nezapomeňte vyplnit !

01MAN: **Vzorový** zápočtový test č. 1		Var. **X**	Datum:	31.10.2024		
Jméno a příjmení:	Kroužek	Příklad č.	1	2	3	Celkem
PAVEL STRACHOTA	10	Body	5	5	5	15

vyplní opravující

Pokyny:

- Obdržel(a) jste 1 list se zadáním a 2 prázdné listy s hlavičkou.
- **Ihned** po obdržení zadání **čitelně** napište vaše **jméno, příjmení a číslo kroužku** na **všechny** listy.
- Vypracujte řešení každého příkladu na **samostatném listu**. Příklad **č. 1** vypracujte na **tento** list.
- **Odevzdejte vždy všechny 3 listy** seřazené shora dolů v pořadí příkladů 1,2,3.
  Nerespektování tohoto pokynu znamená hodnocení testu 0 body!
- Čas na vypracování testu je **45 minut**.

Zadání:

[1.] (5 bodů) Zapište pomocí kvantifikátorů následující výrok:
Pro všechna kladná ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna přirozená čísla n větší než n_0 je n-tý člen posloupnosti (a_n) vzdálen od čísla c o méně než ε.
English version for convenience of foreign students: *For every positive ε, there exists a natural number n_0 such that for every natural n greater than n_0, the distance of the n-th term of the sequence (a_n) from the number c is smaller than ε.*
Poté zapište **negaci** tohoto výroku, a to jak pomocí kvantifikátorů, tak i slovně.

[2.] (5 bodů) Pro reálnou funkci reálné proměnné

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

nalezněte její definiční obor D_f, obor hodnot H_f a množinu $f(\langle 3,4\rangle)$.

[3.] (5 bodů) Zapište pomocí kvantifikátorů a **konkrétně** dvojici výroků, která je ekvivalentní se vztahem

$$\inf\left\{ \sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\} = 0,$$

a poté tyto výroky dokažte.

řešení 1. příkladu na tento papír (i na druhou stranu)

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}, n>n_0)(|a_n-c|<\varepsilon)$

nebo $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n>n_0 \Rightarrow |a_n-c|<\varepsilon)$

negace: $(\exists \varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n\in\mathbb{N}, n>n_0)(|a_n-c|\geq\varepsilon)$

nebo $(\exists \varepsilon>0)(\forall n_0\in\mathbb{N})(\exists n\in\mathbb{N})(n>n_0 \wedge |a_n-c|\geq\varepsilon)$

mimochodem, pozor na toto

negace slovy: Existuje kladné ε takové, že nad každým přirozeným n_0 se najde nějaké n takové, že vzdálenost a_n od c je alespoň ε.

nezapomeňte vyplnit hlavičku!

01MAN: Zápočtový test č. 1		Var.	X	Datum: 31.10.2024
Jméno a příjmení:	Kroužek	Příklad č.		2
PAVEL STRACHOTA	10	Body		

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

- přirozený def. obor je $\underline{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$
- obor hodnot H_f:

$$H_f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in D_f)(f(x) = y)\}$$

konkrétně:

$$H_f = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})(\tfrac{x+1}{x-1} = y)\}$$

tj. $y \in H_f \iff$ najdeme x tak, že $\frac{x+1}{x-1} = y$

$$x+1 = y(x-1)$$
$$y+1 = x(y-1)$$
$$\frac{y+1}{y-1} = x \quad \Rightarrow \text{ k lib. } y \neq 1 \text{ najdeme } x$$
$$\Rightarrow \underline{H_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

- $f(\langle 3,4 \rangle) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \langle 3,4 \rangle)(y = \frac{x+1}{x-1})\}$

$$= \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in \langle 3,4 \rangle)(x = \tfrac{y+1}{y-1})\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R} \mid 3 \leq \tfrac{y+1}{y-1} \leq 4\}$$

POZN: kdybychom už teď uměli vyšetřovat průběh funkce, zjistili bychom snadno $f(\langle 3,4 \rangle) = \langle f(4), f(3) \rangle$

tj. $y \in f(\langle 3,4 \rangle) \iff 3 \leq \frac{y+1}{y-1} \leq 4$

pro $y > 1$:

$3y - 3 \leq y+1 \quad \wedge \quad y+1 \leq 4y - 4$

$2y \leq 4 \qquad\qquad 5 \leq 3y$

$y \leq 2 \qquad\qquad \frac{5}{3} \leq y$

$y \in \langle \frac{5}{3}, 2 \rangle$

pro $y < 1$ ... $y \geq 2 \wedge y \leq \frac{5}{3}$ nemá řešení

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(\langle 3,4 \rangle) = \langle \tfrac{5}{3}, 2 \rangle}}$$

nezapomeňte vyplnit hlavičku!

01MAN: Zápočtový test č. 1		Var.	X	Datum: 31.10.2024
Jméno a příjmení:	Kroužek	Příklad č.		3
PAVEL STRACHOTA	10	Body		

$\alpha = \inf A \iff$ 1. $(\forall x \in A)(x \geq \alpha)$
2. $(\forall \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha')$

ale konkrétně pro $A = \{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ to znamená

$0 = \inf A \iff$ 1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \geq 0)$
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} < \varepsilon)$

ověříme výrok 1

$$\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} \geq 0$$
$$\sqrt{n+5} \geq \sqrt{n+2} \quad \Big|^2$$
$$n+5 \geq n+2$$
$$5 \geq 2 \quad \checkmark$$

ověříme výrok 2

$$\sqrt{n+5} - \sqrt{n+2} < \varepsilon \quad \ldots$$ hledáme n k danému ε

vzorec
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\frac{(n+5)-(n+2)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}} < \varepsilon$$

hrubý odhad:

$$\frac{3}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}} < \frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ pokud $\frac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, tj. $n > \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2$, bude splněna i 2

konkrétní n: např. $n = \left[\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2\right] + 1$

celá část