vec{n} dS$
 $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{n}} \dots$ diletěte'



$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right)_\sigma \approx \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}} + O(D_{KL}^2)$$

pokud \perp !!

KOREKCE: $(\nabla \phi)_\sigma$ upravíme tak, aby

$$\vec{d}_{KL} := \frac{(\vec{x}_L - \vec{x}_K)}{D_{KL}} \quad (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} \stackrel{!}{=} \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}}$$

$$\Rightarrow (\nabla \phi)_\sigma^{corr} = (\nabla \phi)_\sigma + \left(\frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}} - (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} \right) \vec{d}_{KL}$$

statistické!

$$\Rightarrow (\nabla \phi)_\sigma^{corr} \cdot \vec{d}_{KL} = (\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} + \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}} \underbrace{(\vec{d}_{KL} \cdot \vec{d}_{KL})}_{=1} - \underbrace{\left((\nabla \phi)_\sigma \cdot \vec{d}_{KL} \right) (\vec{d}_{KL} \cdot \vec{d}_{KL})}_{=1}$$

\Rightarrow automaticky umožníte přesně spočítat

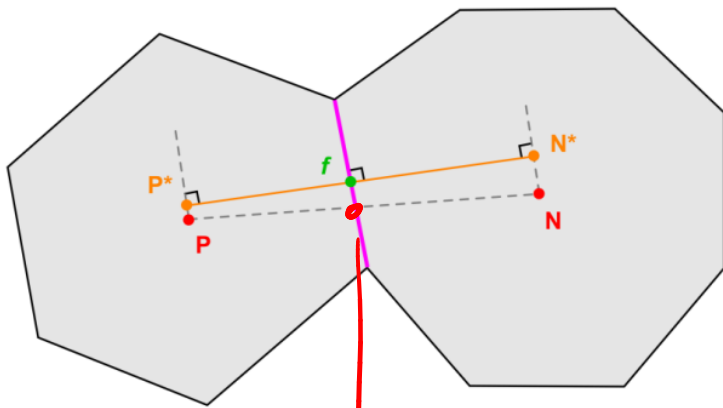
$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = (\nabla \phi)_\sigma^{corr} \cdot \vec{n}, \text{ a to i když } \vec{n} \nparallel \vec{d}_{KL}$$

Pozn : Neortogonální (= nepřímé) síťe

Další možnost výpočtu $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}}$ se zúčastí gradientů v blízkosti

$$\phi_N^* = \phi_N + \nabla \phi_N \cdot \mathbf{d}_{N^*N}$$

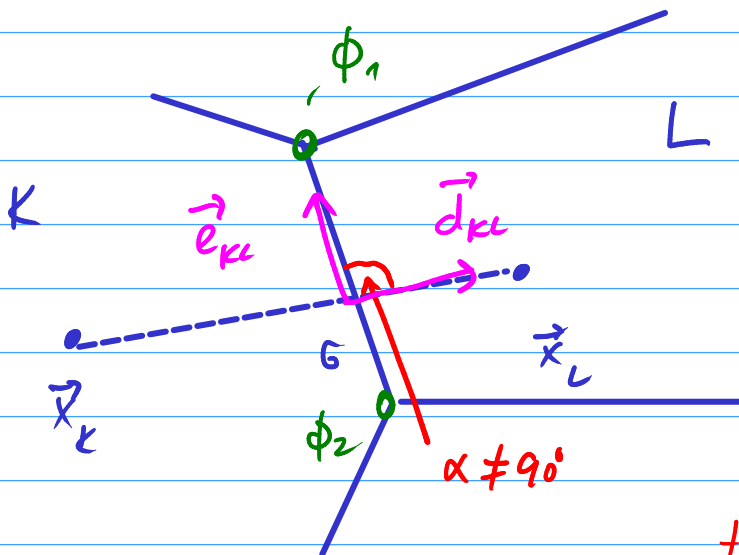
$$\phi_P^* = \phi_P + \nabla \phi_P \cdot \mathbf{d}_{P^*P}$$



$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}} = \frac{\phi_{N^*} - \phi_{P^*}}{|\mathbf{d}|_{P^*N^*}}$$

zde není \perp (t)

Další možnost ve (2D) k rekonstrukci $(\nabla \phi)_G$



$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \vec{d}_{KL}} \approx \frac{\phi_L - \phi_K}{D_{KL}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{e}_{KL}} \approx \frac{\phi_1 - \phi_2}{m(G)}$$

transformace
báze



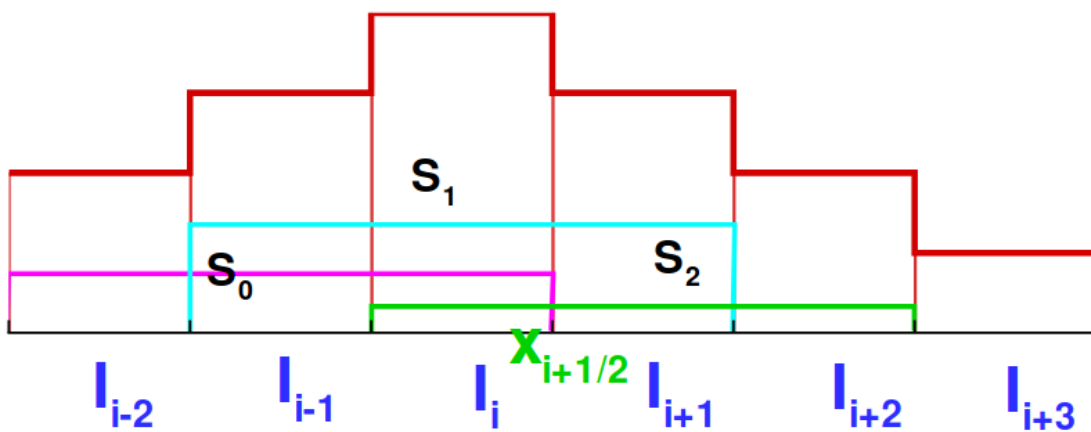
specifické $(\nabla \phi)_G, \frac{\partial \phi}{\partial \vec{u}}$

METODY VYSOKÉ RÁDU (část 2)



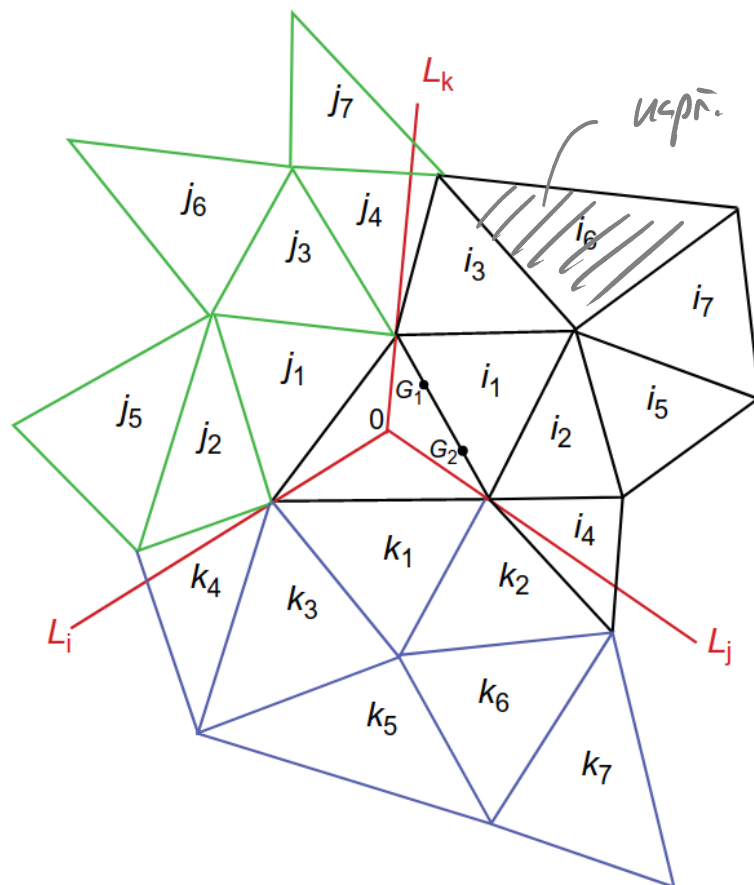
ENO - essentially non-oscillatory
 WENO - weighted ENO

- adaptivní stencil (vynechání "nepojitých" buněk)



- polynomiální interpolace (Lagrange)

- kritérium hladkosti



upř. i_6 necht. protože
 nepřijíje krit.
 hladkosti

High Order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD

Chi-Wang Shu¹

Division of Applied Mathematics

Brown University

Providence, Rhode Island 02912

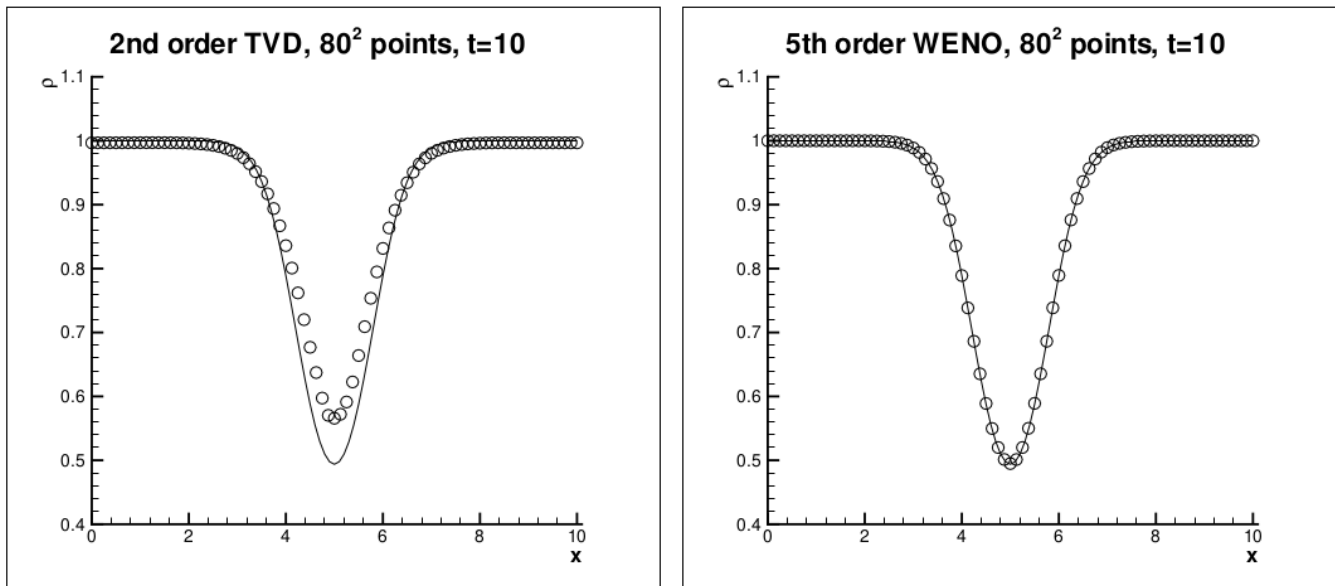


Figure 1.1: Vortex evolution. Cut at $x = 5$. Density ρ . 80² uniform mesh. $t = 10$ (after one time period). Solid: exact solution; circles: computed solution. Left: second order TVD scheme; right: fifth order WENO scheme.

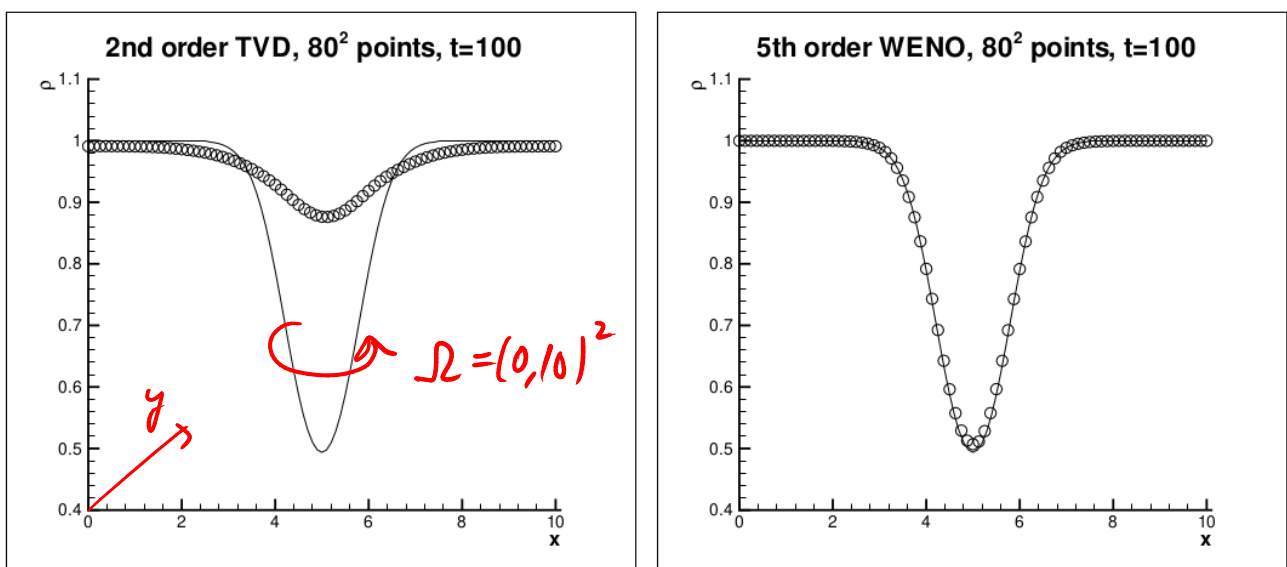


Figure 1.2: Vortex evolution. Cut at $x = 5$. Density ρ . 80² uniform mesh. $t = 100$ (after 10 time periods). Solid: exact solution; circles: computed solution. Left: second order TVD scheme; right: fifth order WENO scheme.

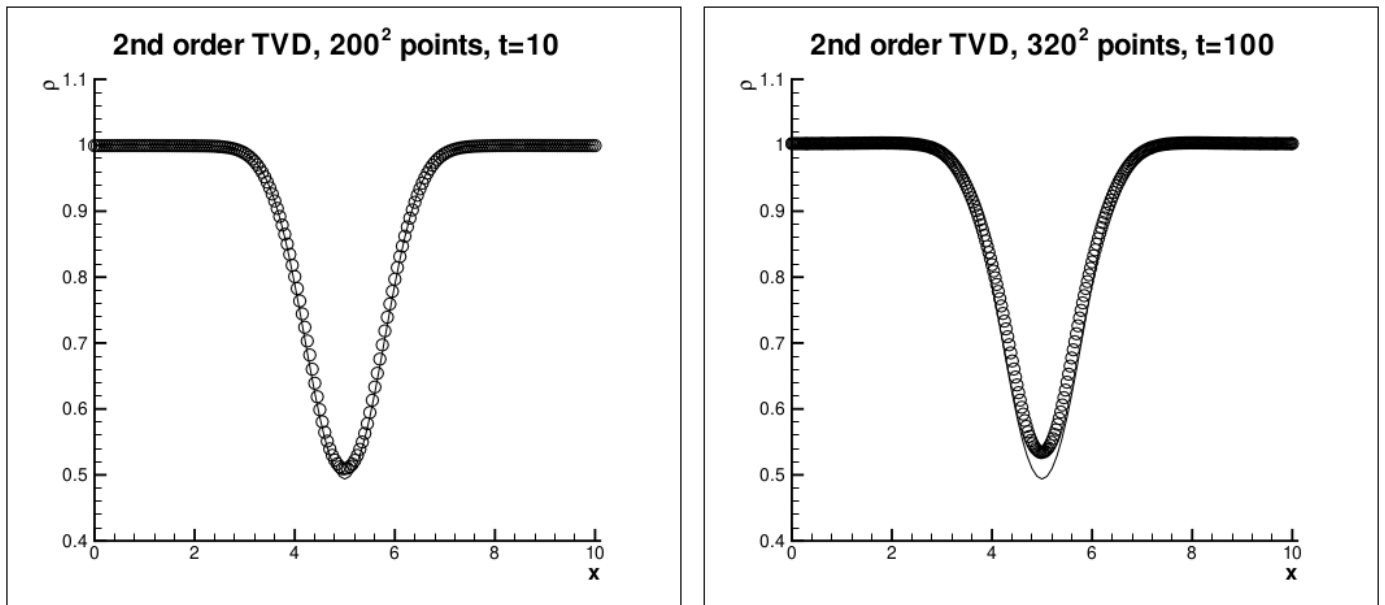


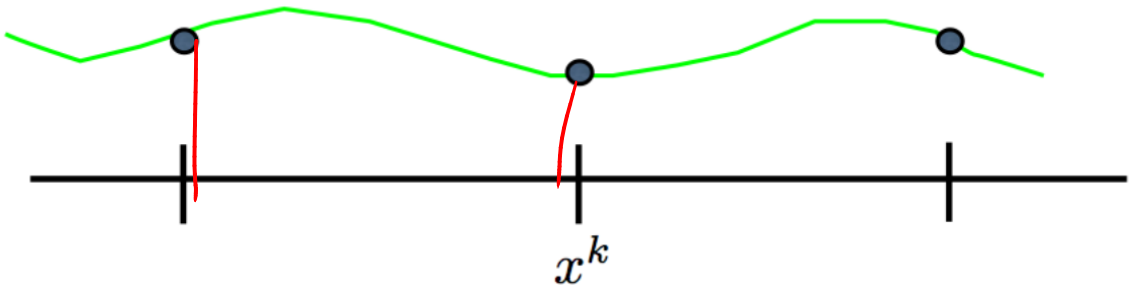
Figure 1.3: Vortex evolution. Cut at $x = 5$. Density ρ . Second order TVD scheme. Solid: exact solution; circles: computed solution. Left: 200^2 uniform mesh, $t = 10$ (after one time period); right: 320^2 uniform mesh, $t = 100$ (after 10 time periods).

"DG"

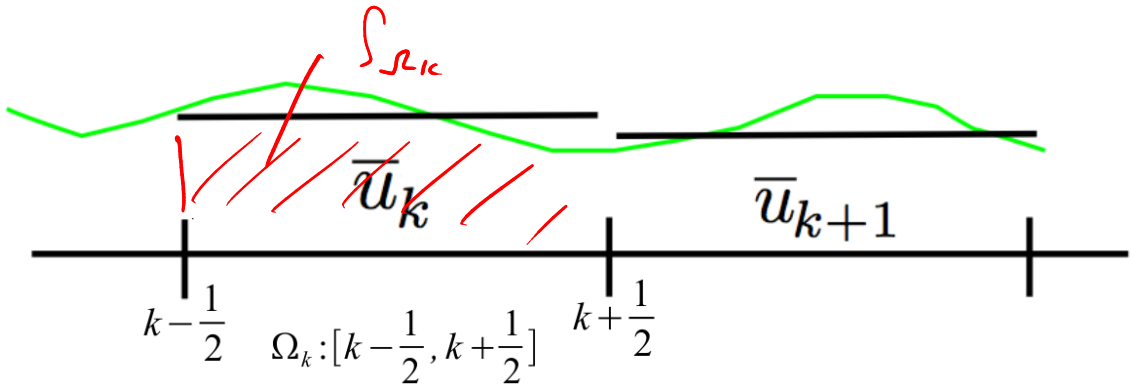
Discontinuous Galerkin

řetěm' je nepojité mezi elementy
bážíve' to nemáme / jen na svých
elementech

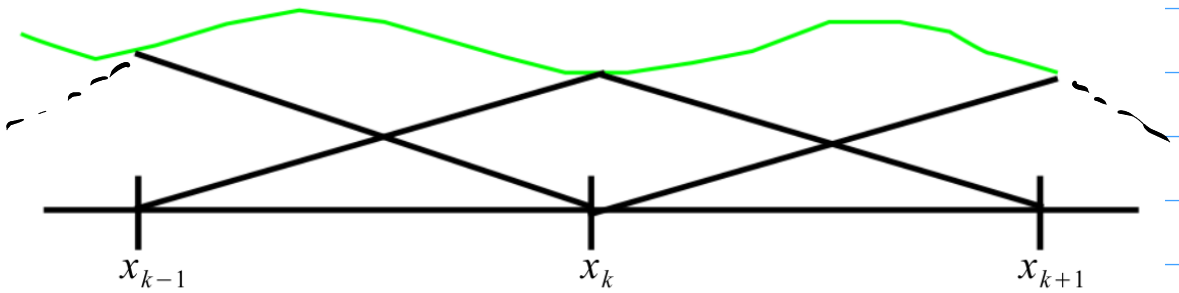
FDM



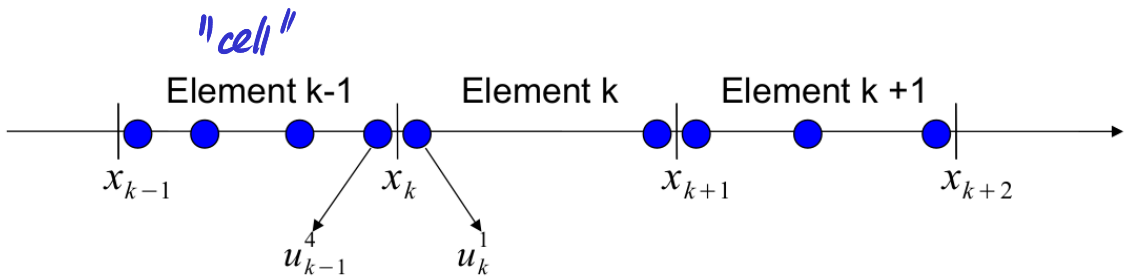
FVM



FEM



DG



Wkádni' Galerkinova metoda na každém Ω_k

metody řešení nestlačitelnosti

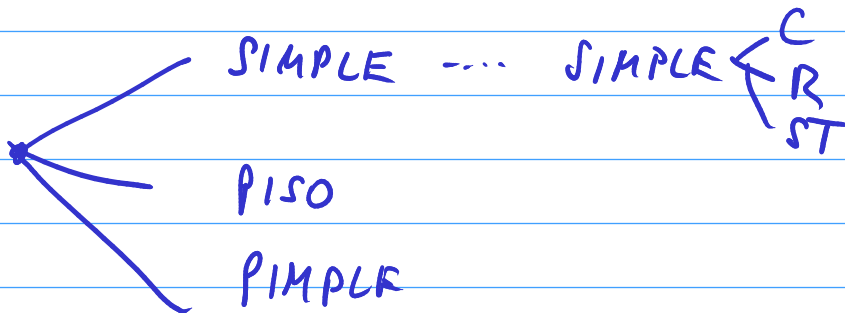
$zžm \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$

$zž6 \Leftrightarrow NS \dots \text{obstahy! } \nabla P$

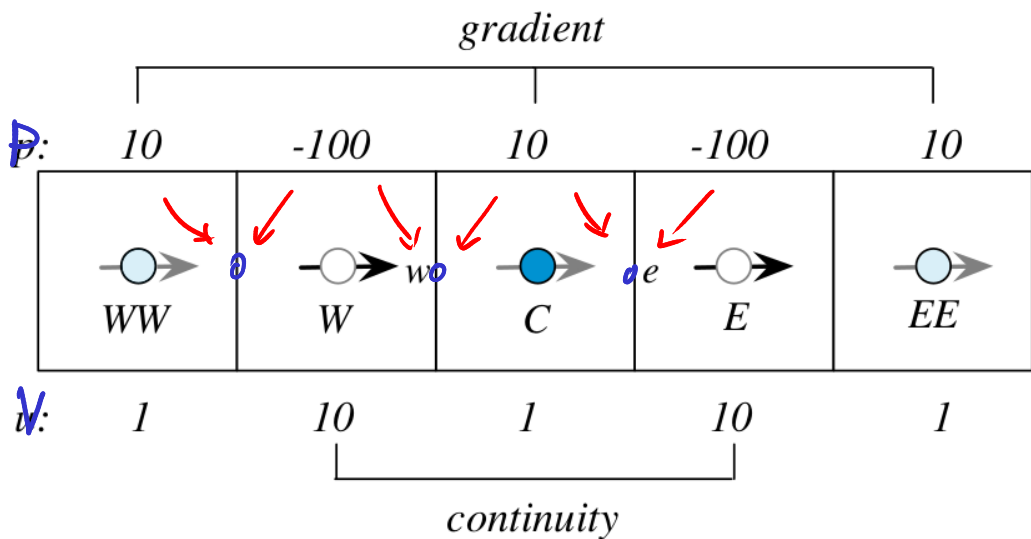


Poissonova rovnice pro tlak

Princip num. řešení: predikce \rightarrow korekce



PROBLEM "SACHOVNICOVÝ" / "decoupling"



$$\int_C \frac{\partial P}{\partial x} dx = (P_e - P_w)_m(C) = 0$$

⇒ STAGGERED GRID (střídavá síť)

- rychlosti uloženy na stěnách
- skalární veličiny ve středech buněk

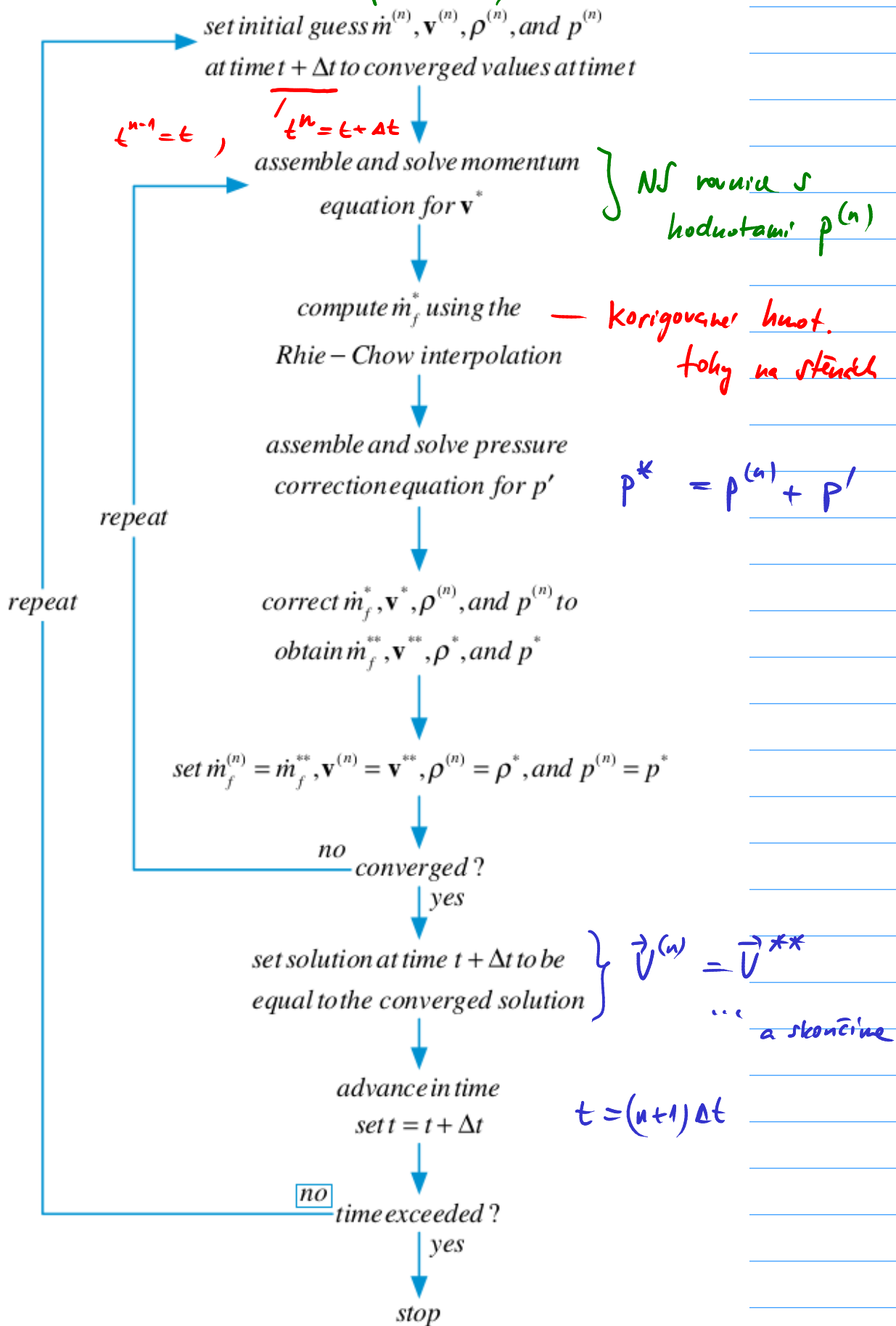
- nevýhody zejména ne nestabilit. síťek

ALTERNATIVA - speciální typ interpolace na cell-centered síťech
(Rhie-Chowova interpolace)

$$\begin{aligned} \overline{D_f^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_f} - \overline{D_f^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_f} &= \frac{1}{2} \left(D_C^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_C + D_F^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_F \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (D_C^u + D_F^u) \times \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_C + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_F \right) \\ &= \frac{1}{4} D_C^u \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_C - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_F \right) + \frac{1}{4} D_F^u \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_F - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_C \right) \\ &\approx O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

SIMPLE :

hmot. toky pries skeny / rychlosti pole v case n-dt
 pole hustoty / tlaku
 — " —



varianty a vylepšení : SIMPLE $\left\{ \begin{array}{l} C \\ R \\ ST \end{array} \right\}$ PIMPLE
PISO
vše je v OpenFOAMu

POZN : pro stlačitelné proudění

↖ "přímotařné" řešení : $\rho, \vec{V} \dots p = \text{EOS}(\rho, T)$
(density-based solver)

↖ pozíční korekční rovnice pro tlak : p, \vec{V}
(pressure-based solver)

METODY ČASOVÉ INTEGRACE

pozn : Metoda přírvek : $\partial_t \vec{u} + L_{\vec{x}} \vec{u} = f$

$u : (0, t_{max}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$u_h : (0, t_{max}) \rightarrow \mathcal{J}_h$

prostor
sít. bodů
na Ω

$$\partial_t u_h + L_{\vec{x}_h} u_h = f_h$$

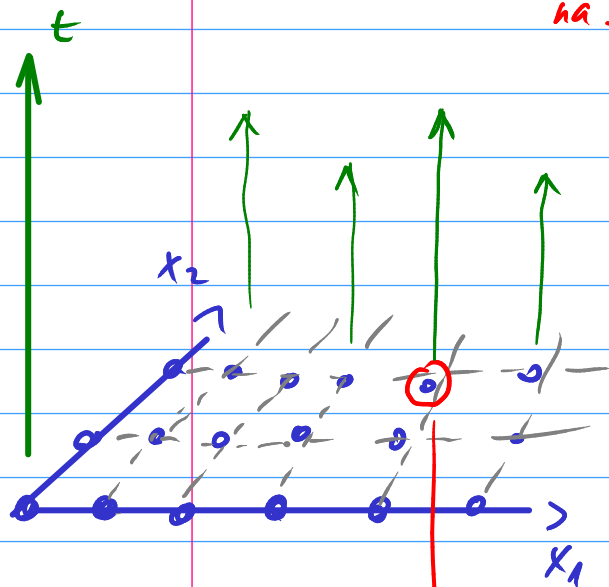
} konečný
počet
ODR

operator
prostorové diskretizace
(MKO ; MKO...)

$$\dot{\vec{u}} = \vec{F}(\vec{u})$$

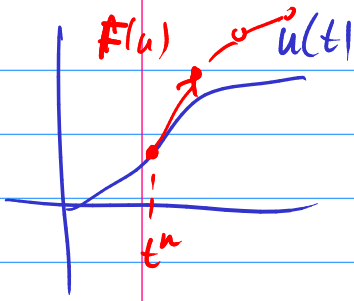
\vec{u} obsahuje hodnoty u_h v jednotlivých
uzlech sítě (MKO), resp. v jednotlivých
buněčkách (MKO)

$$[u_h(t)]_{ij} = \underbrace{(u_h(t))}_{\in \mathcal{J}_h} (\vec{x}_{ij})$$



RUNGE - KUTTOVY METODY

m-kroková RK metoda pro řešení $\dot{\vec{u}} = \vec{F}(t, \vec{u})$



$$\vec{K}_l = \vec{F}\left(t^n + c_l \Delta t, \vec{u}^n + \Delta t \sum_{j=1}^m a_{jl} \vec{K}_j\right)$$

$$l = 1, \dots, m$$

a nakonec
$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \Delta t \sum_{l=1}^m b_l \vec{K}_l$$

zřejmě (intuitivně)
$$c_l = \sum_{k=1}^m a_{lk}$$

Butcherova
tabulka

explicitní
RK metod

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| c_1 | a_{11} | a_{12} | \dots | a_{1m} |
| c_2 | a_{21} | a_{22} | \dots | a_{2m} |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| c_m | a_{m1} | a_{m2} | \dots | a_{mm} |
| | b_1 | b_2 | \dots | b_m |

$$\left(\sum_{k=1}^m b_k = 1\right)$$

pokud zde je
nenulová hodnota,
jde o implicitní
RK metod,
(alespoň v
1 kroku)

např. tzv. klasická
RK
metoda
4. řádu

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

... pro "stifft"
soustavy
rovní

6-kroková RK: jednoduché diagonální implicitní metoda

| | | | | | | | |
|------------------|------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $\frac{83}{250}$ | $\frac{8611}{62500}$ | $-\frac{1743}{31250}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 | |
| $\frac{31}{50}$ | $\frac{5012029}{34652500}$ | $-\frac{654441}{2922500}$ | $\frac{174375}{388108}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | |
| $\frac{17}{20}$ | $\frac{15267082809}{155376265600}$ | $-\frac{71443401}{120774400}$ | $\frac{730878875}{902184768}$ | $\frac{2285395}{8070912}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | |
| 1 | $\frac{82889}{524892}$ | 0 | $\frac{15625}{83664}$ | $\frac{69875}{102672}$ | $-\frac{2260}{8211}$ | $\frac{1}{4}$ | |
| 4. řádek | b_k | $\frac{82889}{524892}$ | 0 | $\frac{15625}{83664}$ | $\frac{69875}{102672}$ | $-\frac{2260}{8211}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 2. řádek | \hat{b}_k | $\frac{4586570599}{29645900160}$ | 0 | $\frac{178811875}{945068544}$ | $\frac{814220225}{1159782912}$ | $-\frac{3700637}{11593932}$ | $\frac{61727}{225920}$ |

RK - Merronova metoda
s adaptivní volbou
(časového) kroku
4. řádek

provede se vždy

$$\varepsilon < \delta \omega^5 \Leftrightarrow$$

τ se prodlouží!

$$\omega \doteq 0,8 \in (0,1)$$

```

 $\tau = \tau_{ini}; \mathbf{x}^T = \mathbf{x}_{ini}^T;$ 
while(1) {
    if(|T - t| < |\tau|) {
         $\tau = T - t; \text{last} = \text{true};$ 
    } else last = false;
     $\mathbf{K}_1 = f(t, \mathbf{x}^T);$ 
     $\mathbf{K}_2 = f(t + \frac{\tau}{3}, \mathbf{x}^T + \frac{\tau}{3}\mathbf{K}_1);$ 
     $\mathbf{K}_3 = f(t + \frac{\tau}{3}, \mathbf{x}^T + \frac{\tau}{6}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2));$ 
     $\mathbf{K}_4 = f(t + \frac{\tau}{2}, \mathbf{x}^T + \frac{\tau}{8}(\mathbf{K}_1 + 3\mathbf{K}_3));$ 
     $\mathbf{K}_5 = f(t + \tau, \mathbf{x}^T + \tau(\frac{1}{2}\mathbf{K}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{K}_3 + 2\mathbf{K}_4));$ 
     $\varepsilon = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{\tau}{3} |0.2\mathbf{K}_1^i - 0.9\mathbf{K}_3^i + 0.8\mathbf{K}_4^i - 0.1\mathbf{K}_5^i|;$ 
    if( $\varepsilon < \delta$ ) {
         $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T + \tau(\frac{1}{6}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_5) + \frac{2}{3}\mathbf{K}_4);$ 
         $t = t + \tau;$ 
        if(last) break;
        if( $\varepsilon == 0$ ) continue;
    }
     $\tau = (\frac{\delta}{\varepsilon})^{0.2} \cdot \omega \tau;$ 
}

```

$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$
 $\tau = \Delta t$

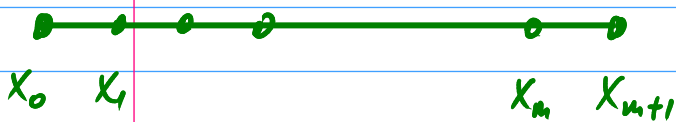
IMPLICITNI SCHEMATA - REŠENÍ SOUSTAV LN. ROVIC

$\partial_t u + a \partial_x u = 0$ transport. rovnice \wedge $u(0) = u(1) = 0$
na $\Omega = (0, 1)$

$$\overleftarrow{\int_t} u_h^{dt} + a \overrightarrow{\int_x} u_h^{dt} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{u_k^n - u_k^{n-1}}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$u_h^{dt} \in \mathcal{P}_h^{dt}$

PROSTOR. DISKRETIZACE



nebo

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

$$u_k^{n+1} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}) = u_k^n$$

ozn. α

soustava lin. rovnic pro u^{n+1}

$$u^{n+1} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_m^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & \alpha & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha & 1 & \alpha & \dots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -\alpha & 1 & \alpha \\ & & & & & & & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_m^{n+1} \end{pmatrix} = u^n$$

3-diagonální

Toeplitzova

matice

\Rightarrow nutno najít A^{-1} ... závisle na Ω

$$Au^{n+1} = u^n$$

90 ar na síti a ne přes. podm

$$\Rightarrow u^{n+1} = \bar{A}^{-1} u^n$$

inverze 3-diag. matice ma' všechy prvky nenulové

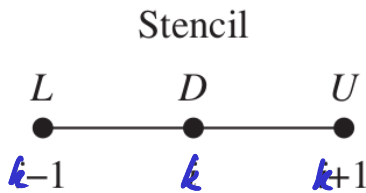
\Rightarrow u_k^{n+1} závisí na u_l^n pro všechna $l = 1, \dots, m$
 první

\Rightarrow CFL podmínka je splněna pro lib. hodnotu rychlosti a

\leftarrow implic. schéma je nepodmíněně stabilní (vlastně z Von Neumannovy podmínky)

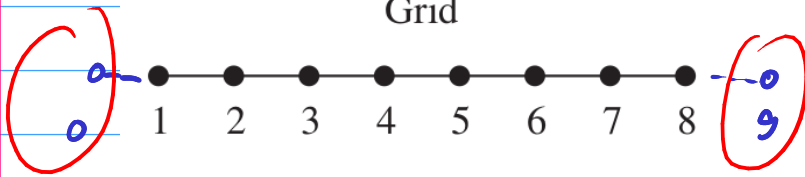
Struktury matice A pro úlohy v 1D, 2D:

v 1D:

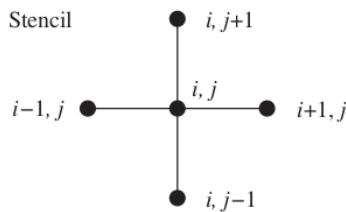


Implicit operator

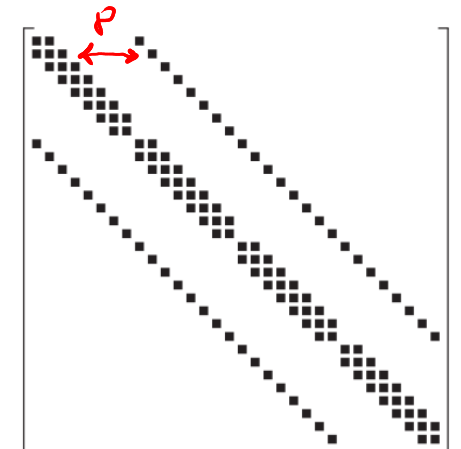
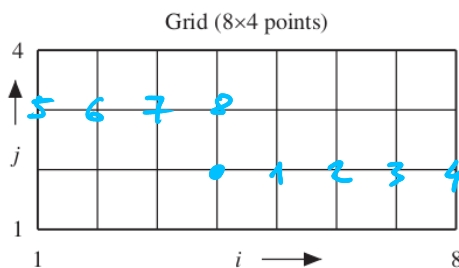
$$\begin{bmatrix} DU & \dots & 0 \\ LDU & & \\ & LDU & \\ & & LDU & \vdots \\ \vdots & & & LDU & \\ & & & & LDU & \\ 0 & \dots & & & & LD \end{bmatrix}^{8 \times 8}$$



okraj. podmín

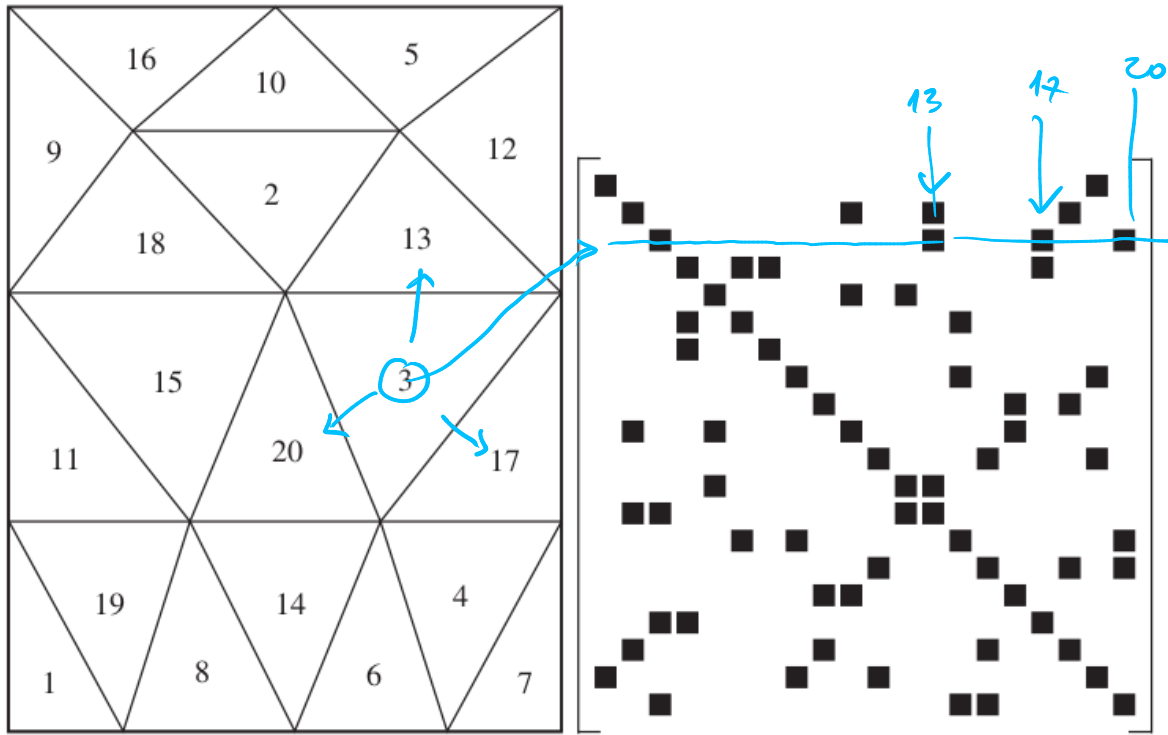


ve 2D



2D - nestrukturovaná síť:

zdroj:
(Blazek - CFD - Principles & Practice 3rd ed.)



⇒ řídka matice ⇒ pro reprezentaci v počítači se hodí speciální formáty (CSR, ...)

↓ algoritmus seřazení složek u^{n+1}

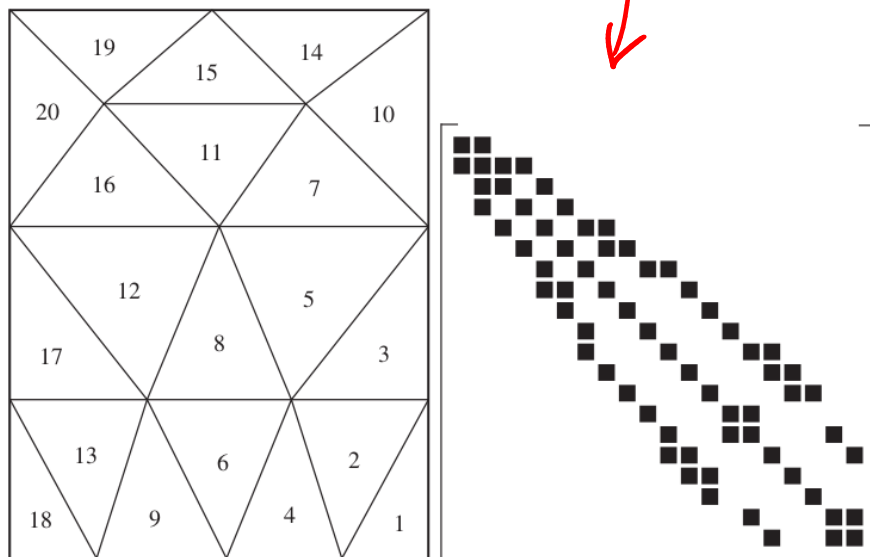


Figure 6.4 Reduced bandwidth (from 18 to 5) of the implicit operator from Fig. 6.3 with reverse-Cuthill-McKee ordering. Nonzero block matrices are displayed as filled rectangles.

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ $IA^{n+1} = u^n$

sucha najít aproximaci $A^{-1} \Leftrightarrow$ předpodmíněná soustava

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

$$\underbrace{M^{-1}A}_{\text{předpodmíněná}} \vec{u} = \underbrace{M^{-1}\vec{f}}_{\vec{r}^{(n)}} \quad \text{kde } M \text{ je regulární}$$

(číslo podmíněnosti matice
 $\kappa = \|A\| \|A^{-1}\|$)

"lépe podmíněná" \Leftarrow pokud M^{-1} bude ještě aproximace A^{-1}

Obecné iterativní metody

$$\vec{u}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n)} + M^{-1} \underbrace{(\vec{f} - A\vec{u}^{(n)})}_{\vec{r}^{(n)}} \quad \text{.. kdyby } M=A \text{ tak } \vec{u}^{(n+1)} = A^{-1}\vec{f}$$

REZIDUUM

$$\vec{e}^{(n)} = A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n)} \quad \text{CHYBA}$$

$$\text{plch: } A\vec{e}^{(n)} = \vec{r}^{(n)}$$

$$\vec{e}^{(n+1)} = A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n+1)} = \underbrace{A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n)}}_{\vec{e}^{(n)}} - M^{-1}(\vec{f} - A\vec{u}^{(n)})$$

$$= \vec{e}^{(n)} - M^{-1}A(\underbrace{A^{-1}\vec{f} - \vec{u}^{(n)}}_{\vec{e}^{(n)}}) = \underbrace{(I - M^{-1}A)}_{\mathbb{R}} \vec{e}^{(n)}$$

existuje norma, která je libovolně blízko $\rho(\mathbb{R})$

$\| \vec{e}^{(n+1)} \| \leq \| \mathbb{R} \| \| \vec{e}^{(n)} \|$ vekt. normy konstantní s danou mat. normou

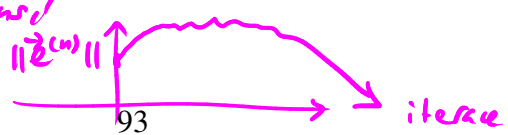
Metoda konverguje $\Leftrightarrow \vec{e}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

R

relaxační matice

v této (nezrušivé) $\Leftrightarrow \rho(\mathbb{R}) < 1$
 normě která chyba monotónně,

ale v euklidovské zdaleka nemusí!



Poznámka: Pokud $\vec{e}^{(n)} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{v}_j$ kde $(\vec{v}_j)_{j=1}^m$ jsou

vl. vektory IR
přisloušící (λ_j) ($|\lambda_j| < 1$)

$$\vec{e}^{(n+1)} = R \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \vec{v}_j \right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j R \vec{v}_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \vec{v}_j$$

Podle $|\lambda_j| \ll 1 \quad \forall j$, pak $\vec{e}^{(n)}$ konverguje k $\vec{0}$ "rychle"
 $\rho(R) \ll 1$

Příklad: Jacobiho iterativní metoda: $A = -L + D - U$

$$\vec{u}^{(n+1)} = \vec{u}^{(n)} + M^{-1} (f - A \vec{u}^{(n)})$$

v J. metodě volíme $M = D \Rightarrow M^{-1} = D^{-1}$ což umíme

$$D \vec{u}^{(n+1)} = D \vec{u}^{(n)} + (f - D \vec{u}^{(n)} + (L + U) \vec{u}^{(n)})$$

$$D \vec{u}^{(n+1)} - (L + U) \vec{u}^{(n)} = f$$

Pozn. - nejprve vl. čísla A
pro úlohu ještě jednodušší
než

$$\delta_x u + a \delta_x^2 u = 0,$$

protože tam by Jacobiho metoda nekonzvergovala

Poznámka: Rothho metoda

$$\delta_x u = \partial_{xx} u \quad \downarrow u = u(x)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \partial_{xx} u^{n+1}$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \partial_{xx} u^{n+1}$$

Řešence úlohy, kterou je nutné řešit iterativní metodou



Uvažujeme úlohu pro Poissonovu rovnici v 1D na $\Omega = (0, 1)$

$$-u'' = f$$

s okraj. podmínkami $u(0) = u(1) = 0$

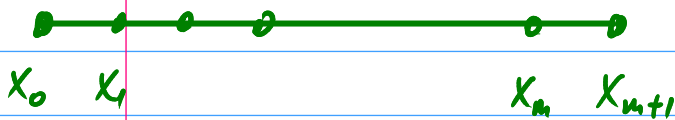
$$\Leftrightarrow -\delta_{xx} u_h = f_h$$

$$-\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{\Delta x^2} = f_k$$

$\forall k = 1, \dots, m$

$u_k = 0$
 $\forall k \in \{0, m+1\}$

PROSTOR DISKRETIZACE



$$\Rightarrow u_h \in \mathbb{R}^m$$

je soustava lin. rovnic ve tvaru

$$Au = f_h \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ukážeme, že vl. vektory A jsou $\underline{(\vec{v}_j)_k} = \sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right)$ $\forall j = 1, \dots, m$

$\forall k = 1, 2, \dots, m-1, m$

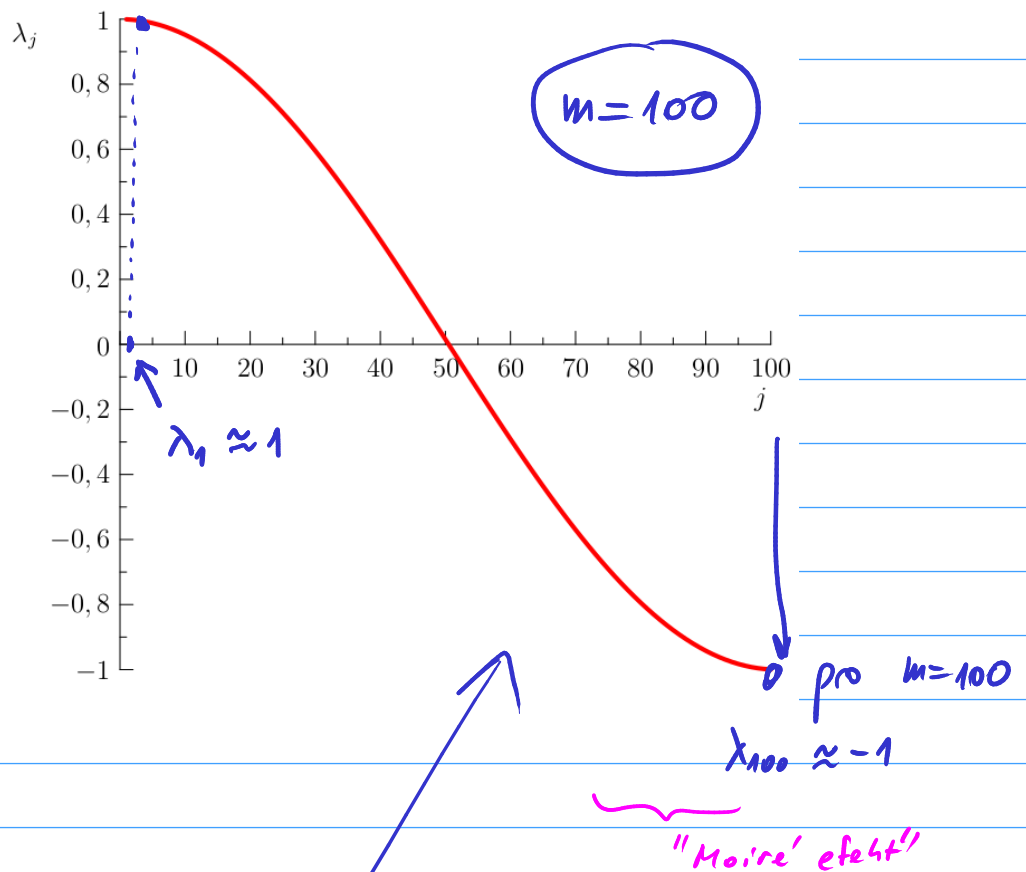
$$\begin{aligned} (A \vec{v}_j)_k &= -\sin\left(\frac{j(k-1)\pi}{m+1}\right) + 2\sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right) - \sin\left(\frac{j(k+1)\pi}{m+1}\right) \\ &= 2 \left(1 - \cos\left(\frac{j \pi}{m+1}\right)\right) \sin\left(\frac{j k \pi}{m+1}\right) \end{aligned}$$

$$\tilde{\lambda}_j$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{2} I$$

$$R = I - M^{-1}A = I - D^{-1}A = I - \frac{1}{2}A$$

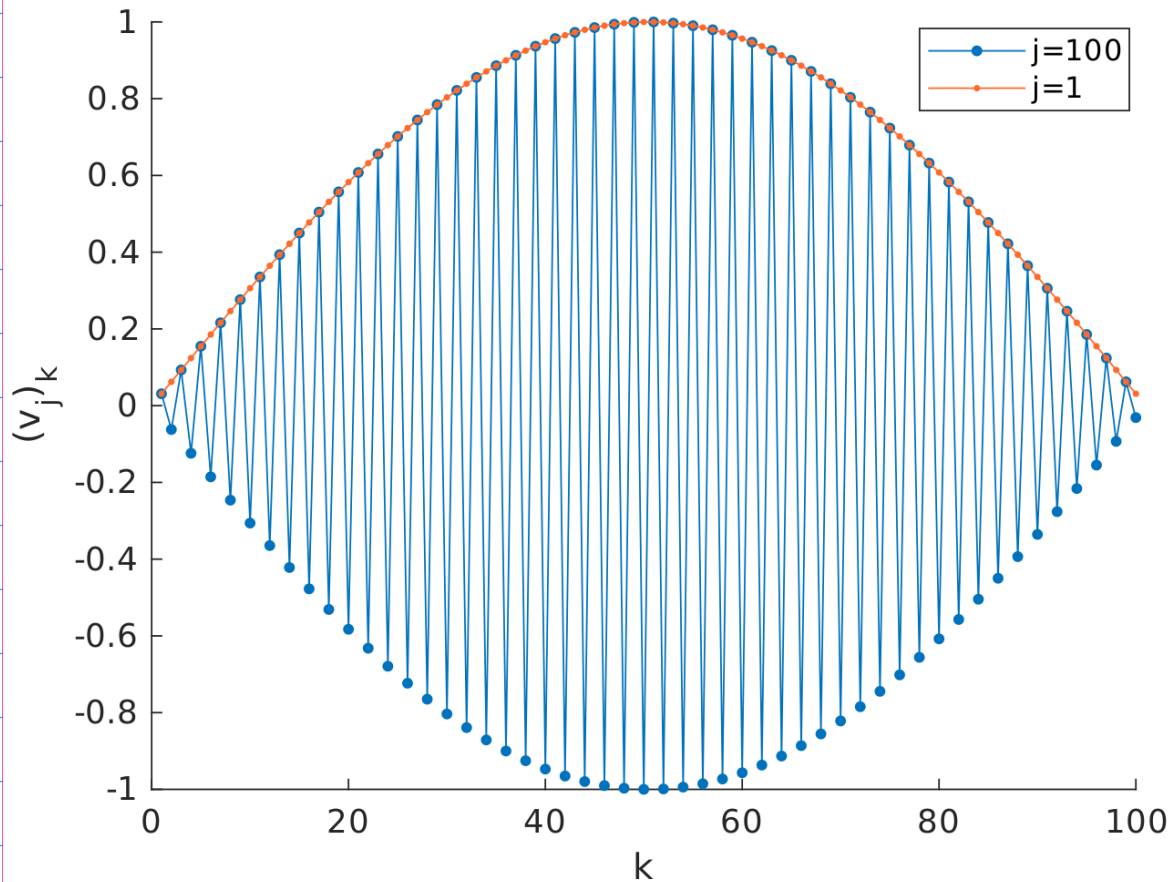
$$\Rightarrow \lambda_j = 1 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_j = 1 - \left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right) \right) = \cos\left(\frac{j\pi}{m+1}\right)$$



záporná vl. čísla ... pro $j > \frac{m}{2}$

složky chyby sčítají znaménko, ale v abs. hodnotě se chovají jako pro λ_ℓ , kde $\ell = m+1-j$

Složky příslušných vlastních vektorů



=> Teo. TLUMENA' JACOBIHO METODA

Jacobi:

$$D\vec{u}^{(n+1)} - (L+U)\vec{u}^{(n)} = \vec{f}$$

$$D\vec{u}^* - (L+U)\vec{u}^{(n)} = \vec{f}$$

$$\vec{u}^{(n+1)} = \omega \vec{u}^* + (1-\omega)\vec{u}^{(n)}$$

$\omega = 1 \Rightarrow$ "obyč." Jacobiho m. $\omega \in (0,1)$

iteration: $\vec{u}^{(k+1)} = \omega \left[\vec{u}^{(k)} + D^{-1} (F - A\vec{u}^{(k)}) \right] + (1-\omega)\vec{u}^{(k)}$

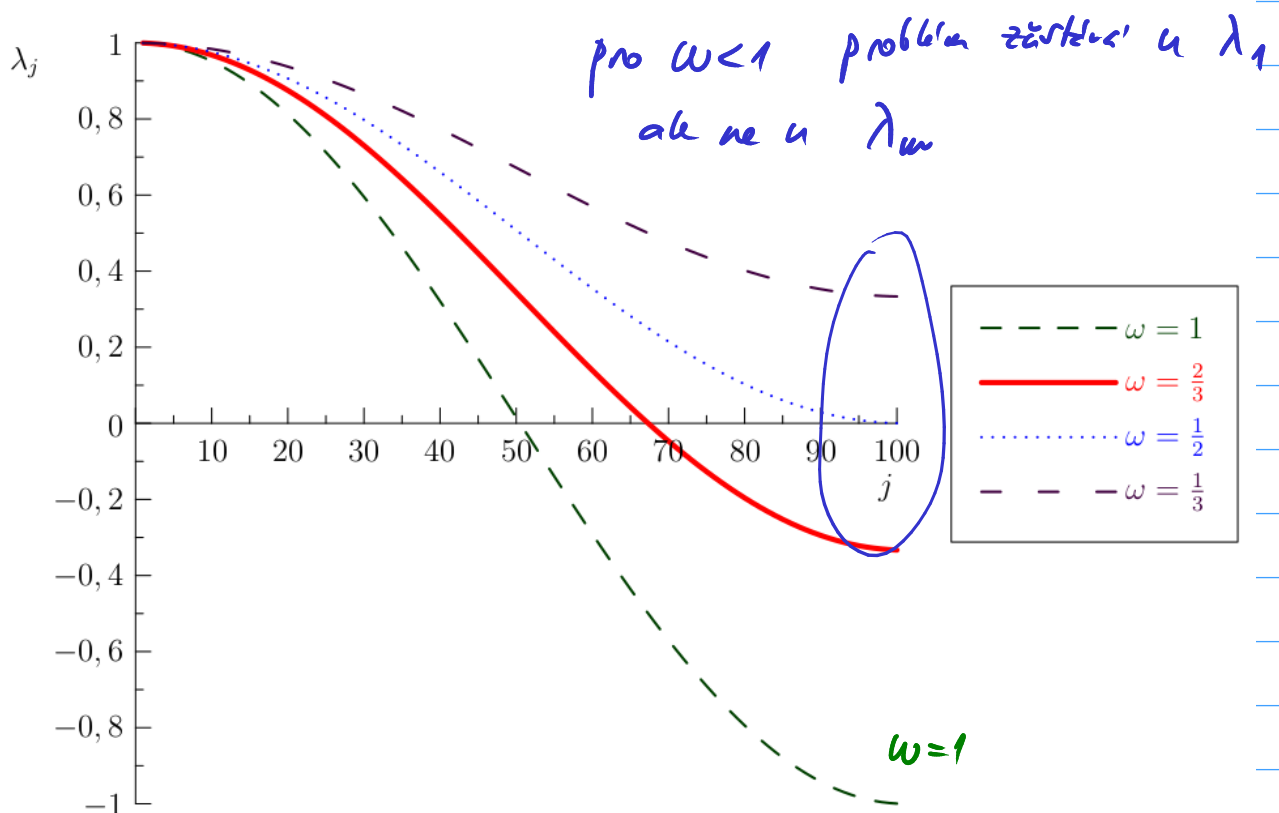
$$= \vec{u}^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1} (F - A\vec{u}^{(k)})}_{M^{-1}}$$

$t_j: \underline{M = \omega^{-1} D}$

$$R = I - M^{-1}A = I - \omega D^{-1}A = I - \frac{\omega}{2}A$$

$$\Rightarrow \lambda_j = 1 - \frac{\omega}{2} \tilde{\lambda}_j = 1 - \frac{\omega}{2} \cdot 2 \left(1 - \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) \right)$$

$$= 1 - 2\omega \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2(n+1)} \right)$$



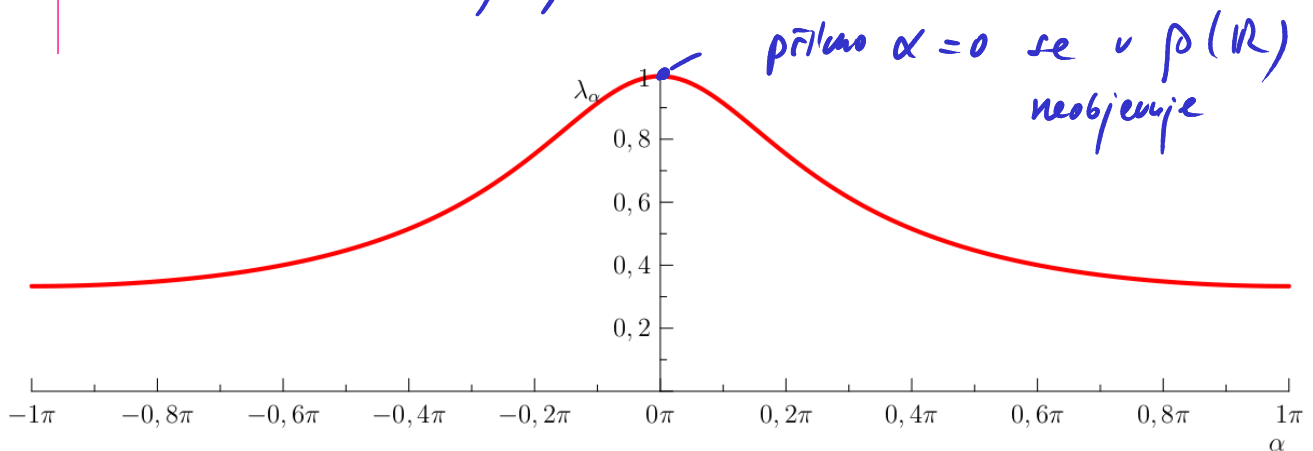
Pozn : Gaussova-Seidelova metoda : $M = -L + D$

$$\Leftrightarrow (-L + D)\vec{u}^{(n+1)} - U\vec{u}^{(n)} = \vec{f}$$

ale \vec{v}_j, λ_j neumíme přesně spočítat

\Rightarrow Von Neumannova spektrální analýza

\Rightarrow obdobný výsledek



ŘEŠENÍ - URÝCHLENÍ KONVERGENCE


je METODA ŘEŠENÍ NA VÍCE SÍTÍCH
tzv. MULTIGRID metoda

Uvažujme dvě sítě

- 1) o $(m+2)$ prvcích (jemná)
s krokem $h = \Delta x$
(m sude)

- 2) o $\frac{m+2}{2}$ prvcích (hrubá)
s krokem $2h$

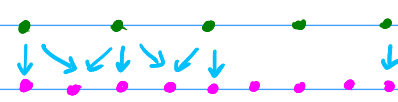
Def. operátory přechodu mezi sítěmi



$$\vec{v}_{2h} = I_h^{2h} \vec{v}_h \quad \text{hde} \quad v_{2h,k} = v_{h,2k} \quad (\text{restrikce})$$

funguje jen pro nulovou okraj. podm.

$$\vec{v}_h = I_{2h}^h \vec{v}_{2h} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 2 & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_{2h}$$



(interpolace)

$J \in \mathbb{R}^{(m+2) \times (\frac{m}{2}+1)}$

pozn: Restrikce lze i: $\vec{v}_{2h} = I_h^{2h} \vec{u}_h = J^T \vec{v}_h$

Korekční schéma na 2 sítích

řešíme $A\vec{u} = \vec{f}$ na 2 sítích:

$$A_h \vec{u}_h = \vec{f}_h \quad , \quad A_{2h} \vec{u}_{2h} = \vec{f}_{2h}$$

jemná
hrubá

1) provedeme několik (ν_n) iterací řešení $A_h \vec{u}_h = \vec{f}_h$ na jemné síti
 \Rightarrow spočítáme \vec{r}_h

2) omezuje ν ze sítě "h" na "2h": $\vec{r}_{2h} = I_h^{2h} \vec{r}_h$

(přisloušící chyba \vec{e}_h , a tedy ani \vec{r}_h už neobracuje vysokofrekvenční složky)

$$A_{2h} \vec{e}_{2h} = \vec{r}_{2h}$$

3) provedeme ν_2 iterací řešení $A_{2h} \vec{e}_{2h} = \vec{r}_{2h}$ na hrubší síti "2h" \Rightarrow utlumí se rychleji i nižší frekvence chyby

4) interpolujeme \vec{e}_{2h} na jemnější síť $\vec{e}_h = I_{2h}^h \vec{e}_{2h}$
a provedeme opravu $\vec{u}_h := \vec{u}_h + \vec{e}_h$

5) provedeme ν_2 iterací řešení $A_h \vec{u}_h = \vec{f}_h$ opět na jemnější síti s krokem "h"

Zobecnění – přechody mezi více úrovněmi sítí

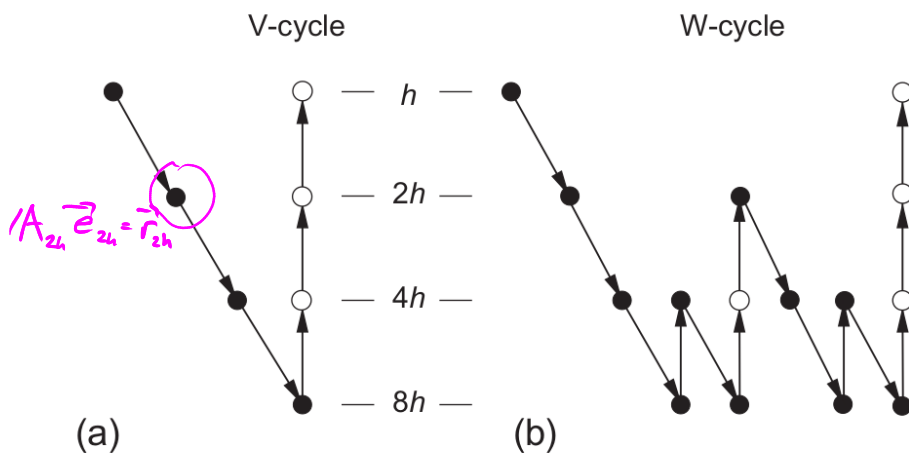
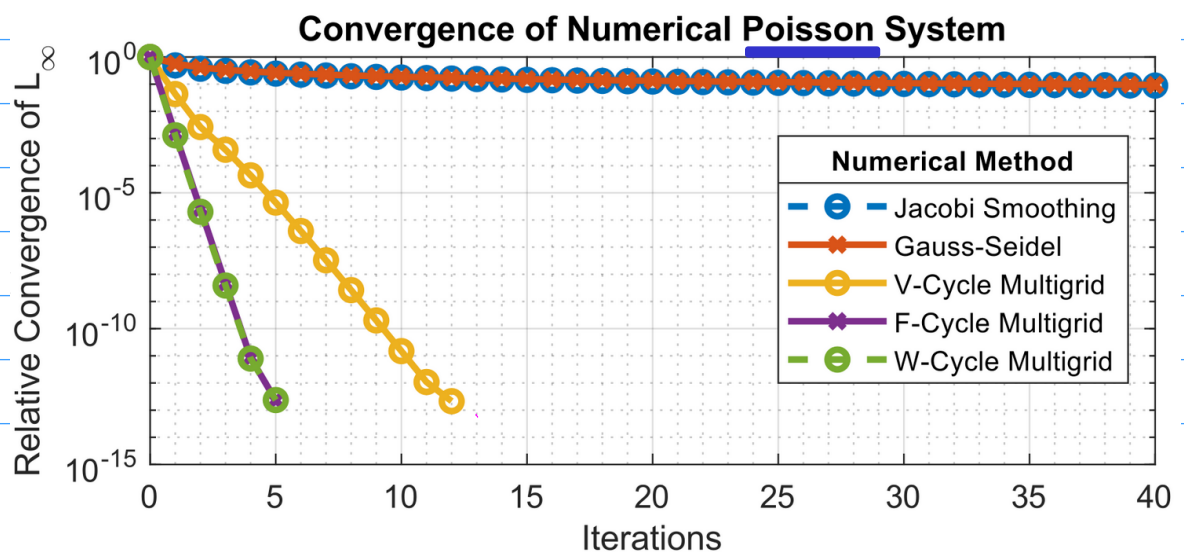
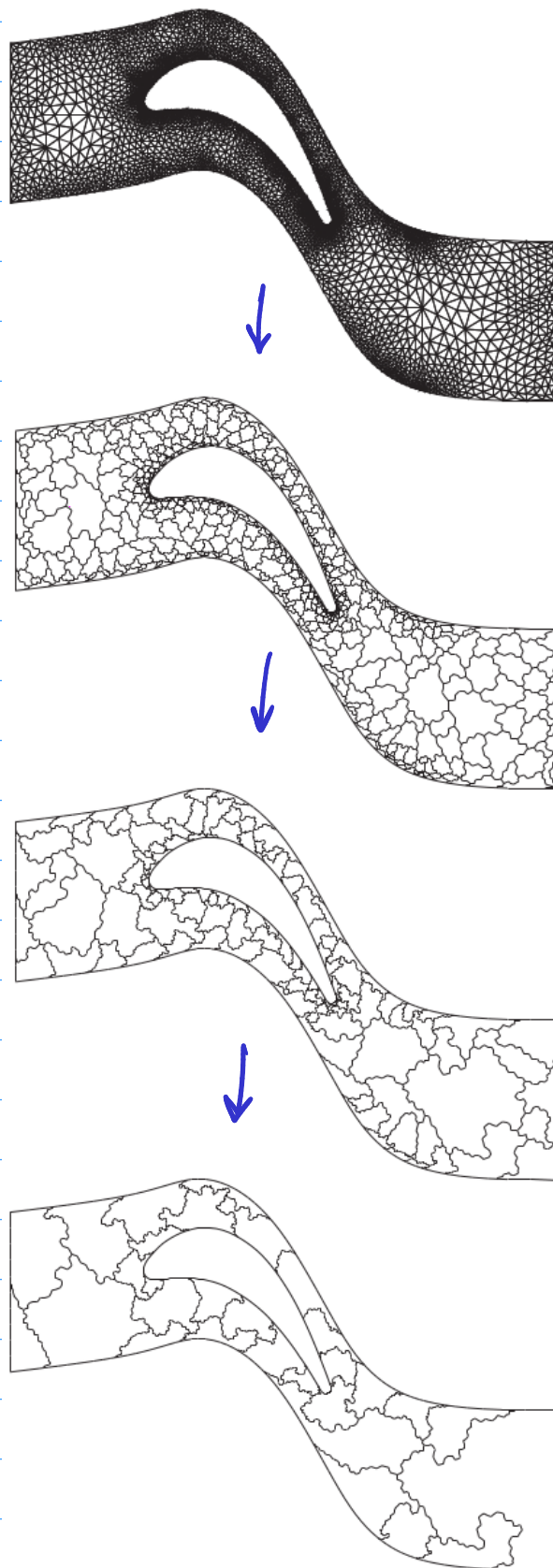


Figure 9.5 Types of multigrid cycles. • denotes time steps before restriction; ○ represents time steps after prolongation.



MULTIGRID VE 2D NA NESTRUKT SITI



[Blazek - CFD
Principles &
Practice]

ZAJÍNAVOST - PÁLÍ METODY V CFA

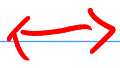
• ALE - Arbitrary Lagrangian Eulerian - MKP + polyblend sítí

• částečné / bezsíťové metody

↳ DEM --- Discrete Element Method
(interakce mezi částicemi - kolize)

↳ MP-PIC (Multiphase Particle-in-Cell)

MKO
(průběh)



pohyb částic

• Viscous Vortex Particle Method

↳ virtuální částice reprezentují vířvy v turbulentním proudění