CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

Prof. Ing. Edita Pelantová, CSc.
Jana Vondráčková, prom. mat.

2009
České vysoké učení technické v Praze

ISBN 978-80-01-04346-2

P ř e d m l u v a

Toto skriptum je určeno studentům 1. ročníku FJFI ČVUT. Má sloužit jako sbírka příkladů k přednášce "Matematická analýza".

Sbírka je zaměřena na úvodní partie přednášky a obsahuje též nutné doplňky ke středoškolské látce. První část sbírky je věnována prohloubení a doplnění středoškolské látky; jejím cílem je vyplnit mezeru mezi středoškolskými sbírkami příkladů a sbírkami vysokoškolskými, které se těmto partiím nevěnují buď vůbec nebo v nedostačující míře. Další části obsahují úlohy k přednášce zimního semestru.

Potřebnou průpravu pro práci se sbírkou získá student na přednáškách a cvičeních, proto jednotlivé kapitoly neobsahují teoretický úvod ani řešené příklady. Obtížnější cvičení jsou označena hvězdičkou. Pro kontrolu jsou uvedeny výsledky úloh.

Část příkladů je původních, část je převzata a uspořádána z jiných sbírek (E. Navrátil : Cvičení z analýzy; J. Reiterman, V. Rödl, L. Vrána : Cvičení z analýzy).

Závěrem chceme poděkovat Jiřímu Pytlíčkovi, odbornému asistentovi katedry matematiky FJFI, za práci, které se ochotně ujal jako recenzent tohoto skripta, i za mnoho cenných rad a podnětů. Dále děkujeme Ing. Evě Stejskalové za pečlivý odborný přepis.

Praha, duben 1990

Autorky

OBSAH

ROVNICE A NEROVNICE

Řešte v R rovnice:

1. a) $x^2 + 2x - 35 = | x - 5 |$ b) $| x^2 + 2x - 35 | = x - 5$

2. $\sqrt{4 - x + 4\sqrt{-x}} = 4 - \sqrt{4 - x - 4\sqrt{-x}}$

3. $x^2 + \left(\dfrac{x}{x-1} \right)^2 = 15$

   (Návod: zaveďte substituci $u = x + \dfrac{x}{x-1}$)

4. $2x^5 + x^4 - 19x^3 = 2 + x - 19x^2$

5. Při kterém a je jeden kořen rovnice

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$$

   dvojnásobkem druhého?

6. Při kterém a je rozdíl kořenů rovnice

$$2x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0$$

   roven jejich součinu?

7. Pro která a má rovnice

$$\left(a + 1 - |x-1| \right) \left(a + x^2 - 2x \right) = 0$$

   právě 3 kořeny?

8. Určete nejmenší a největší z celých čísel n , pro něž má rovnice

$$nx^2 + 8x + n + 8 = 0$$

   reálné kořeny!

Řešte v R nerovnice:

9. $4x + 5 \le ax + 3$

10. $\dfrac{1}{x} < 1$

11. $\dfrac{1}{1-x} \ge -3$

12. $\dfrac{1}{2x} \ge \dfrac{1}{1-x}$

13. $\dfrac{2x+5}{x+6} < 2$

14. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{4x-5}{7} > x + 3 \qquad , \qquad \frac{3x+8}{4} > 2x - 5 .$$

Najděte všechna x , která

a) vyhovují oběma nerovnicím;

b) vyhovují alespoň jedné z obou nerovnic;

c) vyhovují nejvýše jedné z obou nerovnic;

d) vyhovují právě jedné z obou nerovnic;

e) nevyhovují žádné z obou nerovnic.

16. Je dána soustava nerovnic

$$3x - \frac{1}{2} < 5x \qquad , \qquad 2x + 1 < \frac{7}{2}x .$$

Sečteme-li obě nerovnice, dostaneme $5x + \frac{1}{2} < \frac{17}{2}x$, odtud $x > \frac{1}{7}$.

Dostali jsme tak hledané řešení soustavy? Svoje tvrzení zdůvodněte.

17. Řešte soustavu

$$\frac{5-4x}{3} + \frac{1}{2} < x - \frac{2x+1}{4} \quad , \quad \frac{x+2}{5} > \frac{5x}{7} + x .$$

Řešte v R nerovnice:

18. $\frac{2x+1}{3} - x \le -\frac{1}{3}x + x^2$

19. $(x-3)(x-7) < 5(x-3)$

20. $\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2x+2} < 1$

21. $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x-2}$

22. $x^2 - \sqrt{x} \ge 0$

23. $\sqrt{1+x^2} < 1 - x$

24. $\sqrt{3x+x^2} < 4 - x$

25. $\frac{|3-5x|}{x-2} > 6$

26. $|x+7| > |x-4|$

27. $\left| \frac{2x-3}{x+1} \right| < 1$

28. $|x| > 2\sqrt{x^2-2x+1}$

29. $|3x-2| - 5 < |x+1|$

30. $3x - 1 < |x| < 3x + 1$

31. $|3x-5| < |2x+1| + |x-4|$

32. $\frac{1}{|2x-3|} + 8 \ge \frac{5}{|3-2x|}$

33. $\frac{|2-x| - x}{|x-3| - 1} \le 2$

34. a) $(x-2)(x+3) < 0$ b) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \le 0$

c) $x^2 - x + 1 > 0$ d) $2x^2 - 3x + 2 \le 0$

35. $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} < 0$

36. $\frac{x^2 + 4x - 1}{x + 2} \ge 2$

37. $\frac{x^2 + 2x - 5}{x + 1} \le 2$

38. $x - 1 \ge \frac{5x + 9}{x - 3}$

39. $\quad \dfrac{\ldots}{2-x} \quad \dfrac{\ldots}{2+x}$

41. $(x^3+3x^2+3x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

42. $\dfrac{x}{x^2+7x+12} < \dfrac{x}{x^2+3x+2}$

43. Pro která t rovnice $x^2 + tx + t + 8 = 0$

a) má oba kořeny reálné a různé; b) má jeden dvojnásobný kořen;

c) nemá reálné kořeny?

44. Určete všechna reálná a tak, aby nerovnice

$$(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2 > 0$$

byla splňena pro všechna reálná x.

45. Pro která a vyhovují nerovnici

$$ax^2 + (a-2)x + a^2 + \frac{1}{a} > 0$$

všechna reálná x ?

Řešte v R nerovnice:

46. $\sqrt{2x+3} \geq x$

47. $x - \sqrt{1-x} \leq 0$

48. $\dfrac{\sqrt{2x-2}}{2-x} < \dfrac{1}{2}$

49. $\sqrt{2x-x^2} > 1-x$

50. $(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \leq 0$

51. $\sqrt{1-x} - \sqrt{x} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

52. $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$

53. $3x + \sqrt{5x+9} < -5$

54. $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} < 5$

55. $\dfrac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2} > \dfrac{2}{9}$

56. $\sqrt{(x-2)^2-\sqrt{6-(x-2)^2}} \geq x-2$

57. $x^2 + 3|x| < 10$

58. $|\, x^2- 2x- 7 \,| \leq 1$

59. $|\, x^2 - 4x \,| < 5$

60. $\dfrac{|x^2-4x-5|}{x+4} \geq x$

61. $\dfrac{3|(x+3)(x+2)|}{x} \geq -1 - |x+1|$

62. $\dfrac{|x|}{x+2} - \dfrac{2x}{|x-3|} < 1$

63. $\dfrac{|2x(x+5)|}{x+2} \geq -3 + |7+2x|$

64. $\dfrac{|x^2-25|}{x+1} \leq 3 - |x-2|$

65. $\dfrac{9 + |x^2-1|}{x} \geq |x| - 1$

66. $\dfrac{1 - \left(|x|+2\right)}{x - 5} \leq |x+1|$

67. $\dfrac{|x-5| . \sqrt{x-1}}{x - 3} \leq 2 + |x-4| - |x-2|$

68. $| 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 | \leq | 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 |$

69. $1 - | 4x^3 - 6x + 1 | \geq 0$

70. Objasněte, proč nedefinujeme $\log_a x$, je-li

a) $x \le 0$; b) $a \le 0$; c) $a = 1$.

71. Vypočtěte:

a) $\log_{25} \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\log_2 \sqrt{\dfrac{8}{\sqrt{2}}}$ c) $100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}}$

d) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log(16)}}$ e) $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$

72. Vyjádřete pomocí $\log 2$ a $\log 3$ výrazy: a) $\log 5$

b) $\log \sqrt[5]{\dfrac{243}{5}}$ c) $\log \sqrt{12{,}5\,\sqrt[3]{8^{-2}.5^{-0.5}}}$

73. Zjednodušte a určete, pro které hodnoty a, resp. b mají výrazy smysl:

a) $\log_a \left[a \left[a\,(a)^{\frac{1}{4}} \right]^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{2}}$ b) $\log_a \left(\sqrt[2]{a}\,\sqrt[4]{a}\,\sqrt[8]{a} \ldots \sqrt[2^n]{a} \right)$ $(n \in N)$

c) $\dfrac{\log^2 \left(\dfrac{2^a}{3^b} \right)}{2a.\log\sqrt{2} - 3.\log\sqrt[3]{3^b}}$ d) $\log_{a-b}\left(a^3-b^3+a^2b-ab^2\right)$

e) $\dfrac{1 + |\log a|}{\log(10a).\log\left(\dfrac{10}{a}\right)}$ f) $10^{|\log a|}$

g) $a^{\frac{1}{\log a}}$ h) $a^{10^{-\log\sqrt{\log^2 a}}}$

74. Buďte a, b, x kladná čísla, $a \ne 1$, $b \ne 1$.

Potom platí $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$. Dokažte.

75. Vypočtěte:

a) $\dfrac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \dfrac{\log_5 750}{\log_6 5}$

b) $\left[(3)^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}} - 9.(4)^{\frac{1}{\log_4 3}} + (4)^{1+\log_4 25} \right]^{\frac{1}{2}}$

76. **Zjednodušte a určete, kdy mají výrazy smysl:**

a) $(a)^{\frac{\log_x(\log_y a)}{\log_x a}}$ b) $(a)^{\frac{1}{\log_x a} \cdot \frac{1}{\log_y x} \cdot \frac{1}{\log_z y}}$

c) $(a)^{1-b^{1+\log_b \log_a x}}$

77. **Uspořádejte podle velikosti čísla**

$x_1 = a^{a^a}$, $x_2 = (a^a)^{a^a}$, $x_3 = ((a^a)^a)^a$, $x_4 = a^{(a^a)^a}$, $x_5 = (a^{a^a})^a$

pro následující případy:

a) $a = 3$; b) $a = \sqrt{2}$; c) $a = \log 2$.

78. **Řešte rovnice (neznámá je x):**

a) $\log(x+a) = \log x + a$ b) $\log(ax) = a.\log x$

c) $\log_a \log_b \log_c x = 0$ d) $\log \log(x+a) = \log \log x + \log 2$

e) $\log_x a = a$ f) $\log_{a^2}(x) + \log_{x^2}(a) = 1$

79. **Řešte rovnice:**

a) $\log_{(1+x)}\left(2x^3+2x^2-3x+1\right) = 3$

b) $\dfrac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_x 2} - \log_3\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$

c) $\log_{(3x+7)}\left(9+12x+4x^2\right) + \log_{(2x+3)}\left(6x^2+23x+21\right) = 4$

d) $\left(2x^2-5x+2\right)\left(\log_{2x}(18x) + 1\right) = 0$

e) $\log\left(x+1\right) + \log\left(x^3+1\right) = 4\log x$

f) $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2$

80. **Určete všechna k, pro která má následující rovnice právě jedno řešení:**

$$\log(kx) = 2\log(x+1) .$$

81. **Nechť k je přirozené číslo, které není rovno celé mocnině deseti. Potom log k je číslo iracionální. Dokažte.**

82. Řešte rovnice:

a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

b) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3 (x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$

d) $\log_3\left(3^x-8\right) = 2-x$

e) $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3} + 1}$

f) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$ g) $x^{\log x} = 100x$

83. Nalezněte řešení soustavy:

a) $3^x . 2^y = 576$, $\log_{\sqrt{2}} (y-x) = 4$

b) $\log_x y - 4 \log_y x = 3$, $xy = 2$

84. Řešte nerovnice:

a) $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0$ b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x-3}{x+3} \geq -\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{\log_2 x - 2\log_x 2 - 1}{\log_x 2} \geq 0$ d) $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-3}{1-x}} < 1$

e) $\left(\log_x 2\right) . \left(\log_{2x} 2\right) . \left(\log_2 4x\right) > 1$

85. Řešte nerovnice:

a) $3^{2x} < 7.3^4 + 9^2 . \log_3 9$ b) $\sqrt{4.3^{-x} - 3} < \left(\sqrt{3}\right)^x$

c) $\frac{4}{7} \sqrt{4-4.7^x+7^{2x}} > 7^{2x-1} - 4.7^{x-1} + 1$

d) $\left(2^{x+1} - 3^{x+1}\right) . \sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} . 3^x + 11.3^{2x}} \geq 0$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Základní vztahy:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \left(x \neq k\pi,\ k \in Z\right)$$

86. Pomocí základních vztahů dokažte:

a) $|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$ b) $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$

c) $\sin(2x) = 2\sin x.\cos x$ d) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

e) $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} y}$ (má-li pravá strana smysl)

f) $|\sin x| = \dfrac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ $\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)$

g) $|\cos x| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$ $\left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right)$

h) $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ i) $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

87. Vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(x \neq 2k\pi+\pi,\ k \in Z)$.

88. Dokažte:

a) $\sin x + \sin y = 2.\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b) $\sin x - \sin y = 2.\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

c) $\cos x + \cos y = 2.\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

d) $\cos x - \cos y = -2.\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

89. Vyjádřete pomocí součtu funkcí sin, resp. cos:

a) $\sin x.\sin y$ b) $\cos x.\cos y$ c) $\sin x.\cos y$

90. Dokažte:

a) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ b) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

c) $\sin x = \sin(\pi - x)$ d) $\cos x = -\cos(\pi - x)$

91. Vypočtěte bez použití tabulek:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$

92. a) Spočítejte $\sin\frac{x}{2}$, když víte, že $\mathrm{tg}\ x = 2$ a $x \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$.

b) Spočítejte $\cos\frac{x}{2}$, když víte, že $\mathrm{cotg}\ x = -3$ a $x \in (0,\pi)$.

c) Spočítejte $\mathrm{tg}\ 2x$, když víte, že $\mathrm{cotg}\ x = -3$.

d) Spočítejte $\mathrm{cotg}\ \frac{x}{2}$, když víte, že $\sin x = \frac{1}{3}$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

93. Dokažte, že

$$\frac{1-4.\sin(10^\circ)\sin(70^\circ)}{2.\sin(10^\circ)} = 1$$

94. Které z čísel je větší: $\cos 2^\circ$ nebo $\cos 2$?

95. Jaký vztah platí mezi x a y, je-li

a) $\sin x = \sin y$; b) $\cos x = \cos y$; c) $\mathrm{tg}\ x = \mathrm{tg}\ y$?

Řešte rovnice:

96. a) $\sin x = 0$ b) $\cos x = 0$ c) $\sin x = 1$

d) $\cos x = -1$ e) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\mathrm{tg}\ x = \sqrt{3}$

g) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $\mathrm{cotg}\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

97. a) $\sin(7x) = \sin(10x)$ b) $\sin(3x) = \cos(2x)$

c) $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{5}\right) = \mathrm{cotg}\left(\frac{x}{4}\right)$ d) $2.\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

98. a) $\sqrt{1 - \cos(2x)} = \sin(2x)$

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos(2x)$

c) $2.\sin^2 x + (2 + \sin^2 x).\cos^4 x = 2$

d) $\mathrm{tg}^3 x - 6.\mathrm{tg}^2 x + 12.\mathrm{tg}\ x - 7 = 0$ e) $\sqrt{2}.\cos x = \sqrt{-3\sqrt{3}.\sin x - 4}$

f) $4.\sin^3 x + 4.\sin^2 x - 3.\sin x - 3 = 0$ g) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$

h) $\sin x.\sin(7x) = \sin(3x).\sin(5x)$

i) $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = \cos x + \cos(2x) + \cos(3x)$

j) $1 + \cos x = \mathrm{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)$ k) $\mathrm{tg}\ x = 2.\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

l) $\sqrt{2}.\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \cos x$

99. Výraz $A.\sin x + B.\cos x$ je možno vždy psát ve tvaru $K.\sin(x+\phi)$, kde K, ϕ nezávisí na x. Určete hodnoty K a ϕ.

100. Řešte rovnice:

a) $\sin x + \sqrt{3}.\cos x = 1$ b) $\sin(3x) + \cos(3x) = \sqrt{2}$

101. Kolik kořenů má rovnice $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 1$ v intervalu $0,001 < x < 0,002$?

102. Pro která a má rovnice $\cos\left(\sqrt{a-x^2}\right) = 1$ právě 8 řešení?

Řešte rovnice:

103. a) $\cos(2x-1) = \cos(x^2)$ b) $\sin x = \sin(x^2)$

c) $\sin x = \left(\sin x\right)^2$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cos x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sin x\right)$

104. $|\sin(2x)| = \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

Řešte nerovnice:

105. a) $\sin x \le \cos x$ b) $\operatorname{tg} x \ge \operatorname{cotg} x$

c)* $\operatorname{tg} x > \cos x$ pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

106. a) $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$ b) $\operatorname{tg} x\left(1 + \cos(2x)\right) < \cos(2x).\operatorname{tg}(2x)$

c)* $\sin(5x) > 16.\sin^5 x$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

107. Řešte rovnice:

a) $\left(\log_2 x - 3\right)\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

b) $\log_2(-\sin x) - \log_4(\cos x) = -\frac{1}{2} + \log_4 3$

c) $9^{\sin^2 x} + 4.9^{\cos^2 x} = 15$

108. Nalezněte všechna a, pro která kořeny rovnice

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

jsou stejné jako kořeny rovnice

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{1/\sqrt{2}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1.$$

109. Porovnejte podle velikosti čísla

$\log_{\frac{1}{7}}(\cos 46^\circ)$ a $\log_{\frac{1}{6}}(\sin 46^\circ)$.

110*. Kolik kořenů má rovnice $8x\left(1-2x^2\right)\left(8x^4 - 8x^2 + 1\right) = 1$ v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$?

(Návod: vyjádřete x pomocí goniometrické funkce.)

111*. Řešte rovnici: $\sqrt{1-x^2} = 4x^3-3x$

(Návod jako u předchozího cvičení.)

112. Nechť $x,y \in \langle -\pi,\pi \rangle$. V jakém vztahu je x a y, jestliže platí

$$\sin x \geq \sin y \; ?$$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

113. Vypočtěte:

a) i^{28} ; b) i^{95} ; c) i^{122} ; d) i^{-7} ; e) i^{-13} ;

f) i^{n} $(n \in N)$; g) i^{-n} $(n \in N)$.

114. Vypočtěte reálnou a imaginární část následujících komplexních čísel:

a) $\dfrac{1+i}{1-i}$; b) $\dfrac{1}{i}$; c) $\dfrac{(1+3i)(1-4i)}{(3+2i)(1-5i)}$;

d) $\dfrac{2+i}{3-i} + (i-2)(4-i)$; e) $\dfrac{1+i}{1-2i} + \dfrac{i}{1+i}$;

f) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2 - \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$; g) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^3 - \dfrac{-4+6i}{2-3i}$

115. Vypočtěte:

a) $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}\right|$; b) $\left|\dfrac{3-4i}{3-i}\right|$; c) $\left|\dfrac{2-i}{2+i} - \dfrac{2+i}{2-i}\right|$;

d) $\left|1 + 2i - \dfrac{2-5i}{i+2}\right|$.

116. Určete reálná čísla x, y tak, aby platilo:

a) $\dfrac{3-2i}{1-i} = 2x + iy$;

b) $x\,(2+3i) + y\,(4-3i) = 33i - 8$;

c) $x\,(2+i) + y\,(3+4i) + xy\,(1+i) = -6 - 3i$.

117. Je dáno komplexní číslo $c = a + bi$, kde $a = 5$, $b = 4i$. Potom je
$\sqrt{a^2+b^2} = 3$ a $|a + bi| = |5 - 4| = 1$. **Vysvětlete!**

118. Řešte v oboru komplexních čísel rovnice:

a) $x^2 + x + 1 = 0$; b) $x^2 + ix + 1 = 0$; c) $x^2 = |x|^2$;

d) $|x + 1| = |x - 1|$; e) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| + \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{5}{2}$.

119. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní čísla:

a) $-3i$; b) $1-i$; c) 4 ; d) $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$; e) $\dfrac{1-2i}{2+i} + i + 1$;

f) $\dfrac{4-3i}{4+3i} - \dfrac{7+i}{25}$; g) $(1+i)^{10}$; h) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{15}$.

120. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte:

a) $(1+i)^5$; b) $(1+i\sqrt{3})^9$; c) $(1-i)^{25}$; d) $(3-i\sqrt{3})^{10}$;

e) $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{124}$.

121. Je dáno komplexní číslo $a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\, i$.

a) Dokažte, že jeho amplituda je $\dfrac{\pi}{8}$.

b) Vypočtěte a^{487} .

122. Řešte v oboru komplexních čísel rovnice:

a) $x^3 = -8$; b) $x^2 = -i$; c) $x^4 = -1$; d) $x^4 + 16 = 0$;

e) $2x^2 - 1 = i\sqrt{3}$; f) $(2x-5)^4 = 1$; g) $x^n = a$ $(n \in N,\ a \in C)$.

123. Řešte v oboru komplexních čísel rovnice:

a) $ix^2 + (2 - 3i)x + 5i - 1 = 0$; b) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = 0$;

c) $4(x^5 + 1) = 11(x^2 + x^3)$; d) $(x-1)^7 + 1 = (x+1)^7 - 1$.

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

124. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

125. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

126. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

127. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

128. $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$

129. $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

130. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} = (-1)^n \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}$

131. $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$

132. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}$

133. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ **(binomická věta)**

134. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ **(Moivreova věta)**

135. $\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \, \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ $(\alpha \neq 2k\pi,\ k \in Z)$

136. $\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k\alpha) = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi,\ k \in Z)$

137. $\sum_{k=1}^{n} k.\cos(k\alpha) = \frac{(n+1)\cos n\alpha - n.\cos(n+1)\alpha - 1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ $(\alpha \neq k\pi,\ k \in Z)$

138. **Dokažte, že pro všechny dvojice přirozených čísel n, p platí**

a) $\sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$;

b) $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$

139. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24} .$$

140. Pro která přirozená čísla n platí, že

a) $2^n > 2n+1$; b) $2^n > n^2$; c) $n! > 2^n$?

Své tvrzení dokažte!

141. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí nerovnosti:

a) $(2n)! < 2^{2n}.(n!)^2$; b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; d) $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

e) $\prod_{k=1}^{n} (2k)! \geq \left[(n+1)!\right]^n$; f) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

V příkladech d), e), f) zjistěte, pro která přirozená n platí ostrá nerovnost!

142. Nechť pro členy posloupnosti (a_n) platí:

$$a_1 = 1 ,\ a_n \leq 2a_{n-1} + 2^n(2^{n-1}-1) \text{ pro } n\geq 2 .$$

Dokažte, že pro všechna $n\in N$ je $a_n < 2^n.(2^n - n)$.

143. Nechť pro členy posloupnosti (a_n) platí:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_n \geq (n-1).(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ pro } n\geq 3.$$

Dokažte, že pro všechna $n\in N$ je

$$a_n \geq n!.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} .$$

144. Nechť pro všechna přirozená čísla k je $a(k,1) = a(1,k) = 1$,
a pro všechny dvojice přirozených čísel $k>1,\ n>1$ je

$$a(k,n) \leq a(k-1,n) + a(k,n-1).$$

Dokažte, že pro všechna $k\in N,\ n\in N$ platí:

$$a(k,n) \leq \binom{k+n-2}{k-1} .$$

145. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí:

a) $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, kde $\alpha\neq 0,\ \alpha>-1$;

b) $\prod_{k=1}^{n} (1+\alpha_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, kde $\alpha_k > -1$ pro $k\in \hat{n}$ a čísla α_k jsou buď všechna nekladná nebo všechna nezáporná (tzv. Bernoulliova nerovnost).

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí:

146. $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n$, kde $a\neq b$, $a+b>0$.

147. $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n} \sin(x_k)$, kde $x_k \in \langle 0,\pi\rangle$ pro $k\in\hat{n}$.

148. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k}$, kde $a_k\ge 0$ pro $k\in\hat{n}$.

149.* $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \ge n$, kde $a_k>0$ pro $k\in\hat{n}$.

150. $\sqrt[n]{a_1 . a_2 \dots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, kde $a_k>0$ pro $k\in\hat{n}$.

(Návod: viz cv.149).

151. $\min\limits_{k\in\hat{n}} \frac{a_k}{b_k} \le \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \le \max\limits_{k\in\hat{n}} \frac{a_k}{b_k}$, kde $a_k>0$, $b_k>0$, $k\in\hat{n}$.

152. Nechť $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, kde $n\ge 2$. Pak $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) < n.(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)$. Dokažte!

153. Nechť $x_k>0$ pro $k\in\hat{n}$. Pak platí:

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^3 \le n^2 . \sum_{k=1}^{n} x_k^3$

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p \le n^{p-1} . \sum_{k=1}^{n} x_k^p$, kde $p\in N$.

Dokažte!

154. Dokažte, že počet permutací n-prvkové množiny je $n!$.

155. Dokažte, že počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny je $\binom{n}{k}$

156. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

157. Dokažte, že číslo $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ je pro každé přirozené n dělitelné číslem 133.

158. Nechť $a_n = 3(n^2+n) + 7$, $n\in N$. Dokažte, že mezi pěti po sobě jdoucími členy posloupnosti (a_n) je právě jedno dělitelné pěti.

159. Dokažte, že mezi $n+1$ čísly libovolně vybranými z čísel $1,2,3,\dots,2n$ jsou alespoň dvě, z nichž jedno je dělitelné druhým.

160. Dokažte, že pro n-té prvočíslo p_n platí:

a) $p_{n+1} \le p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$, b) $p_n \le 2^{2^{n-1}}$.

161. Dokažte, že počet dělitelů čísla $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, kde $p_1, p_2, \dots, p_n$ jsou různá prvočísla, je $2^n - 1$.

162. Dokažte, že mezi $n+1$ libovolně vybranými čísly z čísel $1,2,3,\dots,2n-1$ existují tři čísla k, l, m tak, že $k+l = m$; $(n \ge 2)$.

163. Dokažte, že n přímek, které leží v jedné rovině a z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí jedním bodem, rozdělí rovinu na $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ částí.

164. Dokažte, že osoba A může zaplatit osobě B libovolnou celou částku v korunách, jestliže má k disposici dostatečně velké množství pětikorun a osoba B má dostatečně velké množství dvoukorun na vracení.

ZKRÁCENÉ PSANÍ SOUČTU A SOUČINU

V celé kapitole jsou n a m přirozená čísla.

165. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}(3i-7)$ b) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{10}(1-2i)$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=2}^{6}(1+i)(2+j)$ d) $\displaystyle\sum_{i=-1}^{5}\sum_{j=-5}^{1}(1+2i+3j+4ij)$

166. Pomocí záměny sčítacího indexu vypočtěte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$.

167. Pomocí předchozího cvičení dokažte, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

168. Vypočtěte:

a) $\displaystyle\sum_{i=-n}^{n}(2-5i)$ b) $\displaystyle\sum_{i=-5}^{n}(3-i)$ c) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(ai+b)$, $(a,b\in R)$

d) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}(1+2i)(2+j)$ e) $\displaystyle\sum_{i,j=m}^{n}(a+bi+cj)$, $(a,b,c\in R,\ m\le n)$

169. Nechť a_n jsou členy aritmetické posloupnosti. Odvoďte vzorec pro $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ **pomocí výrazu;** a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{n+1-k}$.

170. Vypočtěte: a) $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n}(ijk)$ b) $\displaystyle\sum_{i,j,k,m=1}^{n}i(j+1)(k+2)(m+3)$

171. Tabulka rozměru m×n je zaplněná m.n čísly tak, že v každém řádku i sloupci tato čísla tvoří aritmetickou posloupnost. Součet čtyř rohových čísel tabulky se rovná S. Čemu se rovná součet všech čísel v tabulce?

172. Označme $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}q^k$. **Vyjádřete S_{n+1} pomocí S_n dvěma různými způsoby a odvoďte vzorec pro S_n.**

173. Tenisového turnaje, který se hrál vyřaďovacím systémem, se zúčastnilo 2^n hráčů. Kolik utkání se odehrálo?

Vypočtěte:

174. a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2^k}$ d) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3^{ak+b}}{2^{ck+d}}}$, $(a,b,c,d \in N)$

175. a) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ b) $\sum_{k=1}^{20} (k+1)(k+2)$

c) $\sum_{k=1}^{n} (n-k)^2$ d) $\sum_{k=m}^{n} k^2$, $(m \le n)$

e) $\sum_{k=-m}^{n} k^2$ f) $\sum_{k=1}^{n^2-1} [\sqrt{k}]$

176. a) $\sum_{k=1}^{n} k^3$ b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ c) $\sum_{k=-n}^{n} k^3$

177.* Buď $r \in N$. Vyjádřete součet $\sum_{k=1}^{n} k^{r+1}$ pomocí součtů $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2, \ldots, \sum_{k=1}^{n} k^r$.

Vypočtěte:

178. a) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k . k$ b) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k . k^2$ c) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k+1} . k^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k . k^3$ e) $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{k^3-2k+1}{k-1}$ f) $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{2}\right] . (-1)^k$

179. a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

180. Pomocí záměny sčítacího indexu dokažte, že

$$(\forall a,b \in R)\ (\forall n \in N)\ \left(a^n - b^n = (a-b) . \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right).$$

Přitom klademe $x^0 = 1$ pro každé $x \in R$.

Vypočtěte:

181. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k^2-1} + \sqrt[3]{(k-1)^2}}$$

182. a) $\displaystyle\sum_{i=1} \sum_{k=i} \frac{i}{k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=n-k}^{n} \frac{k}{2n-j}$

183. a) $2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{22222\dots22}_{(n \text{ krát})}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.q^{k-1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(k+1\right)q^{k-1}$

184. a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$ b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2}{2k+1}\right)$

185. a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a.q^{k-1} \quad (a,q \in \mathbb{R})$ b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2}$

186. a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(k^3+5k^2+1\right)\left(k-1\right)^{10}$ b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

187. a) $\displaystyle\prod_{i,k=1}^{n} ik$ b) $\displaystyle\prod_{i,j,k=1}^{n} ijk$ c) $\displaystyle\prod_{i,k=1}^{n} i^k$

d) $\displaystyle\prod_{i,j=1}^{n} \frac{1}{j^n\ i^n}$ e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{tg}\left(2^k\right).\mathrm{cotg}\left(2^{n-k}\right)$

f)* $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}\left(a^{2^i}+1\right)$ g)* $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

188. a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \prod_{i=1}^{k} \frac{i-n-1}{i}$

189. a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} 2^{i+j+k}$ b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \prod_{k=1}^{j} 2^{i+j+k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} j^k$ d) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{i^n j^n}$

e) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \prod_{i=3}^{k} \left(1-\frac{1}{\binom{i}{2}}\right)$ f) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} ik$

g) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{(k-i)!}$ h) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}$

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{i+j}{i}$

j) $\displaystyle\sum_{j=0}\sum_{i=0}\left\lfloor\frac{2^n}{2^{i+j}}\right\rfloor$

k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{i(i+2)}{(i+1)(i+3)}$

l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}\left(-1-\frac{1}{i}\right)$

m)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\prod_{j=1}^{k}\cos\left(\frac{x}{2^i}\right)$

n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b^n\prod_{j=1}^{k}\frac{(n-j+1)a}{(k-j+1)b}$

o) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_{\sqrt[k]{x}}(a)$

190. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(k\alpha)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\alpha)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin(2k+1)\alpha$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(x+k\alpha)$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin^2(k\alpha)$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos^3(k\alpha)$

191. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}q^k.\sin(k\alpha)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}q^k.\cos(k\alpha)$

c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k.\sin(k\alpha)$

d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k.\cos(k\alpha)$

192. Buď x libovolné, ale pevné reálné číslo. Jaké podmínky musí x splňovat, aby výrok a) $A \wedge B$, b) $A \wedge \neg B$, c) $\neg A \wedge B$, d) $\neg A \wedge \neg B$ byl pravdivý, jestliže A, B značí následující výroky o čísle x:

$$A: x > 0, \quad B: x > 1$$

193. Pro která n je výrok : „$\frac{n(n+1)}{2}$ je sudé číslo nebo n je liché číslo" pravdivý?

194. Určete pravdivostní hodnotu výroku

$$\left(1+1=3\right) \vee \left(1>5\right) \vee \left(3.8=-10\right) \vee \left(0\neq 0\right) \vee \left(0=0\right)$$

195. Napište následující výroky ve tvaru implikace a rozhodněte o jejich pravdivostní hodnotě:

a) Je-li 1+1=3, pak 1+1=2.

b) Jestliže 1+2=4, pak 1>2.

c) Je-li každý trojúhelník pravouhlý, je 5 prvočíslo.

d) 1<2 jen tehdy, je-li 2>3.

e) 1<2 tehdy, je-li 2>3.

196. Předpokládejme, že je dáno celé číslo x pro a) b) c) resp. reálné číslo x pro d)-g). Určete pravdivost následujících výroků v závislosti na hodnotě x.

a) Není-li x sudé, není ani liché.

b) Je-li x dělitelno třemi, potom je dělitelno i devíti.

c) x je dělitelno patnácti jen tehdy, je-li dělitelno současně třemi i pěti.

d) K tomu, aby x=0, stačí, aby x<1.

e) Ze skutečnosti, že $x^2 \neq 0$ plyne, že $x^2 = 2$.

f) Je-li $\frac{1}{x} < 1$, pak odtud neplyne $x \neq \frac{1}{2}$.

g) Není pravda, že pro každé reálné x je $x^2 > 0$.

197. Buď x libovolné, ale pevné celé číslo. Buďte A, B, C následující výroky A: x je sudé číslo, B: x je dělitelno čtyřmi, C: x je dělitelno osmi. Rozhodněte o pravdivosti jednotlivých výroků:

a) $C \Rightarrow (A \wedge B)$ b) $C \Leftarrow (A \wedge B)$

198. Buď dán trojúhelník T o stranách a, b, c. Které z následujících výroků platí nezávisle na hodnotách a, b, c ?

a) $\left(a+b = c\right) \Rightarrow \left(a^2+ b^2 = c^2\right)$

b) $\left[a^2+c^2=b^2+c^2\right] \Longrightarrow \left[\left[c>a\right]\wedge\left[c>b\right]\right]$

199. Napište následující výroky ve formě ekvivalence a rozhodněte o jejich pravdivosti.

a) Rok 1911 byl přestupný právě tehdy, když 1+1=2.

b) 2>3 právě v tom případě, když 3>4.

c) 1.8.1910 byla středa tehdy a jen tehdy, když 2.8.1910 byl čtvrtek.

200. Předpokládejme, že x je libovolné, ale pevné reálné číslo. Určete pravdivostní hodnotu následujících výroků v závislosti na hodnotě x.

a) $\left[x>1\right] \Longleftrightarrow \left[x^2>1\right]$

b) $\left[x>0\right] \Longleftrightarrow \left[x^2>0\right]$

c) $\left[x<0\right] \Longleftrightarrow \left[x\neq|x|\right]$

d) $\left[0\le x\le 1\right] \Longleftrightarrow \left[\left[x>-1\right]\wedge\left[x\ge 0\right]\wedge\left[x\le 1\right]\wedge\left[x\le 2\right]\right]$

e) $\left[x^2=-1\right] \Longleftrightarrow \left[x^2<0\right]$

201. Buď dán trojúhelník o stranách a, b, c a příslušných výškách v_a, v_b, v_c. Které z následujících výroků platí, ať je daný trojúhelník jakýkoliv ? Pro jaké trojúhelníky platí ostatní výroky ?

a) $\left[a<b\right] \Longleftrightarrow \left[v_a< v_b\right]$ b) $\left[a=b=c\right] \Longleftrightarrow \left[v_a= v_b= v_c\right]$

c) $\left[a^2+ b^2= c^2\right] \Longleftrightarrow \left[\left[v_a=b\right]\wedge\left[v_b=a\right]\right]$ d) $\left[a^2+ b^2= c^2\right] \Longleftrightarrow \left[a+b=c\right]$

202. Zapište symbolicky následující výroky:

a) Platí A nebo platí B, přičemž platnost A a platnost B se navzájem vylučují.

b) Platí alespoň jeden z výroků A, B.

c) Platí nejvýše jeden z výroků A, B.

d) Z A neplyne B.

e) Buď platí A i B nebo neplatí A ani B.

203. Buďte A i B výroky. Zapište výroky $A \vee B$, $A \Longrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$ užitím negace a konjunkce.

204. Dokažte, že pro libovolné výroky A, B, C, D platí:

a) $\left[A \Longleftrightarrow B\right] \Longleftrightarrow \left[\neg A \Longleftrightarrow \neg B\right]$ b) $\left[A \wedge B\right] \Longrightarrow \left[A \vee B\right]$

c) $\left[\left[A \Longrightarrow B\right] \wedge \left[C \Longrightarrow D\right]\right] \Longrightarrow \left[\left[A \wedge B\right] \Longrightarrow \left[B \wedge D\right]\right]$

d) $\left[A \wedge B\right] \Longrightarrow A$

205. Zjistěte, které z následujících souvětí je tautologií nebo kontradikcí:

a) $\Big[\big[A \Rightarrow B\big] \Rightarrow \big[\neg A \Rightarrow \neg B\big]\Big] \Rightarrow A$ b) $\big[A \wedge \neg B\big] \Leftrightarrow \big[A \Rightarrow B\big]$

c) $\Big[\big[A \Rightarrow \neg A\big] \Rightarrow \big[B \Rightarrow \neg B\big]\Big] \Rightarrow \big[A \Rightarrow B\big]$

206. Co je přípustným oborem následujících výrokových funkcí ?

a) x je prvočíslo. b) $\big[x^2>0\big] \Rightarrow \big[a=0\big]$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 1$ d) $\big[x>y\big] \Rightarrow \Big[\frac{x}{y} < \frac{y}{x}\Big]$

e) $\dfrac{\sqrt{x-10} + \sqrt{x+5}}{x + \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3}}$ je celé číslo. f) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} > 2$

207. Zapište pomocí kvantifikátorů, resp. pomocí kvantifikátorů s vymezeným rozsahem následující výroky; vyšetřete jejich pravdivost.

a) Pro každé reálné číslo x, kde $x > 1$, platí, $x^2-1 > 0$.
b) Je-li x libovolné reálné číslo, pak existuje celé číslo n tak, že $x < n$.
c) Ať je celé číslo c jakékoliv, číslo c^2+c je vždy sudé.
d) Kdykoliv jsou a, b reálná čísla taková, že $a+b=1$, pak alespoň jedno z čísel a, b je větší nebo rovno $\frac{1}{2}$.
e) Pro jakékoliv výroky A, B je výrok $A \Rightarrow \big[A \vee B\big]$ pravdivý.
f) Každé celé číslo je racionální.
g) Je-li x komplexní číslo, pak z toho, že x^2 je reálné, plyne, že i x je reálné.
h) Pro každou trojici reálných čísel a, b, c, kde $a \neq 0$, existuje reálné číslo x tak, že $ax^2+bx+c=0$.
i) Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná reálná čísla taková, že $a_1+a_2+\ldots+a_n > n$, pak aspoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je větší než 1.

208. Zapište negace výroků z minulého příkladu.

209. Buď $A(x,y)$ výroková funkce $xy=0$, jejímž přípustným oborem je obor všech dvojic reálných čísel. Jsou následující dva výroky ekvivalentní ?

$$\big[\forall\, x\big]\big[\exists\, y\big]\big[A(x,y)\big]; \qquad \big[\exists\, y\big]\big[\forall\, x\big]\big[A(x,y)\big].$$

210. Rozhodněte, zda následující dvojice výroků jso u dvojicemi ekvivalentních výroků (pro libovolné výrokové funkce $A(x)$, $B(x)$ a libovolný výrok C).

a) $\big[\exists\, x\big]\big[A(x) \wedge C\big]$; $\Big[\big[\exists\, x\big]\big[A(x)\big]\Big] \wedge C$

b) $\big[\forall\, x\big]\big[A(x) \vee C\big]$; $\Big[\big[\forall\, x\big]\big[A(x)\big]\Big] \vee C$

c) $\big[\forall\, x\big]\big[A(x) \wedge B(x)\big]$; $\big[\forall\, x\big]\big[A(x)\big] \wedge \big[\forall\, x\big]\big[B(x)\big]$

d) $\left[\forall x\right]\left[A(x) \vee B(x)\right]$; $\left[\forall x\right]\left[A(x)\right] \vee \left[\forall x\right]\left[B(x)\right]$

e) $\left[\exists x\right]\left[A(x) \wedge B(x)\right]$; $\left[\exists x\right]\left[A(x)\right] \wedge \left[\exists x\right]\left[B(x)\right]$

f) $\left[\exists x\right]\left[A(x) \vee B(x)\right]$; $\left[\exists x\right]\left[A(x)\right] \vee \left[\exists x\right]\left[B(x)\right]$

g) $\left[\exists x\right]\left[A(x)\right] \wedge \left[\exists x\right]\left[B(x)\right]$; $\left[\exists x\right]\left[\exists y\right]\left[A(x) \wedge B(y)\right]$

h) $\left[\exists x\right]\left[A(x)\right] \vee \left[\exists x\right]\left[B(x)\right]$; $\left[\exists x\right]\left[\exists y\right]\left[A(x) \vee B(y)\right]$

211. Zapište užitím kvantifikátorů tyto výroky (x, y, z jsou reáná čísla):

a) Pro všechny dvojice x, y platí: Je-li $x+y=2$ a $y \geq x$, pak $1 \geq x$.

b) Existuje x tak, že pro každé y je buď $y \geq x$ nebo $x \geq 2$.

c) Pro každé y existuje x tak, že $x>y$.

d) Pro každou dvojici x, y takovou, že $x+y=2$, je buď $x>0$ nebo $y>0$.

e) Pro každé x existuje dvojice y, z taková, že $x+y=2$ a $y+z=2$.

f) Pro každou dvojici x, y platí: Je-li $x^2+ y^2= 2$, pak $\sqrt{2} \geq |x|$ a $\sqrt{2} \geq |y|$.

g) Pro každé x kladné a pro každé y záporné takové, že $x+y=2$, platí $x>-2$.

212. Dokažte $\left[\neg V \Longrightarrow \left[C \wedge \neg C\right]\right] \Longrightarrow V$.

Tento vztah se užívá k důkazu výroku V: předpokládáme, že V neplatí a odvodíme odtud spor $\left[C \wedge \neg C\right]$. Tím je výrok V dokázán (tzv. nepřímý důkaz nebo důkaz sporem).

213. Dokažte (sporem).

a) Všech prvočísel je nekonečně mnoho.

b) Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

c) Budiž a pevně zvolené reálné číslo. Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ je $|a|<\varepsilon$. Potom $a = 0$.

214. a) Dokažte tvrzení: "Jestliže o libovolném členu jisté skupiny lidí lze říci, že všichni ostatní členové skupiny jsou menší nebo stejně velcí jako on, pak všichni členové skupiny mají stejnou výšku."

b) Jestliže o libovolném členu jisté skupiny lidí lze říci, že všichni ostatní členové skupiny jsou menší než on, co lze potom říci o skupině?

215.* Nechť $p \in N$,

výrok A: $\left[6|p\right] \Longleftrightarrow \left[\forall x,y \in R\right]\left[\left[x+\frac{p}{2} \in Z \wedge y+\frac{p}{3} \in Z\right] \Longrightarrow \left[x \in Z \wedge y \in Z\right]\right]$,

výrok B: $\left[6|p\right] \Longleftrightarrow \left[\exists x,y \in R\right]\left[\left[x+\frac{p}{2} \in Z \wedge y+\frac{p}{3} \in Z\right] \Longrightarrow \left[x \in Z \wedge y \in Z\right]\right]$.

Rozhodněte o pravdivosti výroků A, B, A $\Longrightarrow$ B, B $\Longrightarrow$ A.

M N O Ž I N Y A Z O B R A Z E N Í

ZOBRAZENÍ A EKVIVALENCE MNOŽIN

216. Nechť $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Určete, které z následujících množin jsou zobrazeními z A do B.

a) $M_1 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (1,3)\}$; b) $M_2 = \{(0,1), (1,0), (2,2)\}$;

c) $M_3 = \{(0,0), (0,2), (1,1), (2,3)\}$; d) $M_4 = \{(0,0), (1,0), (2,0)\}$.

217. Určete, které z následujících množin jsou zobrazeními z R do R, resp. z C do C.

a) $\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 = y^2 \}$; b) $\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x^2 = y \}$;

c) $\{ (x,y) \in R^2 \,/\, y \le 0 \wedge x = y^2 \}$; d) $\{ (x,y) \in R^2 \,/\, x \in Z,\ y \in Z \}$;

e) $\{ (x,y) \in C^2 \,/\, x^2 + 1 = -y^2 \}$; f) $\{ (x,y) \in C^2 \,/\, x + y = 1 \}$.

218. Určete definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$ pro následující zobrazení f :

a) $f\colon N \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{2}$ pro x sudé, $f(x) = \dfrac{1-x}{2}$ pro x liché ;

b) $f\colon (N) \to N$, $f = \left\{ (x,y) \in N^2 \,/\, y \text{ je největší prvočíslo menší než } x \right\}$;

c) $f\colon R \to Z$, $f(x)$ je nejmenší celé číslo větší než x ;

d) $f\colon (C) \to C$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$;

e) $f\colon (N) \to C$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$;

f) $f\colon (R) \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 - 5x + 4}$;

g) $f\colon (R) \to R$, $f(x) = \sqrt{x} - x$;

h) $f\colon (R) \to R$, $f(x) = \left| \dfrac{x - 2}{x + 3} \right|$;

i) $f\colon (R) \to R$, $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{|x| + 1}$;

j) $f\colon R \to R$, $f(x) = |x + 1| + |x|$;

k) $f\colon R \to R$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$;

l) $f\colon R \to R$, $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

219. Pro následující zobrazení $f\colon R \to R$ určete $f(A)$, kde $A = (0,1)$.

a) $f(x) = 2x + 5$; b) $f(x) = x^2 + 1$; c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$; e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x + 2|}$; f) $f(x) = \dfrac{|x + 2|}{x^2 + 1}$.

220. Buď $f: R \to R$, $f(x) = (x-a)(x-b)$, kde a, b jsou reálná čísla. Určete $f(A)$, kde $A = (a,b)$.

221. Nechť $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1,2,3\}$, $D = \{1,2,3\}$. Určete vzory $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(D)$ pro následující zobrazení $f: A \to B$.

a) $f = \{ (0,1), (1,2), (2,3) \}$; b) $f = \{ (0,0), (1,2), (2,3) \}$;
c) $f = \{ (0,0), (1,0), (2,3) \}$; d) $f = \{ (0,0), (1,0), (2,0) \}$.

222. Definujme $f: N \to N$ předpisem $f(n)= n+1$. Položme $A = \left\{2n \,/\, n\in N\right\}$, $B = \left\{2n-1 \,/\, n\in N\right\}$, tj. A je množina všech sudých přirozených čísel a B je množina všech lichých přirozených čísel. Určete vzory $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$.

223. Buď $f: Z \to Z$, $f(x) = |x|$. Pro každé $x\in Z$ určete vzor $f^{-1}(\{x\})$.

224. Pro zobrazení $f: C \to C$, $f(x) = x^2$, určete vzor množiny R.

225. Pro následující zobrazení f určete vzor množiny $\{1\}$ a vzor množiny $A = (1,2\rangle$.

a) $f: R-\{1\} \to R$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$; b) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$;

c) $f: R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2+2}$; d) $f: R \to R$, $f(x) = x^2-2x+1$;

e) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; f) $f: (-1,1\rangle \to R$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

g) $f: R \to R$, $f(x) = |x|+|x-1|$; h) $f: R \to R$, $f(x) = |2x-1|-|x+2|$;

i) $f: (R) \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-9}$;

j) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$.

226. Nechť $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1,2,3\}$. Která z následujících zobrazení jsou prostá (injektivní) a která jsou "na" (surjektivní)?
a) $f: A \to B$, $f = \{ (0,3), (1,2), (2,0), \}$;
b) $f: A \to B$, $f = \{ (0,3), (1,2), (2,3), \}$;
c) $f: A \to A$, $f = \{ (0,1), (1,2), (2,0), \}$;
d) $f: A \to A$, $f = \{ (0,1), (1,1), (2,0), \}$;
e) $f: B \to A$, $f = \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,2) \}$;
f) $f: B \to A$, $f = \{ (0,2), (1,0), (2,1), (3,0) \}$;
g) $f: B \to B$, $f = \{ (0,3), (1,2), (2,1), (3,3) \}$;
h) $f: B \to B$, $f = \{ (0,2), (1,0), (2,3), (3,1) \}$.

227. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:
a) f je prosté;
b) pro každé $y\in B$ má vzor $f^{-1}(\{y\})$ nejvýše jeden prvek (tj. má buď jeden prvek nebo je to prázdná množina);

existuje nejvýše jedno $x \in A$ tak, že $f(x) = y$ (tuto podmínku mužeme názorně formulovat takto : pro každé $y \in B$ má rovnice $f(x) = y$, jakožto rovnice pro neznámou x , nejvýše jedno řešení).

228. Nechť $f: A \to B$ je zobrazení. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:

a) f je zobrazení "na" (množinu B) ;

b) pro každé $y \in B$ má vzor $f^{-1}(\{y\})$ alespoň jeden prvek (tj. je to neprázdná množina);

c) pro každé $y \in B$ existuje alespoň jedno $x \in A$ tak, že $f(x) = y$ (tj. rovnice $f(x) = y$ má alespoň jedno řešení).

229. Formulujte a dokažte tvrzení obdobné cv. 227 a 228 pro bijektivní zobrazení (tj. pro zobrazení, které je současně prosté a "na").

230. Rozhodněte, která z následujících zobrazení jsou prostá a která jsou "na" .

a) $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$;

b) $f: \langle 0,+\infty) \to R$, $f(x) = x^2 + 4x + 4$;

c) $f: R-\{1,2\} \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}$;

d) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$;

e) $f: R \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$;

f) $f: (1,2) \to \langle 0,2\rangle$, $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$;

g) $f: (-\infty,-1) \to (-\infty,0)$, $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$;

h) $f: (-1,1) \to \langle 0,+\infty)$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

231. Dokažte, že následující zobrazení jsou prostá a stanovte předpis a definiční obor pro inverzní zobrazení.

a) $f: \langle 3,+\infty) \to R$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

b) $f: (-\infty,3\rangle \to R$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$;

c) $f: R \to R$, $f(x) = 2x + |x|$; d) $f: N \to N$, $f(x) = x^2 + x + 1$;

e) $f: \langle 0,1\rangle \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

f) $f: (-\infty,-1\rangle \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

g) $f: (R) \to R$, $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$;

h) $f: R \to R$, $f(x) = x + 1$ pro $x \geq 0$, $f(x) = 2x + 1$ pro $x < 0$;

i) $f\colon R-\{1\} \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ pro $x<1$, $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ pro $x>1$;

j) $f\colon R \to R$, $f(x) = x + 1$ pro $x \in Q$, $f(x) = x - 1$ pro $x \in R-Q$.

232. Určete složená zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$, je-li

a) $f\colon A \to B$, $g\colon B \to D$, kde $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$f = \{ (0,2), (1,3), (2,3) \}$, $g = \{ (0,1), (1,2), (2,2), (3,2) \}$;

b) $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$, (A, B jsou jako v a)),

$f = \{ (0,1), (1,2), (2,3) \}$, $g = \{ (0,0), (1,0), (2,1), (3,2) \}$;

c) $f\colon B \to B$, $g\colon B \to B$, (B je jako v a)),

$f = \{ (0,1), (1,0), (2,3), (3,2) \}$, $g = \{ (0,2), (1,3), (2,0), (3,1) \}$;

d) $f\colon D \to D$, $g\colon D \to D$, (D je jako v a)),

$f = \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,0), (4,0) \}$,

$g = \{ (0,4), (1,4), (2,4), (3,1), (4,2) \}$.

e) $f\colon R \to R$, $g\colon R \to R$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 1 - 2x$;

f) $f\colon R \to R$, $g\colon R \to R$, $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 + x^4$;

g) $f\colon \langle 0, +\infty) \to R$, $g\colon R \to \langle 0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$;

h) $f\colon R \to R$, $g\colon (R) \to R$, $f(x) = x+1$ pro $x \geq 0$, $f(x) = x-1$ pro $x<0$,

$$g(x) = \frac{x+1}{2x-1} \quad ;$$

i) $f\colon (R) \to R$, $g\colon R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$.

---

233. Je-li $f\colon A \to A$ a je-li množina A konečná, pak platí:

a) Je-li f prosté, pak je f zobrazením A <u>na</u> A .

b) Je-li f zobrazením A <u>na</u> A , pak je f prosté.

Dokažte.

234. Nalezněte zobrazení $f\colon N \to N$ tak, aby platilo:

a) f je prosté, ale není zobrazením N <u>na</u> N ;

b) f je zobrazení N <u>na</u> N , ale není prosté.

235. Buď $f\colon A \to A$ zobrazení. Konečnou množinu $B \subset A$ nazveme <u>cyklem</u> zobrazení f , jestliže ji lze popsat jako $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ tak, že

$f(b_1) = b_2$, $f(b_2) = b_3$, ... , $f(b_{n-1}) = b_n$, $f(b_n) = b_1$. Jednoprvkovou množinu $\{b_1\}$, kde $f(b_1) = b_1$, také považujeme za cyklus. Dokažte, že platí: Jsou-li B_1, B_2 dva cykly zobrazení f , pak buď $B_1 = B_2$, nebo jsou B_1 a B_2 disjunktní, tj. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

236. Každé zobrazení konečné množiny do sebe má alespoň jeden cyklus; podrobněji: Je-li $f\colon A \to A$ zobrazení, kde A je množina s konečně mnoha

237. Buď A množina s konečně mnoha prvky. Je-li $f: A \to A$ prosté zobrazení (a tedy bijektivní zobrazení, viz cv. 233), pak každý prvek množiny A leží v nějakém cyklu zobrazení f (a tedy právě v jednom cyklu, viz cv. 235). Dokažte.

238. Je-li A libovolná množina a $f: A \to A$ takové zobrazení, že každý prvek množiny A leží v nějakém cyklu zobrazení f, pak f je bijektivní. Dokažte.

239. Je-li množina A konečná, pak zobrazení $f: A \to A$ je prosté právě když je bijektivní, a to je právě když každý prvek množiny A leží v nějakém cyklu zobrazení f. Dokažte.

240. Nalezněte zobrazení $f: Z \to Z$, které je bijektivní, ale nemá žádný cyklus (srv. cv. 236 a cv. 239).

241. Je-li $f: A \to A$ zobrazení, označme $f \circ f = f^2$, $f \circ f \circ f = f^3$, $f \circ f \circ \ldots \circ f = f^n$ (složeno n-krát). Dokažte, že pro každé prosté zobrazení $f: A \to A$, kde A má konečně mnoho prvků, existuje přirozené číslo n tak, že platí $f^n = Id_A$.

242. Dokažte, že platí: Jsou-li $f: A \to B$ a $g: B \to D$ taková zobrazení, že $g \circ f$ je zobrazení A na D, pak g je zobrazení B na D. Ukažte na příkladě, že f nemusí být zobrazením A na B.

243. Dokažte, že platí: Jsou-li $f: A \to B$ a $g: B \to D$ taková zobrazení, že $g \circ f$ je prosté zobrazení, pak f je také prosté. Ukažte na příkladě, že g být prosté nemusí.

---

244. a) Pomocí zobrazení $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ dokažte, že $(-1,1) \sim R$.

b) Pomocí zobrazení $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ dokažte, že $(0,+\infty) \sim R$.

c) Pomocí zobrazení $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ dokažte, že $(0,1) \sim R$.

d) Pomocí zobrazení $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ dokažte, že $(-1,1\rangle \sim \langle 0,+\infty)$.

245. Buďte a, b, c, d reálná čísla, $a<b$, $c<d$. S užitím vhodně zvolených zobrazení dokažte:

$(a,b) \sim (c,d)$; $\langle a,b) \sim \langle c,d)$; $(a,b\rangle \sim (c,d\rangle$; $\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle$;
$\langle a,b) \sim (c,d\rangle$; $(a,b\rangle \sim \langle c,d)$.

246.* Buďte a, b reálná čísla. Pak platí: $(a,b) \sim \langle a,b) \sim (a,b\rangle \sim \langle a,b\rangle$. Dokažte.

247. Dokažte, že každé dva intervaly v R jsou ekvivalentní.

248.* a) Nechť A je nekonečná množina a B konečná množina. Dokažte, že pak $A \cup B \sim A$.

b) Nechť A je nekonečná množina a B nejvýše spočetná množina. Dokažte, že pak $A \cup B \sim A$.

249.* Jsou-li množiny $A_1, A_2, \dots, A_n$ spočetné, pak je také množina $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ spočetná. Dokažte.

250.* Nechť P je množina všech konečných podmnožin množiny všech přirozených čísel. Dokažte, že P je spočetná.

251.* Dokažte, že pro žádnou množinu A neexistuje zobrazení A na množinu všech podmnožin A.

252.* Dokažte, že $R \times R \sim R$.

253.* Dokažte, že pro každé $n \in N$ je $R^n \sim R$.

254.* Označme R^N množinu všech posloupností reálných čísel. Dokažte, že $R^N \sim R$.

OPERACE SE SYSTÉMY MNOŽIN

255. Dokažte, že platí:

a) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n} , 2 \right) = \langle 1 , 2)$ b) $\bigcup\limits_{n\in N} (-n , n) = R$

c) $\bigcup\limits_{n\in N} \left\langle \frac{n}{n+1} , \frac{n+1}{n} \right) = \left\langle \frac{1}{2} , 2 \right)$ d) $\bigcap\limits_{n\in N} (n , +\infty) = \emptyset$

e) $\bigcap\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{n^2} , \frac{n^2-2n+1}{n^2} \right) = \left\langle 0 , \frac{1}{4} \right)$

f) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{n^2} , \frac{n^2-2n+1}{n^2} \right) = (-1 , 1)$

g) $\bigcup\limits_{n\in N} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} , \sqrt{n^2+1} \right] = (0 , +\infty)$

h) $\bigcap\limits_{n\in N} \left\langle \sqrt{1-\frac{1}{n}} , \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right\rangle = \{ 1 \}$ i) $\bigcap\limits_{r\in R} \left(\frac{r^2}{r^2+1} , 1 \right\rangle = \{ 1 \}$

j) $\bigcap\limits_{r\in R} \left(\frac{r}{r^2+1} , +\infty \right) = \left(\frac{1}{2} , +\infty \right)$ k) $\bigcup\limits_{r\in R} \left(0, \frac{r^2}{r^2+1} \right) = (0 , 1)$

256. Zjednodušte vyjádření následujících množin:

a) $\bigcap\limits_{n\in N} \left\langle -\frac{1}{n} , \frac{1}{n} \right\rangle$ b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{n}{n+1} , \frac{n+1}{n+2} \right)$

c) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{n}{n+1} , n+1 \right\rangle$ d) $\bigcap\limits_{n\in N} \left\langle \frac{n}{n+1} , n \right)$

e) $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} , \frac{2}{n} \right)$ f) $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-n , 1-\frac{1}{n} \right)$

g) $\bigcap\limits_{r\in R} (-1 , r^2)$ h) $\bigcup\limits_{r\in R} \left\langle r , r+\frac{1}{r^2+1} \right)$

i) $\bigcap\limits_{r\in R} \left\langle r , r+\frac{1}{r^2+1} \right)$

257. Určete:

($\complement_B A = B-A$ je doplněk množiny A do množiny B)

a) $\complement_R \left[\bigcup\limits_{n\in N} \left\langle \frac{n}{n^2+1} , \frac{n^2+1}{n} \right) \right]$

b) $\complement_R \left\{ \bigcup\limits_{n\in N} \left[\left(-\infty , \frac{-1-n}{n} \right) \cup \left(\frac{n+1}{n} , +\infty \right) \right] \right\}$

c) $\complement_R \left\{ \bigcap\limits_{n\in N} \left[\left(-\infty , -\frac{1}{n} \right) \cup \left(\frac{n-1}{n} , +\infty \right) \right] \right\}$

258. Určete:

a) $\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-2 \, , \, \frac{-3+n}{n} \right) \right] \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n} \, , \, 3 \right) \right]$

b) $\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \, , \, \frac{n+1}{n} \right) \right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \, , \, \frac{2n+1}{n} \right) \right]$

c) $\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \, , \, \frac{3n}{n+1} \right) \right] \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(3 \, , \, \frac{n^6+2n}{n+1} \right) \right]$

d) $\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty \, , \, \frac{n^4+n}{n^5+n+1} \right) \right] \cup \left[\bigcap_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-n^2+1}{n^3+1} \, , \, +\infty \right) \right]$

259. Buď $f: R \longrightarrow R$. Dokažte, že

a) $\bigcup_{n \in N} \left\{ x \in R \;\middle|\; |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} = \left\{ x \in R \mid f(x) \neq 0 \right\}$

b) $\bigcap_{n \in N} \left\{ x \in R \;\middle|\; |f(x)| > n \right\} = \emptyset$

c) $\bigcup_{n \in N} \left\{ x \in R \;\middle|\; |f(x)| < n \right\} = R$

260. Určete $\bigcup_{n \in N} f^{-1}(A_n)$, jestliže

a) $f(x) = 2x+1$, $A_n = (-n, n)$ pro každé $n \in N$;

b) $f(x) = x^{10} + x^9 - 3x^5 - 2x + 1$, $A_n = \left[\frac{1-2n^2}{n+1} \, , \, 3n+1 \right]$ pro každé $n \in N$.

261. Určete $\bigcap_{n \in N} f^{-1}(A_n)$, jestliže

a) $f(x) = x^2$, $A_n = \left\langle -n^3 - 5n^2 + 6, \frac{n}{n^2+2} \right\rangle$ pro každé $n \in N$;

b) $f(x) = x^7 - x^6 + 3$, $A_n = \left[\frac{1-2n}{n^2} \, , \, \frac{n^3-1}{n^4} \right]$.

262. Určete $\bigcup_{n \in N} f(A_n)$, kde $f(x) = x^2 + 2x + 2$ a $A_n = \langle -n, +\infty)$.

263. Buď $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = x - [x]$. Určete $f\left[\bigcap_{n \in N} (n, n+1) \right]$, $\bigcap_{n \in N} f\left[(n, n+1) \right]$.

264. Je-li zobrazení $f: A \longrightarrow B$ prosté a je-li $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$ soubor podmnožin A , pak platí $f\left[\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \right] = \bigcap_{\alpha \in J} f(A_\alpha)$. Dokažte a srovnejte s výsledkem předchozího cvičení.

265. Najděte systém $(A_n)_{n \in N}$ podmnožin množiny N, který má následující vlastnosti: Pro každou množinu $K \subset N$, která má jen konečně mnoho prvků, je $\bigcap_{n \in K} A_n \neq \emptyset$, ale $\bigcap_{n \in N} A_n = \emptyset$.

266. Předpokládejme, že $\left\{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle\right\}_{\alpha\in J}$ je konečný systém uzavřených intervalů (t.j. takový systém, že množina J má jen konečně mnoho prvků). Dokažte, že platí: Je-li $\bigcap_{\alpha\in J} \langle a_\alpha, b_\alpha\rangle \neq \emptyset$, pak $\bigcup_{\alpha\in J} \langle a_\alpha, b_\alpha\rangle$ je uzavřený interval.

267. Nechť množina P je průnikem konečného systému uzavřených intervalů. Dokažte, že nastane jedna z následujících možností:

a) $P = \emptyset$; b) P má právě jeden prvek ; c) P je uzavřený interval.

Ukažte na příkladech, že každá z těchto možností skutečně může nastat.

268. Průnik konečného systému otevřených intervalů je buď otevřený interval, nebo prázdná množina. Dokažte.

269. Najděte systém uzavřených intervalů, který má neprázdný průnik, jehož sjednocení však není uzavřeným intervalem.

270. Najděte systém otevřených intervalů, jehož průnik je neprázdný, ale není otevřeným intervalem.

271. Nechť $\left\{(a_\iota, b_\iota)\right\}_{\iota\in I}$ je systém otevřených po dvou disjunktních intervalů. Potom I je nejvýše spočetná množina. Dokažte.

OMEZENOST MNOŽIN, SUPREMUM, INFIMUM

272. Rozhodněte, zda následující množiny jsou omezené shora, omezené zdola, nebo omezené.

a) $\left\{ 3-n \mid n \in N \right\}$ b) $\left\{ 3-x \mid x<0 \right\}$

c) $\left\{ 2(1-x)+5 \mid x \in \langle 0,1 \rangle \right\}$ d) $\left\{ x \in R \mid 2(1-x)+5 \in \langle 0,1 \rangle \right\}$

e) $\left\{ x^2+5x-6 \mid x \in (-1,+\infty) \right\}$ f) $\left\{ x \in R \mid x^2+5x-6 \in (-1,+\infty) \right\}$

g) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \mid n \in N \right\}$ h) $\left\{ \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \mid n \in N \right\}$

i) $\left\{ (-1)^n \dfrac{3-\sqrt{n}}{2-\sqrt[3]{n}} \mid n \in N-\{8\} \right\}$ j) $\left\{ \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1} \mid x>1 \right\}$

k) $\left\{ \dfrac{x-\sqrt{x}}{\left|\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right|} \mid x>1 \right\}$ l) $\left\{ x>0 \mid x^{x^{x^x}} < x^{\{x^x\}^x} \right\}$

m) $\left\{ x>0 \mid \sin(5x) \geq 16 \sin^5 x \right\}$ n) $\left\{ x \in R \mid (\exists\, n \in N)(\log_x n = n) \right\}$

273. Rozhodněte, zda následující množiny jsou omezené.

a) $\left\{ x \in C \mid |x+i-3| < 1 \right\}$ b) $\left\{ \dfrac{1}{x} \in C \mid |x+i-3| < 1 \right\}$

c) $\left\{ x \in C \mid \left|x-\dfrac{i}{2}+\dfrac{1}{2}\right| < 1 \right\}$ d) $\left\{ \dfrac{1}{x} \in C \mid \left|x-\dfrac{i}{2}+\dfrac{1}{2}\right| < 1,\ x \neq 0 \right\}$

e) $\left\{ a+ib \mid a,b \in R, (a+ib)(a-ib)=1 \right\}$ f) $\left\{ a+ib \mid a,b \in R, (a+b)(a-b)=1 \right\}$

274. Nechť $M_1 = \left\{ x \in C \mid (x+1)^{10} = (x-1)^{10} \right\}$, $M_2 = \left\{ x \in C \mid |x+1|^{10} = |x-1|^{10} \right\}$

Určete v jakém vztahu jsou množiny M_1, M_2 a rozhodněte zda jsou omezené.

275. Rozhodněte o omezenosti množin M_1, M_2:

$$M_1 = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in R \right\} \quad \text{a} \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in C,\ x \neq i,-i \right\}$$

276. Ukažte, že množina M je omezená shora i zdola a určete množinu horních i dolních závor.

a) $M = \left\{ \dfrac{x-1}{x^2+x+1} \mid x \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \mid x \in (1,+\infty) \right\}$

277. Ukažte, že množina M není omezená zdola, je omezená shora a nalezněte množinu horních závor.

$$M = \left\{ \frac{n^2+3n+5}{1-2n} \mid n \in N \right\}$$

278. Dokažte, že sjednocení konečného počtu omezených množin je množina omezená. Platí toto tvrzení pro nekonečný počet množin?

279. Dokažte, že platí následující tvrzení; současně rozhodněte, zda příslušné množiny mají maximum, resp. minimum.

a) $\inf\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in N \right\} = \frac{1}{2}$ b) $\sup\left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in N \right\} = 1$

c) $\inf\left\{ \frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \mid n \in N \right\} = 2$ d) $\sup\left\{ \frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \mid n \in N \right\} = \frac{7}{3}$

e) $\inf\left\{ \frac{6n-5}{27n-9n^2-20} \mid n \in N \right\} = -\frac{7}{2}$ f) $\sup\left\{ \frac{6n-5}{27n-9n^2-20} \mid n \in N \right\} = 0$

g) $\inf\left\{ \frac{2n^3-n^2+1}{-n^3-n+1} \mid n \in N,\ n>1 \right\} = -2$

h) $\sup\left\{ \frac{2n^3-n^2+1}{-n^3-n+1} \mid n \in N,\ n>1 \right\} = \frac{-13}{9}$

i) $\inf\left\{ \frac{2n^3-10n^2+15n}{6n-n^3-9} \mid n \in N \right\} = -2$

j) $\inf\left\{ \frac{n^5+n^4-n^3+1-n^7}{n^6+n^5+n^4-2n^3} \mid n \in N \right\} = -\infty$

k) $\inf\left\{ \frac{3n^4+n^3-7n^2+14n-5}{n^4+1} \mid n \in N \right\} = \frac{122}{41}$

l) $\sup\left\{ n \in N \mid n^4+n^3+n^2+n+1<60 \right\} = 2$

m) $\inf\left\{ \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n^2-4n+5} \mid n \in N \right\} = -5$ n) $\sup\left\{ \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n^2-4n+5} \mid n \in N \right\} = 5$

o) $\sup\left\{ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n^2+2}{n^2+n+1} \mid n \in N \right\} = 1$

p) $\sup\left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \mid n \in N \right\} = 1;$

q) $\inf\left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \mid n \in N \right\} = 0;$

280. Dokažte, že platí následující rovnosti.

a) $\inf\left\{ \frac{x}{|x|+1} \mid x \in R \right\} = -1$ b) $\sup\left\{ \frac{x}{|x|+1} \mid x \in R \right\} = 1$

c) $\inf\left\{ \frac{4x^6-3x^2+x+5}{x^6-x^2+1} \mid x \in R \right\} = 4$ d) $\sup\left\{ \frac{2x^3-3x-1}{x^3+5x^2+2} \mid x > 0 \right\} = 2$

e) $\inf\left\{ \dfrac{3x+1-2x^2}{x^2+5x} \mid x > 0 \right\} = -2$ f) $\sup\left\{ \dfrac{3x+1-2x^2}{x^2+5x} \mid x > 0 \right\} = +\infty$

g) $\sup\left\{ \dfrac{x^8-x^6+x^2-x}{x^8+x^2+2} \mid x \in R \right\} = 1$

h) $\sup\left\{ 2x^3-3x^2+4x-1 \mid x \in (1,2) \right\} = 11$

i) $\inf\left\{ x^3-x^2-x+2 \mid x \in (0,2) \right\} = 1$

j) $\sup\left\{ x^3-x^2-x+2 \mid x \in (0,2) \right\} = 4$

k) $\sup\left\{ \dfrac{t^3-t^2+1}{2t^3-2t+3} \mid t \in (0,1) \cup \langle 2,+\infty) \right\} = \dfrac{1}{2}$

l) $\inf\left\{ \dfrac{t^3-t^2+1}{2t^3-2t+3} \mid t \in (0,1) \cup \langle 2,+\infty) \right\} = \dfrac{1}{3}$.

281. Dokažte, že

a) $\inf\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in N \right\} = 0$

b) $\sup\left\{ \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1}} \mid n \in N \right\} = +\infty$

c) $\inf\left\{ \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n}}{n+1} \mid n \in N \right\} = 0$

d) $\inf\left\{ \dfrac{n+4-3\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}} \mid n \in N \right\} = 1$

e) $\sup\left\{ \dfrac{2x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x} \mid x \in (0,+\infty) \right\} = 2$

f) $\sup\left\{ \dfrac{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} \mid x > 0 \right\} = 2$

g) $\inf\left\{ \dfrac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^3} + 1}{\sqrt{x} + 1} \mid x > 0 \right\} = 1$

h) $\inf\left\{ \dfrac{x^2+9x-6x\sqrt{x}}{x^2+1} \mid x > 0 \right\} = 0$

282. Buďte $A, B \subset R$. Nechť platí $(\sup A = \sup B)$ a $(\inf A = \inf B)$. Plyne odtud $A = B$?

283. Buďte A, B množiny reálných čísel. Potom platí $(A \subset B) \Longrightarrow (\sup B \geq \sup A)$ Platí také opačná implikace?

množina reálných čísel z intervalu $\langle a,b\rangle$. Dokažte, že platí rovnost

$$\sup\left\{ a_{mn} \mid (m,n) \in N^2\right\} = \sup\left\{\sup\left\{ a_{mn} \mid m \in N\right\} \mid n \in N\right\}.$$

285. Nechť A, B jsou neprázdné omezené množiny reálných čísel. Může být $\sup A = \sup B$ a $\inf A = \inf B$, je-li $A \cap B = \emptyset$?

286. Budiž $B = \left\{-x \mid x \in A\right\}$, kde A je neprázdná omezená množina , $A \subset R$. Dokažte, že $\sup B = -\inf A$ a $\inf B = -\sup A$.

287. Nechť $A, B \subset R$, $A = \left\{a_n \mid n \in N\right\}$, $B = \left\{b_n \mid n \in N\right\}$, $C = \left\{a_n + b_n \mid n \in N\right\}$. Nechť A, B jsou shora omezené, neprázdné množiny. Jaký vztah platí mezi čísly $\sup A + \sup B$ a $\sup C$?

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

288. Posloupnost (a_n) je aritmetická právě tehdy, když pro každé přirozené číslo $n>1$ platí
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$
Dokažte!

289. Je-li (a_n) aritmetická posloupnost, pak pro každé přirozené číslo k a pro každé přirozené číslo $n>k$ platí
$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$
Dokažte! Platí také obrácená implikace?

290. Posloupnost (a_n) je geometrická právě tehdy, když pro každé přirozené číslo $n>1$ platí
$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} . a_{n+1}}.$$
Dokažte!

291. Je-li (a_n) geometrická posloupnost, pak pro každé přirozené číslo k a pro každé přirozené číslo $n>k$ platí
$$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} . a_{n+k}}.$$
Dokažte! Platí také obrácená implikace?

292. Nechť pro členy posloupnosti (a_n) platí:
$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k \quad (k \in N).$$
Dokažte, že pro $n \in N$ je $a_n = 2^{n-1} + 1$.

293. Je dána posloupnost (a_n), v níž $a_1 = a_2 = 1$ a každý další člen je roven součtu dvou předcházejících členů. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

294. Dokažte, že $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, jestliže $a_1 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$, $a_2 = \dfrac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$, kde $\alpha \neq \beta$, a pro každé přirozené číslo k platí
$$a_{k+2} = (\alpha + \beta)a_{k+1} - \alpha . \beta\, a_k.$$

295. Dokažte, že $a_n = \cos(n\alpha)$, je-li $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \cos 2\alpha$, a pro každé přirozené číslo k platí
$$a_{k+2} = 2a_{k+1} \cos\alpha - a_k.$$

296. Vyšetřete monotonii následujících posloupností (a_n) ; v případě monotonních posloupností určete charakter monotonie, tj. zjistěte, zda jde o posloupnost rostoucí, klesající, ostře rostoucí, ostře klesající.

a) $a_n = \sqrt{n}$; b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; c) $a_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n + 1}$;

d) $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2 + 3n + 1}$; e) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 100}$; f) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

g) $a_n = \sqrt[n]{n!}$; h) $a_n = \left(\sqrt{n} - n\right)^k$, $k \in N$;

i) $a_n = \left(n - \sqrt{n}\right)^n$; j) $a_n = \left(\sqrt{n} - n\right)^n$;

k) $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2} - \dfrac{(-1)^n}{n^2}$; l) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; m) $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$;

n) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$; o) $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$, $c>0$;

p) $a_n = \left(\dfrac{n + 1}{n}\right)^n$; r) $a_n = \left(\dfrac{n + 1}{n}\right)^{n+1}$.

(V příkladech p), r) užijte binomickou větu!)

297. Určete charakter monotonie geometrické posloupnosti v závislosti na prvním členu a_1 a kvocientu q.

298. Určete charakter monotonie posloupnosti $a_n = cn + d$ v závislosti na parametrech c, d .

299. Nechť c, d jsou reálná čísla, $d>0$. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby posloupnost $a_n = \dfrac{n + c}{n + d}$ byla a) ostře rostoucí; b) ostře klesající.

300. Určete charakter monotonie posloupnosti $a_n = n^2 + pn + q$ v závislosti na parametrech p, q .

301. Najděte posloupnost (a_n) takovou, že

$$a_1 + a_2 + a_3 = 100 \ , \quad a_{n+1} = a_n + n + 2 \quad \text{pro každé } n \in N \ .$$

Dokažte, že tato posloupnost je ostře rostoucí.

302. Posloupnost (a_n) je zadána takto: a_1 je libovolné reálné číslo, další členy posloupnosti jsou definovány rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n + 3 \ .$$

Dokažte, že (a_n) je ostře rostoucí.

303. Vyšetřete monotonii následujících posloupností definovaných rekurentně:

a) a_1 libovolné reálné číslo, $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 4a_n - 2$;

b) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$, $(c>0)$;

c) $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, $(c>0)$;

d) a_1 libovolné kladné číslo, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[a_n + \frac{c}{a_n}\right]$, $(c>0)$.

304. Dokažte, že platí: jsou-li (a_n), (b_n) dvě rostoucí posloupnosti reálných čísel, pak posloupnost (a_n+b_n) je také rostoucí. Podobně pro ostře rostoucí, klesající, ostře klesající posloupnosti.

305. Najděte rostoucí posloupnost (a_n) a klesající posloupnost (b_n) reálných čísel tak, aby posloupnost (a_n+b_n) byla
a) rostoucí; b) klesající; c) ani rostoucí ani klesající.

306. Jsou-li (a_n) , (b_n) dvě rostoucí posloupnosti reálných čísel, musí být i posloupnost $(a_n.b_n)$ rostoucí?

307. Buď (a_n) posloupnost kladných reálných čísel. Je-li tato posloupnost rostoucí, co lze říci o charakteru monotonie posloupností

a) (a_n^2) ; b) (a_n^k) , $k\in N$; c) $\left(\frac{1}{a_n}\right)$?

308. Sestrojte rostoucí a omezenou posloupnost (a_n) tak, aby pro všechna přirozená n platilo:

a) $a_{n+1} > \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$; b) $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$; c)* $a_{n+1} < \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

309. Určete, v kterých případech je posloupnost (b_n) podposloupností posloupnosti (a_n) ; $c \in \mathcal{R}_+$:

a) $a_n = c^n$, $b_n = c^{4n+(-1)^n}$; b) $a_n = c^n$, $b_n = c^{n+4(-1)^n}$;

c) $a_n = c^n$, $b_n = c^{\sqrt{n}}$; d) $a_n = c^{\sqrt{n}}$, $b_n = c^n$;

e) $a_n = \dfrac{n+2}{n+5}$, $b_n = \dfrac{\left[\frac{n}{2}\right] + 2}{\left[\frac{n}{2}\right] + 5}$;

f) $a_n = \dfrac{n+2}{n+5}$, $b_n = \dfrac{\left[\frac{3}{2}n\right] + 2}{\left[\frac{3}{2}n\right] + 5}$;

g) $a_n = \dfrac{n+2}{n+5}$, $b_n = \dfrac{n^{\frac{3}{2}} + 2}{n^{\frac{3}{2}} + 5}$;

h) $a_n = \dfrac{1}{n+n^2}$, $b_n = \dfrac{1}{3^{n+1} - 2^{n+3} + (3^{n+1} - 2^{n+3})^2}$.

310. Je možno vybrat z posloupnosti (a_n) nekonečně mnoho posloupností tak, aby každý člen posloupnosti (a_n) byl členem nejvýše jedné podposloupnosti?

311. Dokažte, že každá prostá posloupnost přirozených čísel má nějakou ostře rostoucí podposloupnost.

DEFINICE LIMITY POSLOUPNOSTI

312. Zapište pomocí kvantifikátorů:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje .

313. Které z následujících tvrzení jsou ekvivalentní s tím, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$?

a) Existuje takové okolí H_a bodu a, že nekonečně mnoho členů a_n v něm neleží.

b) Existuje takové okolí H_a bodu a, že v něm leží nejvýše konečně mnoho členů a_n.

c) V žádném okolí H_a bodu a neleží nekonečně mnoho členů a_n.

314. Která z následujících tvrzení jsou ekvivalentní s tím, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in C$?

a) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_n-a|< 2\varepsilon\right)$

b) Ke každému n_0 existuje $\varepsilon>0$ tak, že pro všechna $n>n_0$ platí $|a_n-a| < \varepsilon$.

c) $\left(\forall\, \varepsilon>0,\ 0<\varepsilon<1\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_n-a|< \varepsilon\right)$

d) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_n-a|< \frac{1}{\varepsilon}\right)$

e) $\left(\forall\, \varepsilon>0,\ 0<\varepsilon<1\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_n-a|< \frac{1}{\varepsilon}\right)$

f) $\left(\forall\, \varepsilon\geq0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_n-a|\leq \varepsilon\right)$

315. Pomocí definice limity posloupnosti dokažte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+i} = 1$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} n.i^n = \infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2-n^3\right) = -\infty$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1000}{n} = +\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{n}}{1+\sqrt{2n}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = 0$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-5n+3}{2n^2+n-7} = \frac{1}{2}$

316. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a nechť rovnost $a_n = b$ platí pro nekonečně mnoho různých přirozených čísel n. Potom a = b. Dokažte.

317. Nechť pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je množina $\left\{ a_n \mid n \in N \right\}$ konečná. Potom tato posloupnost konverguje právě tehdy, existuje-li $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n = a_{n_0}$. Dokažte.

318. Buď $k \in N$ a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková posloupnost, že pro všechna přirozená n je $a_{n+k} = a_n$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje právě tehdy, je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konstantní posloupnost. Dokažte.

319. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Potom posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $c_{2n-1} = a_n$ a $c_{2n} = b_n$, má limitu právě tehdy, když $a = b$. Dokažte.

320. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokažte, že
a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má ostře klesající podposloupnost;
b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá rostoucí podposloupnost.

321. Nechť pro všechna přirozená n platí $a_n \le a_{n+2}$. Potom posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má konečnou limitu právě tehdy, je-li shora omezená a platí $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dokažte.

322. Dokažte neexistenci limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{2+(-1)^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} i^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} \cdot \left(-1\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{2\pi n}{3}\right)$

323. Co lze říci o limitě posloupnosti, která není shora omezená?

324. Co lze říci o limitě posloupnosti, která má nekonečně mnoho členů kladných a nekonečně mnoho členů záporných?

325. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ neexistují. Co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n + b_n\right)$, resp. o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n$?

326. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + b_n\right)$ neexistuje. Mohou existovat obě limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

327. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n$ neexistuje. Mohou existovat obě limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

328. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a množina $\left\{ b_n \mid n \in N \right\}$ je omezená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$. Dokažte.

329. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a množina $\left\{ b_n \mid n \in N \right\}$ je omezená. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n + b_n\right) = +\infty$. Dokažte.

330. S použitím vhodných odhadů příslušných výrazů dokažte z definice limity tato tvrzení:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 - 10n^3}{n+5} = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\sqrt{n} - 2\sqrt[3]{n} + 4}{4 - 5\sqrt{n}} = -\dfrac{3}{5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\ \sin n}{n+1} = 0$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n! - n^n \right) = -\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 . 2^{-n} = 0$

331. Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má konečnou limitu. Z definice limity posloupnosti dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = 0$.

332. Sestrojte posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ a zároveň

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = +\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = 1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = 0$.

333. Nechť posloupnost nenulových čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má konečnou limitu různou od nuly. Z definice limity posloupnosti dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

334. Sestrojte posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = -\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

335. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$, kde $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p_n} = a$.

LIMITY RACIONÁLNÍCH A IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Vypočtěte limity (v $\overline{R}$, v př. 338, 339, 340, 342, 343, 344 i v $\overline{C}$):

336. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^5-1000n^4\right)$ 337. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1-n).(n^2+5n-7)+(1+n).(n^2-n+10)\right)$

338. $\lim\limits_{n\to\infty} P_k(n)$, kde $P_k(n)$ je polynom k-tého stupně proměnné n ($k\geq 1$).

339. a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n.n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} i^n.n$

340. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2ni+5}{3ni+5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5i}{3ni+5}$

341. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-7n+1}{n^2-3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-7n+1}{n^3-3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-7n+1}{n^4-3}$

342. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+i}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+i}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+4}}{\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}}$

343. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, kde $P_k(n)$ resp. $Q_l(n)$ jsou polynomy k-tého, resp. ι-tého stupně.

344. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(in-1)(in-2)(in-3)(in-4)(in-5)}{(3n-4)^5}$

345. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^{20}(3n+5)^{30}}{(2n+1)^{50}}$ 346. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n-1)^7(n^2-5n+1)^3(3n^4-1)^5}{(n^3+4n^2+10)^4(2n+1)^{21}}$

347. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)(n^4+2)(n^6+3)\dots(n^{2k}+k)}{\left((kn)^k+1\right)^{k+1}}$, $k\in N$

348. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)(n^2+1)(n^4+1)(n^8+1)\dots(n^{2^k}+1)}{\left(5n^2-n+1\right)^{2^k}}$, $k\in N$

349. Sestrojte posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)c_n \neq \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b\right)c_n$, kde $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n + b_n\right)c_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n + b_n\right)c$, kde $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{b_n}$, kde $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + b_n}{c_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n + b}{c_n}$, kde $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Vypočtěte limity:

350. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2} \right)$

351. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3} \right)$

352. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + (-1)^{n+1}.\dfrac{n}{n} \right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + (-1)^{n+1}.\dfrac{n}{n} \right|$

353. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2}{n^2} - \dfrac{4n^2}{3n+1} \right)$

354. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} \right)$

355. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3}$

356. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}.k^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}.k^2 \right|$

357. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 5^2 + 9^2 - 13^2 + \ldots + (4n-3)^2.(-1)^{n+1}}{1 - 4^2 + 7^2 - 10^2 + \ldots + (3n-2)^2.(-1)^{n+1}}$

358*. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}$, $p \in N$

359. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{\binom{3}{2}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\binom{4}{2}}\right)\left(1 - \dfrac{1}{\binom{5}{2}}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{\binom{n}{2}}\right)$

360*. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^3-1}{2^3+1} . \dfrac{3^3-1}{3^3+1} . \ldots . \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$

361. $\lim\limits_{n\to\infty} (n - 10\sqrt{n})$ 362. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n})$ 363. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[4]{n^3})$

364. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(pn^r - rn^p)^2 - (r + p)n^{r+p} \right]$, kde r, p jsou kladná racionální čísla.

365.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n^{2/3} + n^{1/2} + 1)^2 - (n^{2/3} - n^{1/2} + 1)^2 \right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n^{2/3} + n^{1/2} + 1)^k - (n^{2/3} - n^{1/2} + 1)^k \right]$, $k \in N$

366.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n^r + n^{-p} + 1)^2 - (n^r - n^{-p} + 1)^2 \right]$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n^r + n^{-p} + 1)^3 - (n^r - n^{-p} + 1)^3 \right]$, kde r, p jsou racionální kladná čísla.

367. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n^4}}}$ 368. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n} + 5}{2\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}$

369.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2/3} - 3}{n^{1/2} + 2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/2} - 3}{n^{1/2} + 2}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1/3} - 3}{n^{1/2} + 2}$

370. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} + 2\sqrt{n + 1}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - 3n}$ 371. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4 + 1} - 2n}{n + \sqrt[3]{(n^2 + 1)^2}}$

372. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[7]{n^2 - 5} - \sqrt[20]{n^7 + 1}}{3\sqrt[7]{n^2 + 1} + 2\sqrt[20]{n^7}}$

373.a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n} \right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{2n} \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$

374.a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(3\sqrt{n^2 + 1} - 2n \right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{3n^2 + 1} - 2n \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n \right)$

375.a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{3n^2-n+1}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+(-1)^n\,n+1}-\sqrt{n^2-(-1)^n\,n+1}\right)$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+(-1)^n\,n^{2/3}+1}-\sqrt{n^2-(-1)^n\,n^{2/3}+1}\right)$.

376. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}-n\sqrt{2}\right)$

377. $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}-n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, $k\in N$

378. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)$

379. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\right)$

380. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$

381. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left((n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}\right)$

382. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)$

383. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

384. a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}-\sqrt{3n+2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}-3\sqrt{n+2}\right)$

385. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(\sqrt{n^2+1}-2n+\sqrt{n^2-1}\right)$

386. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+1}-\sqrt[k]{n^k-1}\right)$, $k\in N$

387.a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\dfrac{\sqrt[3]{2n^3+1}-\sqrt[3]{2n^3-1}}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\dfrac{\sqrt[k]{2n^k+1}-\sqrt[k]{2n^k-1}}{\sqrt[k-1]{n^{k-1}+1}-\sqrt[k-1]{n^{k-1}-1}}$, $k\in N$

388. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-\sqrt{n^2-2n}\right)$

389. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4-n}-\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)$

390. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{3n}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{4n}} \right)$ 391. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{6}} \left[(n^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{3}} - (n^{\frac{1}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}} \right]$

392. $\lim\limits_{n\to\infty} n^r \left[\left[(n^{\frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right]^{\frac{1}{4}} - \left[(n^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right]^{\frac{1}{4}} \right]$, $r \in Q$

393. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[k]{(n+a_1)(n+a_2)\dots(n+a_k)} - n \right]$, $k \in N$, a_1 , a_2 , ... a_k jsou reálná čísla.

394. Určete konstanty a , b tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^3} - an - b \right) = 0$.

395. Určete konstanty a , b , c , d tak, aby platilo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 - n^2 + 1} - (a+b)n^2 - (c+d) \right) = 0$$

a současně

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - (a-b)n^2 - (c-d) \right) = 0 .$$

SEVŘENÉ POSLOUPNOSTI

396. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n^2}{n+1}\right]$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\sqrt{n}\right]}{\sqrt{n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n^{\frac{5}{13}}\right] - \left[n^{\frac{9}{25}}\right]$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left[\sqrt[3]{\left[\sqrt{n}\right]}\right]}{\sqrt[6]{n}}$

397. Ukažte, že a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n}{n+1}\right] \neq \left[\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}\right]$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n+1}{n}\right] = \left[\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}\right]$.

398. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$). Potom i $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a_n\right] = +\infty$ (resp. $-\infty$). Dokažte.

399. Sestrojte posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistovala a $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a_n\right]$ existovala;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existovala a $\lim\limits_{n\to\infty} \left[a_n\right]$ neexistovala.

400. Nalezněte nutnou a postačující podmínku pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, aby $\left[\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left[a_n\right]$. (Úmluva: $[-\infty]=-\infty$, $[+\infty]=+\infty$)

401. Nechť pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí: $2 \le a_n \le 3$ pro všechna přirozená n. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+5n^2}{n+1} - n^2 - n.a_n\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \cos a_k\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^{2n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[a_k\right]^k$.

Vypočtěte limity:

402. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \dots + \dfrac{1}{n^2+n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+k^2}}$ d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+k^4}}$

(Návod pro d),e): Rozdělte na dvě sumy od 1 do $[n^{\alpha}]$ a od $[n^{\alpha}]+1$ do n a zvolte vhodné α.)

e)* $\lim\limits_{n\to\infty} n.\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k^r}$, kde $r \in R$, $r \neq 2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n!)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (k!)^2$

403. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}\right)$ c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{n.4^n(n!)^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k^2+1}{3k^2-1}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4k+7}{3k-4}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,.\sqrt[n+1]{n+1}\ \ldots\ \sqrt[2n]{2n}$ g)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{5}{6}.\ldots.\dfrac{2n-1}{2n}$

404. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{\log n}$, kde $\alpha(n)$ je počet cifer čísla n

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta(n)}{\log n}$, kde $\beta(n)$ je počet nenulových cifer čísla n

405. Nechť $a \in R$. Dokažte, že

a) $$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ +\infty & \text{pro } a > 1 \end{cases};$$

b) v ostatních případech $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ neexistuje.

S použitím cvičení 405 vypočtěte limity (a, b jsou reálná čísla):

406. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^n}$ 407. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}$ 408. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$

409. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 3}{2 + a^n}$ 410. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{3n} + 5}{3 + a^{2n}}$ 411. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{2n+1} - 3}{1 + a^n}$

412. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{3n+1} - 3a^{n+1}}{a^n + a^{3n}}$ 413. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n + 2^n}{(-3)^{n+1} + 2^{n+1}}$ 414. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$

415. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \ldots + a^n}{1 + b + b^2 + \ldots + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

416. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + (-1)^n a^n}{1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq -1$, $b \neq 1$.

Řešte rovnice:

417. $$\frac{8}{x+10} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3^2}{x^2} - \frac{3^3}{x^3} + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{x^n} \right)$$

418. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(1+x^2)^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(1+x)^k}$$

Vypočtěte limity (a, b jsou reálná čísla):

419. $\lim\limits_{n\to\infty} (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\dots(a^{2^n}+b^{2^n})$, $0 < a \le b$

420. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}$

421. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{9}{10}\right)^{n!}$

422. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2+1}}$$

423. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2^{-n}}{2^n + 2^{-n}}$$

424. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n^2-n+1} - 1}{3^{n^2-n+2} + 2}$ 425. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n^2+n}$ 426. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{3^n}$

427. $\lim\limits_{n\to\infty} (a^3)^n$ 428. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n^3}$ 429. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n^2} - a^n}{2a^{n^2} + a^n}$

430. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{[\sqrt{n}]}$ (Návod: posloupnost $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z posloupnosti $\left(a^{[\sqrt{n}]}\right)_{n=1}^{\infty}$.)

431. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2a^{n!} + 3a^n}{a^{n!} - 2a^{-n}}$$

432. Dokažte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (0 < a < +\infty)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(Návod: Spočítejte $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - 1)$)

Vypočtěte limity:

433. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{a}$, $(a \in R)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^3+5}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)}$, kde $P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$, $a_k > 0$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$, kde $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou kladná čísla .

434. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3^n}$ (Návod: $3^n = (1+2)^n$ a použijte binomickou větu.)

435. Dokažte: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 1 \\ 0 & \text{pro } |a| \le 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } a < -1 \end{cases}$, $k \in N$.

Vypočtěte limity:

436. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n-5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{n^5-3^n+2^n}$

437. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{[\sqrt{n}]}}{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n^2}}{n^3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$

438. Dokažte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} = 0$

Návod: $(n!)^2 = \prod\limits_{k=1}^{n} k(n-k+1)$.

BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA

439. Vyslovte nutnou a postačující podmínku pro to, aby posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neměla konečnou limitu.

440. Určete, která z následujících tvrzení jsou ekvivalentní s tvrzením $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{C}$.

a) $\left(\forall\, p \in N\right)\left(\exists\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon\right)$

b) $\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(\forall\, p \in N\right)\left(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon\right)$

c) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(\forall\, p \in \{1,2,3,4\}\right)\left(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon\right)$

d) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(\forall\, p \in N-\{1,2,3,4\}\right)\left(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon\right)$

e) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(\forall\, p \in N\right)\left(|a_{n+2p} - a_n| < \varepsilon\right)$

f) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(\forall\, p \in N\right)\left(|a_{n+2p} - a_n| < \varepsilon \wedge |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon\right)$

g) $\left(\forall\, \varepsilon>0\right)\left(\exists\, n_0 \in N\right)\left(\forall\, n>n_0\right)\left(|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon\right)$

441. Pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria dokažte, že následující limity existují a jsou konečné.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{2^k}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\cos(k)}{2+\cos(k)}\right)^k$

e)* $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

f) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

442. Pomocí Bolzanova-Cauchyova kritéria dokažte, že následující limity nejsou konečné.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

b) $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{j}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$, kde $\alpha \in (0,1)$

443. Nechť existuje konečná limita posloupnosti $\sum\limits_{K=1} a_k$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokažte.

444. Nechť existuje konečná limta posloupnosti $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je monotonní posloupnost. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. Dokažte. Ukažte, že podmínku monotonie posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nelze vynechat.

445. Nechť pro číselnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

Existuje $c > 0$ tak, že pro všechna $n \in N$ je $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| < c$.

Potom posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má konečnou limitu. Dokažte.

446. Určete, pro která reálná x existují konečné limity následujících posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{x^k}{k}$

LIMITY POSLOUPNOSTÍ ZADANÝCH REKURENTNĚ

447. Co lze říci o limitě posloupnosti (a_n), je-li pro každé $n \in N$

$$a_{n+2} = 2\,a_n - 5\ ?$$

Vyšetřete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

a) $a_1 = a_2 = 5$; b) $a_1 = a_2 = 6$; c) $a_1 = a_2 = 4$;

d) $a_1 = 5$, $a_2 = 6$; e) $a_1 = 6$, $a_2 = 4$.

448. Nechť pro posloupnost (a_n) platí rekurentní vztah $a_{n+1} = a_n^2 + 6a_n + 4$ pro každé $n \in N$. Co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$? Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li

a) $a_1 = 0$; b) $a_1 = -1$; c) $a_1 = -2$; d) $a_1 = -3$;

e) $a_1 = -4$; f) $a_1 = -5$.

449. Nechť pro posloupnost (a_n) platí rekurentní vztah $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n + 3$ pro každé $n \in N$. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Návod: Dokažte postupně: a) (a_n) je rostoucí, b) (a_n) nemá konečnou limitu (řešte příslušnou kvadratickou rovnici).

450. Nechť pro posloupnost (a_n) platí rekurentní vztah

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 4a_n - 2\ ,\quad (n \in N)\ .$$

Co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li: a) $a_1 = 0$; b) $a_1 = 3$; c) $a_1 = 2$.

Vypočtěte limity posloupností definovaných rekurentně :

451.* $a_1 = \dfrac{c}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a_n^2}{2}$, $(c > 0)$.

452.* $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$, $(c > 0)$.

453.* $a_1 = c$, $a_{n+1} = \dfrac{c}{3} + \dfrac{a_n^2}{3}$, $(c > 0)$.

454.* a_1 libovolné kladné, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{c}{a_n} \right)$, $(c > 0)$.

455.* $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$.

456. **(Podílové kritérium)**

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nenulových čísel. Pak platí:

je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$, **je** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > 1$, **je** $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Dokažte.

457. **(Odmocninové kritérium)**

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je číselná posloupnost. Pak platí:

je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$, **je** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q > 1$, **je** $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Dokažte.

458. **Pomocí předchozích cvičení vypočtěte limity:**

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k^2+1}{3k^2-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n^2}}{n!}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\ldots(1+a^n)}$, $a \neq -1$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{4k+7}{3k-1}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^{n^2}}{(n!)^3}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n^2}}{(n!)^n}$

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}{n!}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a^2)(1+a^4)\ldots(1+a^{2n})}$

459. **Co lze říci o** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, **je-li** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **?**

STOLZŮV A CAUCHYŮV VZOREC

Věta (Stolzova): Buďte $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ číselné posloupnosti. Nechť platí:

(i) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost kladných čísel;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ existuje.

Potom existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ a platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.

Vypočtěte limity posloupností pomocí Stolzovy věty:

460. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^5+2n}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} (n+k)\sqrt{k}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ $(p \in N)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1} \right)$ $(p \in N)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n+1)^p}{n^{p+1}}$ $(p \in N)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1!)^p + (2!)^p + \ldots + (n!)^p}{(n!)^p}$ $(p > 0)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^n} \sum\limits_{j=1}^{n} (j)^j$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{(k+1)}}{\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)^k}$

461. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$, jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$.

462. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n}{a_1 + a_2 + \ldots a_n}$, jesliže $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \overline{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, a $a_n > 0$ pro každé $n \in N$.

463. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{n^2}$, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{R}$.

464. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existuje. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ také existuje a obě limity se rovnají. Dokažte.

Sestrojte posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ neexistovala a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ existovala.

465. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \dfrac{x_2}{2} + \ldots + \dfrac{x_n}{n}}{1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}}$.

466. Nechť $a \in R$ a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost, pro kterou platí,že $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a) = 1$. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^2 a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + n^2 a_n}{n^2} - \frac{a.n}{3} \right)$$

467. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \overline{R}$. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}\right)^2}{n^2}$$

Věta: Budiž $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel, pro kterou existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

Potom existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

468. Pomocí předchozí věty spočítejte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

469. Budiž $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 . x_2 . \ldots . x_n} = x$. Dokažte.

470. Sestrojte posloupnost kladných čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ existovala a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ neexistovala.

471. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Definujme posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, resp. $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takto: $b_n = a_{2n}$ a $c_n = a_{2n-1}$ pro každé $n \in N$.

Nechť existují $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ a obě jsou rovny číslu $a > 0$.

a) Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{a}$ nebo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.

b) Sestrojte posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která vyhovuje předpokladům příkladu a pro kterou $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ neexistuje.

c) Dokažte, že když v zadání zaměníme podíly $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, resp. $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ za $\sqrt[n]{b_n}$, resp. $\sqrt[n]{c_n}$, pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existuje a je rovna $\sqrt{a}$.

ČÍSLO e ; LIMITY S OBECNOU MOCNINOU A LOGARITMEM

472. Posloupnost $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí, posloupnost $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající (viz též cv.296), a obě posloupnosti mají stejnou konečnou limitu. Dokažte!

Číslo e definujeme jako společnou hodnotu limit posloupností (a_n), (b_n) z př.472.

473. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$e - \frac{3}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \frac{3}{n}$$

474. Dokažte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$;

b) pro všechna přirozená čísla n je $0 < e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n.n!}$.

475. Vypočtěte číslo e s přesností na 5 desetinných míst

a) s užitím př. 473 ; b) s užitím př.474 b) .

476. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e} - 1\right)$.

477. Dokažte, že číslo e je iracionální. (Návod: užijte př.474.b).)

478. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e.\left(\frac{n}{2}\right)^n .$$

479. Vypočtěte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{2^n.n!}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{3^n.n!}$.

480. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^n.n!}$ existuje a je konečná.

Vypočtěte:

481. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

482. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}$

483. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$

484. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n}$

485. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{n}$

486. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n+5}\right)^{n}$

487. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n}$

488. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1}$

489. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^{n}$

490. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

491. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

492. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n^2+1}\right)^{n}$

493. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} .$$

Vypočtěte:

494. $\lim\limits_{n\to\infty} n.\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

495. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n!}{n.\ln n}$

496. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{\log_a(10n)}$, $(a > 0,\ a \neq 1)$

497. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n^2+3n-2)}{\ln(n^5+n+1)}$

498. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})}$

499. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sqrt{1+\ln n}\left(\sqrt{\ln(2n^2+1)} - \sqrt{\ln(2n^2-1)}\right)$

500. Budiž (p_n) posloupnost reálných čísel taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} |p_n| = +\infty$.

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$. Dokažte. (Užijte větu ze cvič. 335.)

Vypočtěte:

501. $\lim\limits_{n\to\infty} e^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^n}\right)$

502. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3n-1}{n^2-2n+3}\right)^{2n+1}$

503. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}$

504. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(10n)}{\ln(2n)}\right)^{\ln n}$

505. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$, $(x\in R)$

506. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\ln n}\right)^{\ln n^2}$

507.* Dokažte: a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=+\infty$; b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k\ln k}=+\infty$.

Návod: Dokažte, že $\lim_{n\to\infty}a_n$ existuje a vyšetřete $\lim_{n\to\infty}a_{2^n}$.

508. Dokažte, že posloupnost $x_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$ je ostře klesající, posloupnost

$y_n=\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}-\ln n$ je ostře rostoucí a platí $0<\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n<1$.

Číslo $C=\lim_{n\to\infty}x_n$ se nazývá Eulerova konstanta ($C=0{,}577216....$).

Je tedy $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$, kde $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Návod: Užijte vlastnosti posloupností ze cvič.472.

S využitím cvič.508 vypočtěte limity:

509. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n}\right)$

510. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

511. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\dfrac{k}{k^2-1}$

512. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k$, kde $x_{3n}=-\dfrac{1}{2n}$, $x_{3n-1}=\dfrac{1}{4n-1}$, $x_{3n-2}=\dfrac{1}{4n-3}$.

513. a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{n^2}\dfrac{1}{k}$; b) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n}+\dots+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

514. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\ln\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}\right)$

515. $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{n^2}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)$

516. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}}{\ln n}$

517. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+(-1)^k}$

LIMES SUPERIOR, LIMES INFERIOR A HROMADNÉ HODNOTY

518. Vypočtěte limes superior a limes inferior následujících posloupností:

a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_n = n + (n+1).(-1)^n$

c) $a_n = 3^{n.\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$ d) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}.\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

e) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$ f) $a_n = \sin^n\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$

g) $a_n = \sqrt{n^2-1} - \left[\sqrt{n^2-1}\right]$ h) $a_n = \sqrt{n^2-n} - \left[\sqrt{n^2-n}\right]$

i) $a_n = \sqrt[n]{\left(2+(-1)^n\right)^n + \left(3+(-1)^n\right)^n}$ j) $a_n = n^{\frac{4}{3}}.\left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2+(-1)^n}\right)$

k) $a_n = \sqrt{n^2+(-1)^n.n+1} - \sqrt{n^2-(-1)^n.n+1}$

l) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}.k^2$ m) $a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.\dfrac{a^k+3}{a^k}$, $(a \neq 0)$

n) $a_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.\dfrac{k}{k+1}$

o) $a_n = \sum_{k=1}^{n^2}\dfrac{1}{k} - \ln\left(1 + n + (2+(-1)^n).n^2\right)$

p) $a_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$ q) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n.(\cos\frac{n\pi}{2}+1)}$

519. Co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 5$?

520. Co lze říci o $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$?

521. Pro každou posloupnost platí $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\limsup\limits_{n\to\infty}(-a_n)$. Dokažte.

522. Nechť pro všechna přirozená n platí $a_n \le b_n$. Dokažte, že

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$; b) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

523. Nechť platí, že $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$. Plyne odtud existence takového čísla n_0 , že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n < b_n$?

b) $\left|\liminf_{n\to\infty} a_n\right| \le \limsup_{n\to\infty} |a_n|$;

c) $\left|\liminf_{n\to\infty} a_n\right| \ge \liminf_{n\to\infty} |a_n|$.

525. Dokažte: a) $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \liminf_{n\to\infty} |a_n| = 0$;

b) $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \limsup_{n\to\infty} a_n = 0$.

Platí také obrácené implikace ?

526. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel. Potom

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} a_n}\,, \text{ je-li } \liminf_{n\to\infty} a_n \ne 0\,;$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty\,, \text{ je-li } \liminf_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Dokažte.

527. Dokažte:
$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,,$$

pokud mají uvedené výrazy smysl.

Nalezněte posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby všechny nerovnosti byly ostré.

528. Platí tvrzení v předchozím příkladě, když zaměníme součet součinem ?

529. Najděte všechny hromadné body posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

a) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{q}\right)$ $\quad q \in N$

b) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{q}\right).\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{q}\right)$ $\quad q \in N$

c) $a_n = \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right]$ $\quad$ d) $a_n = \sin^n\left(\frac{n\pi}{10}\right)$

e) $a_1 = \frac{1}{2}\,;\quad a_{n+1} = \begin{cases} \frac{p+1}{q}\,, & \text{když } a_n = \frac{p}{q} \text{ a } p < q-1 \\ \frac{1}{q+1}\,, & \text{když } a_n = \frac{q-1}{q} \end{cases}$

530. Bod $a \in \overline{R}$ je hromadnou hodnotou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, jestliže v libovolném okolí H_a bodu a leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Dokažte.

531. Nechť $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ jsou hromadné hodnoty posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Nechť b je hromadná hodnota posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom také b je hromadná hodnota posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Dokažte.

532. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost taková, že $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Potom množina všech hromadných hodnot posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je interval $\langle \liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n \rangle$ (v případě, že $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexisuje) nebo $\{\lim_{n\to\infty} a_n\}$ (v případě, že limita existuje). Dokažte.

533. Sestrojte omezenou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$.

534. Sestrojte omezenou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, aby množina hromadných hodnot byl interval $\langle \liminf_{n\to\infty} a_n, \limsup_{n\to\infty} a_n \rangle$, a přitom $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$ neexistovala.

535.* Nechť v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí nerovnost $0 \le a_{m+n} \le a_m + a_n$ pro všechna $m,n \in N$. Potom existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\left\{ \frac{a_n}{n} \mid n \in N \right\}$$

Dokažte.

536. Dokažte, že platí: a) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{(\log n)^k} = +\infty \quad \text{pro každé } k \in N ;$$

b)* $$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n^{\varepsilon}} = 0 \quad \text{pro každé } \varepsilon > 0 ;$$

kde $\nu(n)$ je počet dělitelů čísla n.

537. Nalezněte posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel takovou, aby platilo:

$$\left(\forall\, k > 0\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(\log n)^k} = +\infty \right) \wedge \left(\forall\, \varepsilon > 0\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{\varepsilon}} = 0 \right)$$

538. Vypočtěte:

a) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$

(Návod: Ukažte, že $\liminf_{n\to\infty} a_n \ge K$ pro každé reálné K.)

b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} . x_k$, víte-li, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(Návod: Ukažte, že $x-\varepsilon < \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n < x+\varepsilon$ pro $\varepsilon > 0$.)

V Ý S L E D K Y

ROVNICE A NEROVNICE

1. ■a) 5; -8; ■b) 5. **2.** $\langle -4,0\rangle$. **3.** $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$. **4.** 1, 2, $\frac{1}{2}$, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$. **5.** $a = -4$;

6. $a = 2$. **7.** $a = 1$, $a = -1$. **8.** $n_{min} = -9$, $n_{max} = 1$.

9. Pro $a>4$: $\langle \frac{2}{a-4},+\infty)$; pro $a<4$: $(-\infty,\frac{2}{a-4}\rangle$; pro $a = 4$ nemá řešení. **10.** $(-\infty,0) \cup (1,+\infty)$. **11.** $(-\infty,1) \cup \langle \frac{4}{3},+\infty)$.

12. $(0,\frac{1}{3}\rangle \cup \langle 1,+\infty)$. **13.** $(-6,+\infty)$. **14.** $(-\infty,-1)$.

15. ■a) $x < -\frac{26}{3}$; ■b) $x < \frac{28}{5}$; ■c) $x \geq -\frac{26}{3}$; d) $-\frac{26}{3} \leq x < \frac{28}{5}$; ■e) $x \geq \frac{28}{5}$. **16.** Ne. **17.** Nemá řešení. **18.** $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$.

19. $(3,12)$. **20.** $(-\infty,-\frac{11}{5}) \cup (-1,1)$. **21.** $(2,\frac{29}{10}) \cup (5,+\infty)$.

22. $\{0\} \cup \langle 1,+\infty)$. **23.** $(-\infty,0)$. **24.** $(-\infty, 3\rangle \cup \langle 0,\frac{16}{11})$.

25. $(2,9)$. **26.** $(-\frac{3}{2},+\infty)$. **27.** $(\frac{2}{3},4)$. **28.** $(\frac{2}{3},2)$.

29. $(-1,4)$. **30.** $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$. **31.** $(0,+\infty)$.

32. $(-\infty,\frac{5}{4}\rangle \cup \langle \frac{7}{4},+\infty)$. **33.** $(-\infty,2) \cup \{3\} \cup (4,+\infty)$.

34. ■a) $(-3,2)$; ■b) $\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$; ■c) $(-\infty,+\infty)$; ■d) nemá řešení.

35. $(-4,-1) \cup (-1,6)$. **36.** $\langle -1-\sqrt{6},-2) \cup \langle -1+\sqrt{6},+\infty)$.

37. $(-\infty,-\sqrt{7}\rangle \cup (-1,\sqrt{7}\rangle$. **38.** $\langle \frac{9-\sqrt{105}}{2},3) \cup \langle \frac{9+\sqrt{105}}{2},+\infty)$.

39. $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$. **40.** $(-\infty,+\infty)$. **41.** $\langle -1,+\infty)$.

42. $(-\infty,-4) \cup (-3,-\frac{5}{2}) \cup (-2,-1) \cup (0,+\infty)$. **43.** ■a) $t<-4$ nebo $t>8$; ■b) $t=-4$ nebo $t=8$; ■c) $-4 < t < 8$. **44.** $a<-3$ nebo $a\geq 1$. **45.** $a>0$.

46. $\langle -\frac{3}{2}, 3\rangle$. **47.** $(-\infty,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\rangle$. **48.** $\langle 1, 6-2\sqrt{6})$.

49. $(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\rangle$. **50.** $\langle -2, 1\rangle \cup \{3\}$. **51.** $\langle 0, \frac{3-\sqrt{5}}{6})$.

52. $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty)$. **53.** $\langle -\frac{9}{5}, -\frac{16}{9})$. **54.** $(-1,2)$.

55. $(2-\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \cup (2, 2+\sqrt{3})$. **56.** $\langle 2-\sqrt{6}, 2-\sqrt{2}\rangle \cup \{2+\sqrt{6}\}$.

57. $(-2, 2)$. **58.** $\langle -2, 1-\sqrt{7}\rangle \cup \langle 1+\sqrt{7}, 4\rangle$. **59.** $(-1, 5)$.

60. $(-4, \sqrt{\frac{5}{2}}\rangle$. **61.** $\langle -6, -\frac{3}{2}) \cup (0,+\infty)$.

62. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{3}{4}, 3) \cup (3,+\infty)$. **63.** $\{-5\} \cup \langle -2, -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 4,+\infty)$.

64. $(-\infty, -13\rangle \cup \langle -4, -1) \cup \{5\}$. **65.** $(0,+\infty)$.

66. $\langle 2-\sqrt{5}, 1\rangle \cup (5,+\infty)$. **67.** $\langle 1, 3) \cup \{5\}$. **68.** $\langle 0,+\infty)$.

69. $\langle \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\rangle \cup \langle 0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\rangle \cup \langle 1, \sqrt{\frac{3}{2}}\rangle$.

LOGARITMY A MOCNINY

71. ■a) $-\frac{1}{6}$; ■b) $\frac{5}{4}$; ■c) 5 ; ■d) 20 ; ■e) $\frac{25}{2}$; **72.** ■a) $1-\log 2$; ■b) $-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\log 2+\log 3$; ■c) $(11-29\log 2)/12$. **73.** ■a) $\frac{17}{24}$, $(a>0, a\neq 1)$; ■b) $1-\frac{1}{2^n}$, $(a>0, a\neq 1)$; ■c) $a\log 2-b\log 3$, $(2^a\neq 3^b)$; ■d) $1+2\log_{a-b}|a+b|$, $(a>b,\ a-b\neq 1,\ a+b\neq 0)$; ■e) $\frac{1}{1-|\log a|}$, $(a>0, a\neq 10, a\neq\frac{1}{10})$; ■f) a pro $a\geq 1$, $\frac{1}{a}$ pro $0<a<1$; ■g) 10 , $(a>0,\ a\neq 1)$; ■h) 10 pro $a>1$, $\frac{1}{10}$, pro $0<a<1$. **75.** ■a) 2 ; ■b) 10 . **76.** ■a) $\log_y a$, $(x>0,\ x\neq 1)\wedge$ $\wedge[(a>1,\ y>1)\vee(0<y<1,\ 0<a<1)]$; ■b) z , $(a,x,y,z>0,\ a,x,y,z\neq 1)$; ■c) $\frac{a}{x^b}$, $(b>0,\ b\neq 1)\wedge[(a>1,\ x>1)\vee(0<x<1,\ 0<a<1)]$. **77.** ■a) $x_3<x_2=x_5<x_4<x_1$; ■b) $x_1<x_4<x_2=x_5<x_3$; ■c) $x_4<x_1<x_2=x_5<x_3$. **78.** ■a) $x>0$ pro $a=0$, $x=\frac{a}{10^a-1}$ pro $a\neq 0$; ■b) $x>0$ pro $a=1$; $x=a^{\frac{1}{a-1}}$ pro $a>0,\ a\neq 1$; nemá řešení pro $a\leq 0$; ■c) c^b pro $a,b,c>0$ a $a,b,c\neq 1$; ■d) $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ pro $a>0$, pro $a\leq 0$ nemá úloha řešení ; ■e) $x=\left[a\right]^{\frac{1}{a}}$ pro $a>0,\ a\neq 1$; ■f) $x=a$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

79. ■a) 3 ; ■b) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; ■c) $-\frac{1}{4}$; ■d) $\frac{1}{6}$, 2 ; ■e) nemá řešení ; ■f) nemá řešení . **80.** 4 , $k<0$. **82.** ■a) $\frac{\log 13-\log 31}{\log 5-\log 3}$; ■b) 2 , -2 ; ■c) 2 ; ■d) 2 ; ■e) $\sqrt{\log_2(6+2\sqrt{10})}$; ■f) 1, 4 ; ■g) 1/10 , 100

83. ■a) $(2,6)$; ■b) $\left[\sqrt[5]{2},\sqrt[5]{16}\right]$. **84.** ■a) $\{5\}\cup(4+\sqrt{2},+\infty)$; ■b) $(-\infty,\ -9\rangle\cup(3,+\infty)$; ■c) $(0,1/2\rangle\cup\langle 4,+\infty)$; ■d) $(6/5\ ,\ 4/3\rangle$; ■e) $(2^{-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2})\cup(1,2^{\sqrt{2}})$. **85.** ■a) $(-\infty,3)$; ■b) $(0,\ \log_3\frac{4}{3})$; ■c) $(-\infty\ ,0\rangle\cup\langle\log_7 3\ ,\ \log_7 5\rangle$; ■d) $(-\infty,\log_{2/3}(4+\sqrt{5})\rangle\cup\langle\log_{2/3}(4-\sqrt{5}),-1\rangle$.

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

87. $\sin x=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x=\dfrac{1-\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.

89. ■a) $\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$; ■b) $\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$; ■c) $\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$. **91.** ■a) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$; ■b) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$. **92.** ■a) $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}$; ■b) $\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2\sqrt{10}}}$; ■c) $-\frac{3}{4}$; ■d) $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$. **94.** $\cos 2^\circ$.

95. ■a) $x=y+2k\pi$ nebo $x=\pi-y+2k\pi$, $k\in Z$; ■b) $x=y+2k\pi$ nebo $x=\pi-y+2k\pi$,

■c) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z; ■d) $\pi+2k\pi$, k∈Z; ■e) $\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $\frac{5}{4}\pi+2k\pi$, k∈Z; ■f) $\frac{\pi}{3}+k\pi$, k∈Z; ■g) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, k∈Z; ■h) $-\frac{\pi}{3}+k\pi$, k∈Z.

97. ■a) $\frac{2k\pi}{3}$, $\frac{(2k+1)\pi}{17}$, k∈Z; ■b) $\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z; ■c) $\frac{10}{9}(1+2k)\pi$, k∈Z; ■d) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\frac{7}{6}\pi+2k\pi$, k∈Z.

98. ■a) $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\pi$, k∈Z; ■b) $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, k∈Z; ■c) $k\frac{\pi}{2}$, k∈Z; ■d) $\frac{\pi}{4}+k\pi$, k∈Z; ■e) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, k∈Z; ■f) $\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $\frac{\pi}{3}+k\pi$, $-\frac{\pi}{3}+k\pi$, k∈Z; ■g) $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\frac{\pi}{4}+k\pi$, k∈Z; ■h) $k\frac{\pi}{4}$, k∈Z; ■i) $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $\frac{2}{3}\pi+2k\pi$, $\frac{5}{3}\pi+2k\pi$, k∈Z; ■j) $\pi+2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z; ■k) $\pi+2k\pi$, $\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}k\pi$, k∈Z; ■l) $2k\pi$, $-\frac{\pi}{2}+4k\pi$, $\frac{5}{2}\pi+4k\pi$, k∈Z.

99. $K=\sqrt{A^2+B^2}$, ϕ je úhel splňující podmínky $\cos\phi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ a $\sin\phi=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

100. ■a) $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z; ■b) $\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi$, k∈Z.

101. 250 kořenů. **102.** $a\in(36\pi^2, 64\pi^2)$. **103.** ■a) $1+\sqrt{2k\pi}$, $1-\sqrt{2k\pi}$, $-1+\sqrt{2(k\pi+1)}$, $-1-\sqrt{2(k\pi+1)}$, k∈Z, k≥0; ■b) $(-1)^k\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+k\pi}$, $(-1)^k\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+k\pi}$, k∈Z, k ≤ 0; ■c) $k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, k∈Z; ■d) $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, k∈Z.

104. $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}$.

105. ■a) $\bigcup_{k\in Z}\langle -\frac{3}{4}\pi+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\rangle$; ■b) $\bigcup_{k\in Z}\langle \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}k)$; ■c) $(x_o,\frac{\pi}{2})\cup(\pi-x_o,\frac{3}{2}\pi)$, kde $x_o\in(0,\frac{\pi}{2})$ takové, že $\sin x_o=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

106. ■a) $\bigcup_{k\in Z}(\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$; ■b) nemá řešení; ■c) $(-\frac{5}{6}\pi,-\frac{\pi}{6})\cup(0,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{5}{6}\pi,\pi)$.

107. ■a) 4, $k\pi$, k ∈ Z, k > 0; ■b) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$, k∈Z; ■c) $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, k∈Z.

108. 1, $-\frac{3}{2}$. **109.** První číslo je větší. **110.** 4 kořeny. **111.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

112. Buď $\left((x\ge y) \text{ a } (|x+y|\le \pi)\right)$ nebo $\left((x\le y) \text{ a } (|x+y|\ge \pi)\right)$.

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

113. ■a) 1; ■b) −i; ■c) −1; ■d) i; ■e) −i; ■f) 1 pro n=4k, i pro n=4k+1, −1 pro n=4k+2, −i pro n=4k+3 (k≥0 celé); ■g) 1 pro n=4k, −i pro n=4k+1, −1 pro n=4k+2, i pro n=4k+3 (k≥0 celé).

114. ■a) (0,1); ■b) (0,−1); ■c) $(-\frac{2}{13},\frac{9}{13})$; ■d) $(-\frac{13}{2},\frac{13}{2})$;

■e) ($\frac{[illegible]}{10}$, $\frac{[illegible]}{10}$) ; ■f) ([illegible]) ; ■g) ([illegible]) . $\boxed{115.}$ ■a) [illegible] ; ■b) $\frac{[illegible]}{\sqrt{10}}$;

■c) $\frac{8}{5}$; d) $\sqrt{\frac{109}{10}}$. $\boxed{116.}$ ■a) $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{1}{2}$; ■b) $x = 6$, $y = -5$;

■c) $x = -3$, $y = 0$; $x = -5$, $y = -2$. $\boxed{118.}$ ■a) $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$,

$x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; ■b) $x_1 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})\, i$, $x_2 = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})\, i$;

■c) všechna reálná x ; ■d) všechna ryze imaginární x ; ■e) všechna čísla x tvaru $a + ib$ ($a \in R$, $b \in R$), pro která platí : $(a + \frac{5}{3})^2 + b^2 = (\frac{4}{3})^2$ nebo $(a - \frac{5}{3})^2 + b^2 = (\frac{4}{3})^2$. $\boxed{119.}$ ■a) $3\, [\cos(\frac{3}{2}\pi) + i \sin(\frac{3}{2}\pi)]$;

■b) $\sqrt{2}\, [\cos(\frac{7}{4}\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi)]$; ■c) $4[\cos 0 + i \sin 0]$;

■d) $2[\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}]$; ■e) $\cos 0 + i \sin 0$; ■f) $\cos(\frac{3}{2}\pi) + i \sin(\frac{3}{2}\pi)$;

■g) $32\, [\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}]$; ■h) $\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$. $\boxed{120.}$ ■a) $-4\,(1 + i)$;

■b) -512 ; ■c) $2^{12}\,(1 - i)$; ■d) $2^9 . 3^5 .(1 + i\sqrt{3})$; ■e) -1 ;

$\boxed{121.}$ ■b) $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\, i$; $\boxed{122.}$ ■a) $1 + i\sqrt{3}$, -2 , $1 - i\sqrt{3}$; ■b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; ■c) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; ■d) $\sqrt{2}\,(1 + i)$, $\sqrt{2}\,(-1 + i)$, $\sqrt{2}\,(-1 - i)$, $\sqrt{2}\,(1 - i)$; ■e) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$;

■f) 3, 2, $\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$, $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$;

■g) $x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\phi + 2k\pi}{n} \right)$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $a = |a|\,(\cos\phi + i \sin\phi)$. $\boxed{123.}$ ■a) $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 1 - i$.

■b) $x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}}$;

$x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}} - i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}}$;

$x_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}} + i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}}$;

$x_4 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}} - i\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{8}}$;

■c) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{3 + i\sqrt{7}}{4}$, $x_5 = -\frac{3 - i\sqrt{7}}{4}$;

■d) $x_1 = 0$, $x_2 = i\sqrt{\dfrac{\quad}{2}}$, $x_3 = -i\sqrt{\dfrac{\quad}{2}}$,

$x_4 = i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}}$, $x_5 = -i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}}$.

ZKRÁCENÉ PSANÍ SOUČTU A SOUČINU

$\boxed{165.}$ ■a) 490 ; ■b) −91 ; ■c) 600 ; ■d) −833 . $\boxed{166.}$ n^2+2n .

$\boxed{168.}$ ■a) $2(2n+1)$; ■b) $(11-n).\dfrac{n+6}{2}$; ■c) $(am+an+2b)(n-m+1)/2$ pro $n \ge m$, 0 jinak ; ■d) $n^2(n+5)(n+2)/2$; ■e) $(n-m+1)^2\left[a + (b+c).\dfrac{m+n}{2}\right]$.

$\boxed{170.}$ ■a) $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3$; ■b) $n^4(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)/16$. $\boxed{171.}$ $\dfrac{mnS}{4}$.

$\boxed{173.}$ 2^n-1 . $\boxed{174.}$ ■a) $1 - \dfrac{1}{2^n}$; ■b) $\dfrac{2}{21}\left(1 - \dfrac{2^n}{9^n}\right)$;

■c) $\sqrt{2}.(\sqrt{2}+1).\left[(\sqrt{2})^n-1\right]$; ■d) $\dfrac{\sqrt{3^{a+b}}}{\sqrt{2^{cn+d}}}.\dfrac{\sqrt{3^{an}}-\sqrt{2^{cn}}}{\sqrt{3^a}-\sqrt{2^c}}$ pro $3^a \ne 2^c$, jinak $n\,\dfrac{\sqrt{3^b}}{\sqrt{2^d}}$. $\boxed{175.}$ ■a) $n(n+1)(2n+1)/6$; ■b) 3540 ; ■c) $n(n-1)(2n-1)/6$;

■d) $\dfrac{1}{6}\left[n(n+1)(2n+1)-m(m-1)(2m-1)\right]$; ■e) $\dfrac{1}{6}\left[n(n+1)(2n+1)+m(m+1)(2m+1)\right]$;

■f) $n(n-1)(4n+1)/6$. $\boxed{176.}$ ■a) $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$; ■b) $n(n+1)(n+2)(n+3)/4$; ■c) 0.

$\boxed{177.}$ $S_{r+1} = \dfrac{1}{r+2}\left[(n+1)^{r+2} - 1 - \sum_{j=0}^{r}\binom{r+2}{j}S_j\right]$, kde $S_j = \sum_{k=1}^{n} k^j$.

$\boxed{178.}$ ■a) $(-1)^n\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$; ■b) $(-1)^n.\dfrac{(n+1)n}{2}$; ■c) $-n(n+1)(2n+1)/6$;

■d) $(-1)^n.\dfrac{n^2(2n+3)}{4} + \dfrac{1}{8}.\left[1-(-1)^n\right]$; ■e) $\dfrac{3}{2} + (-1)^n\left[\dfrac{n(n+1)}{2} + \left[\dfrac{n+1}{2}\right] - \dfrac{1}{2}\right]$;

■f) $\left[1+(-1)^n\right].\dfrac{n}{4}$. $\boxed{179.}$ ■a) $1 - \dfrac{1}{n+1}$; ■b) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$; ■c) $\sqrt{n+1} - 1$.

$\boxed{181.}$ $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n} - 1\right)$; $\boxed{182.}$ ■a) $\dfrac{(n+3)n}{4}$; ■b) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{4}$.

$\boxed{183.}$ ■a) $\dfrac{2}{9}.\left[\dfrac{10}{9}(10^n-1)-n\right]$; ■b) $\dfrac{1-q^n+(q-1)nq^n}{(q-1)^2}$ pro $q\ne1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$ pro $q=1$;

■c) $\dfrac{2}{q-1}\left[q^n.\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{1-q^n+(q-1)nq^n}{(q-1)^2}\right]$ pro $q\ne1$; $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pro $q=1$.

$\boxed{184.}$ ■a) $n+1$; ■b) $\dfrac{2n+3}{3}$. $\boxed{185.}$ $a^n(q)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; ■b) $2\left(\sqrt[2^n]{2}\right)^{-1}$.

$\boxed{186.}$ ■a) 0 ; ■b) 0 . $\boxed{187.}$ ■a) $(n!)^{2n}$; ■b) $(n!)^{3n^2}$; ■c) $(n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$;

■d) $(n!)^{-2n^2}$; ■e) $\operatorname{tg} 2^n.\operatorname{cotg} 1$; ■f) $\dfrac{1}{a-1}.\left(a^{2^n} - 1\right)$ pro $a\ne1$, 2^n pro $a=1$;

■g) $\dfrac{2}{3}.\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$. $\boxed{188.}$ ■a) 2^n ; ■b) 0 pro $n \ge 1$, 1 pro $n = 0$.

$\boxed{189.}$ ■a) $\dfrac{2^{3n+6}}{21} - \dfrac{2^{2n+4}}{3} + \dfrac{2^{n+3}}{3} - \dfrac{8}{21}$; ■b) $2^{n(n+2)(n+1)^2/4}$;

■c) $n!\,\dfrac{(n!)^{n}-1}{n!-1}$; ■d) $(n!)^{(-n-1)n}$; ■e) $\dfrac{n(n+1)}{2.3^{n-1}}$; ■f) $(n!)^{3}.\dfrac{n+1}{2^{n}}$; ■g) 1 ;

■h) $2^{n+1}-1$; ■i) $2^{n+1}-1$; ■j) $2^{n+2}-n-3$; ■k) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$; ■l) $(-1)^{n}\left[\dfrac{n+2}{2}\right]-1$; ■m) $2\sin x.\left(1-\dfrac{1}{2^{n}}\right)$; ■n) $(a+b)^{n}$; ■o) $\log_{x}a.\dfrac{n(n+1)}{2}$.

190. ■a) $\dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ pro $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, jinak 0 ;

■b) $\dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ pro $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, jinak n ;

■c) $\dfrac{\sin(n\alpha)\sin(n+2)\alpha}{\sin\alpha}$ pro $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$, jinak 0;

■d) $\dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha+x\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ pro $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, jinak $n.\cos x$;

■e) $\dfrac{n\sin\alpha-\sin(n\alpha).\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$ pro $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$, jinak 0 ;

■f) $\dfrac{3\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{4\sin\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin\left(\frac{3n}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{3(n+1)}{2}\alpha\right)}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}$ pro $\alpha \neq 2k\pi/3$, $k \in Z$,

$\dfrac{3\sin\left(\frac{n}{3}k\pi\right)\cos\left(\frac{n+1}{3}k\pi\right)}{4\sin\frac{k\pi}{3}}+\dfrac{n}{4}$ pro $\alpha = 2k\pi$, $k \in Z$, $3 \nmid k$, jinak n .

191. ■a) 0 pro $q = \cos\alpha = \mp 1$; $\dfrac{q^{n+1}\sin(n+1)\alpha-q^{n+2}\sin(n\alpha)-g\sin\alpha}{2q\cos\alpha-q^{2}-1}$

jinak ; ■b) $\dfrac{q^{n+1}\cos(n+1)\alpha-q^{n+2}\cos(n\alpha)-g\cos\alpha+q^{2}}{2q\cos\alpha-q^{2}-1}$ není-li $q = \cos\alpha = \mp 1$, jinak n ; ■c) $\dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)\cos\left(\frac{n}{2}\alpha\right)-n\cos\left((2n+1)\alpha/2\right)\sin(\alpha/2)}{2\sin^{2}(\alpha/2)}$ pro $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, jinak 0 ; ■d) $\dfrac{n\sin\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\sin(\alpha/2)-\sin^{2}(n\alpha/2)}{2\sin^{2}(\alpha/2)}$ pro $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, jinak $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

MATEMATICKÁ LOGIKA

192. ■a) $x \in (1,+\infty)$; ■b) $x \in (0,1\rangle$; ■c) nevyhovuje žádné x; ■d) $x \in (-\infty,0\rangle$. **193.** Pro n tvaru $4k$, $4k+1$, $4k+3$, kde $k \in Z$. **194.** Je to výrok pravdivý. **195.** ■a) $\left(1+1=3\right) \Rightarrow \left(1+1=2\right)$, pravdivý výrok;

■b) $\left(1+1=4\right) \Rightarrow \left(1>2\right)$, pravdivý výrok; ■c) (Každý trojúhelník je pravoúhlý) $\Rightarrow$ (5 je prvočíslo), výrok pravdivý; ■d) $\left(1<2\right) \Rightarrow \left(2>3\right)$, výrok nepravdivý;

■e) $\left(2>3\right) \Rightarrow \left(1<2\right)$, výrok pravdivý. **196.** ■a) výrok je pravdivý pro sudá x; ■b) výrok je pravdivý pro x dělitelná devíti a pro x nedělitelná třemi; ■c) výrok je pravdivý pro všechna celá x ; ■d) výrok je pravdivý pro $x \in \{0\} \cup \langle 1,+\infty)$; ■e) výrok je pravdivý pro $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$; ■f) výrok není

■b) výrok pravdivý pro $x \neq 4(2k+1), k\in Z$. $\boxed{198.}$ ■a) pravdivý pro každý trojúhelník, ■b) není pravdivý pro každý trojúhelník.

$\boxed{199.}$ ■a) $[4|1911]\Leftrightarrow[1+1=2]$, výrok nepravdivý; ■b) $[2>3]\Leftrightarrow[3>4]$, výrok pravdivý, ■c) [1.8.1910 byla středa] $\Leftrightarrow$ [2.8.1910 byl čtvrtek], výrok pravdivý.

$\boxed{200.}$ ■a) pravdivý pro $x \geqslant -1$, ■b) pravdivý pro $x \geq 0$, ■c) pravdivý pro každé x, ■d) pravdivý pro každé x, ■e) pravdivý pro každé x.

$\boxed{201.}$ ■a) neplatí pro žádný trojúhelník, ■b) platí pro každý trojúhelník, ■c) platí pro každý trojúhelník, ■d) neplatí pro pravoúhlý trojúhelník s přeponou c, jinak platí. $\boxed{202.}$ ■a) $(A\vee B)\wedge(\neg A\vee\neg B)$ ■b) $A\vee B$ ■c) $(\neg A)\vee(\neg B)$ ■d) $A\wedge(\neg B)$ ■e) $A\Leftrightarrow B$. $\boxed{203.}$ $\neg(\neg A\wedge\neg B)$; $\neg(A\wedge\neg B)$; $(\neg(A\wedge\neg B))\wedge(\neg(\neg A\wedge B))$.

$\boxed{205.}$ ■a) ani tautologie, ani kontradikce, ■b) kontradikce, ■c) ani tautologie, ani kontradikce. $\boxed{206.}$ ■a) všechna přirozená čísla; ■b) x reálná nebo ryze imaginární čísla, a libovolný objekt; ■c) nezáporná reálná čísla; ■d) x a y nenulová reálná čísla; ■e) reálná čísla $x \geq 10$, ■f) komplexní čísla x, y, z taková, že $x^2 + y^2 + z^2$ je reálné číslo různé od nuly.

$\boxed{207.}$ ■a) $[\forall\, x \in R,\ x>1][x^2 - 1 > 0]$, výrok pravdivý;

■b) $[\forall\, x \in R][\exists\, n \in Z][x < n]$, výrok pravdivý;

■c) $[\forall\, c \in Z][\exists\, k \in Z][c^2 + c = 2k]$, výrok pravdivý;

■d) $[\forall\, a \in R][\forall\, b \in R][(a+b=1) \Rightarrow [(a \geq \frac{1}{2}) \vee (b \geq \frac{1}{2})]]$, výrok pravdivý;

■e) $[\forall$ A, A je výrok$][\forall$ B, B je výrok$][A \Rightarrow (A\vee B)]$, výrok pravdivý;

■f) $[\forall\, x \in Z]$[x je racionální], výrok pravdivý;

■g) $[\forall\, x \in C][(x^2 \in R) \Rightarrow (x \in R)]$, výrok nepravdivý;

■h) $[\forall\, (a,b,c) \in R^3][(a\neq 0) \Rightarrow (\exists\, x \in R)(ax^2 + bx + c = 0)]$, výrok nepravdivý;

■i) $[\forall\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná čísla$][[a_1 + a_2 + \ldots + a_n > n] \Rightarrow$ $\Rightarrow (\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, n\})(a_i > 1)]$, výrok pravdivý.

$\boxed{208.}$ ■a) $[\exists\, x \in R,\ x>1][x^2 - 1 \leq 0]$ ■b) $[\exists\, x \in R][\forall\, n \in Z][x \geq n]$ ■c) $[\exists\, c \in Z][\forall\, k \in Z][c^2 + c \neq 2k]$ ■d) $[\exists\, a \in R][\exists\, b \in R][(a+b=1)\wedge(a<\frac{1}{2})\wedge(b<\frac{1}{2})]$ ■e) $[\exists$ A, A je výrok$][\exists$ B, B je výrok$][\neg(A \Rightarrow (A\vee B)]$ ■f) $[\exists\, x \in Z]$[x není racionální] ■g) $[\exists\, x \in C][(x^2 \in R)\wedge(x \notin R)]$ ■h) $[\exists\, (a,b,c) \in R^3][(a \neq 0) \wedge (\forall\, x \in R)(ax^2 + bx + c \neq 0)]$ ■i) $[\exists\, (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kladná čísla$][[a_1 + a_2 + \ldots + a_n > n] \wedge (\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\})(a_i \leq 1)]$. $\boxed{209.}$ ano, oba výroky jsou pravdivé. $\boxed{210.}$ ■a,b,c,f,g,h) ano; ■d,e) ne.

$\boxed{211.}$ ■a) $[\forall\, (x,y) \in R^2][[(x + y = 2)\wedge(x \leq y)] \Rightarrow (x \leq 1)]$

■b) $[\exists \in R][\forall\, y \in R][(x \leq y)\vee(x \geq 2)]$ ■c) $[\forall\, y \in R][\exists\, x \in R][x > y]$

■d) $\left[\forall (x,y) \in R^2\right]\left[(x + y = 2) \Longrightarrow [(x > 0)\vee(y > 0)]\right]$

■e) $\left[\forall x \in R\right]\left[\exists (y,z) \in R^2\right]\left[(x+y=2)\wedge(y+z=2)\right]$

■f) $\left[\forall (x,y) \in R^2\right]\left[(x^2+ y^2= 2) \Longrightarrow [(|x| \le \sqrt{2}) \wedge (|y| \le \sqrt{2})]\right]$

■g) $\left[\forall x \in R,\ x>0\right]\left[\forall y \in R,\ y<0\right]\left[(x+y=2) \Longrightarrow (x >-2)\right]$

$\boxed{214.}$ ■b) Skupina má nejvýše jednoho člena. $\boxed{215.}$ A je pravdivý pro každé $p \in N$; B je pravdivý pouze pro p, která jsou dělitelná šesti, $A \Longrightarrow B$ je pravdivý pouze pro p, která jsou dělitelna šesti; $B \Longrightarrow A$ je pravdivý pro každé $p \in N$.

ZOBRAZENÍ A EKVIVALENCE MNOŽIN

$\boxed{216.}$ M_2, M_4 jsou zobrazení, M_1, M_3 ne. $\boxed{217.}$ b), c), f) je zobrazení; a), d), e) není zobrazení. $\boxed{218.}$ ■a) $D(f) = N$, $H(f) = Z$; ■b) $D(f) = N-\{1,2\}$, $H(f)$ je množina všech prvočísel; ■c) $D(f) = R$, $H(f) = Z$; ■d) $D(f) = H(f) = C-\{1\}$; ■e) $D(f)= N-\{1\}$, $H(f)= N$; ■f) $D(f) = R-\{1,4\}$, $H(f) = (-\infty,-\frac{13}{3}\rangle \cup \langle\frac{1}{3},+\infty)$; ■g) $D(f) = \langle 0+\infty)$, $H(f) = (-\infty,\frac{1}{4}\rangle$; ■h) $D(f) = R-\{-3\}$, $H(f) = \langle 0,+\infty)$; ■i) $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0,1\rangle$; ■j) $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1,+\infty)$; ■k) $D(f) = R$, $H(f) = \langle 2,+\infty)$; ■l) $D(f) = H(f) = R$. $\boxed{219.}$ ■a) $(5,7)$; ■b) $(1,2)$; ■c) $(-1,0)$; ■d) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; ■e) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$; ■f) $\langle\frac{3}{2}, 1+\frac{\sqrt{5}}{2}\rangle$.

$\boxed{220.}$ $f(A) = \langle -\frac{(a-b)^2}{4}, 0)$. $\boxed{221.}$ ■a) $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, $f^{-1}(D) = \{0, 1, 2\}$; ■b) $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(D) = \{1, 2\}$; ■c) $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}$, $f^{-1}(D) = \{2\}$; ■d) $f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1, 2\}$, $f^{-1}(D) = \emptyset$. $\boxed{222.}$ $f^{-1}(A) = B$, $f^{-1}(B) = A$. $\boxed{223.}$ $f^{-1}(\{x\}) = \{x,-x\}$ pro $x\ge 0$ (specielně $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$), $f^{-1}(\{x\}) = \emptyset$ pro $x<0$.

$\boxed{224.}$ $f^{-1}(R) = R \cup \{x\in C \,/\, (\exists y\in R)(x=iy)\}$. $\boxed{225.}$ ■a) $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, $f^{-1}(A) = \langle 4,+\infty)$; ■b) $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, $f^{-1}(A) = \emptyset$; ■c) $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, $f^{-1}(A) = \langle-\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$; ■d) $f^{-1}(\{1\}) = \{0,2\}$, $f^{-1}(A) = \langle 1-\sqrt{2}, 0) \cup (2, 1+\sqrt{2}\rangle$;

■e) $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, $f^{-1}(A) = \emptyset$; ■f) $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$, $f^{-1}(A) = \langle-\frac{3}{5}, 0)$;

■g) $f^{-1}(\{1\}) = \langle 0, 1\rangle$, $f^{-1}(A) = \langle-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, \frac{3}{2}\rangle$;

■h) $f^{-1}(\{1\}) = \{-\frac{2}{3}, 4\}$, $f^{-1}(A) = \langle -1, -\frac{2}{3}) \cup (4, 5\rangle$;

■i) $f^{-1}(\{1\}) = \{ -\frac{5}{2}\sqrt{13}, \frac{5}{2}\sqrt{13} \}$, $f^{-1}(A) = (-\frac{5}{2}\sqrt{13}, -\frac{1}{2}\sqrt{85} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}\sqrt{85}, \frac{5}{2}\sqrt{13})$;

■j) $f^{-1}(\{1\}) = \{0\}$, $f^{-1}(A) = \langle\log_2(2-\sqrt{3}), \log_2(2+\sqrt{3})\rangle - \{0\}$.

$\boxed{226.}$ Zobrazení f: ■a) je prosté, ale není "na"; ■b) není ani prosté ani "na"; ■c) je prosté i "na"; ■d) není ani prosté ani "na"; ■e) není prosté, je "na" ; ■f) není prosté, je "na" ; ■g) není ani prosté ani "na" ; ■h) je prosté i "na". **229.** Nechť $f: A \to B$ je zobrazení. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní: a) f je bijektivní ; b) pro každé $y \in B$ má vzor $f^{-1}(\{y\})$ právě jeden prvek; c) pro každé $y \in B$ existuje právě jedno $x \in A$ tak, že $f(x) = y$ (tj. rovnice $f(x) = y$ má právě jedno řešení).

230. ■a) f není ani prosté ani "na" ; ■b) f je prosté, není "na" ; ■c) f není prosté, je "na" ; ■d) f je prosté, není "na" ; ■e) f je prosté i "na" ; ■f) f je prosté, není "na" ; ■g) f je prosté i "na" ; ■h) f je prosté, není "na". **231.** ■a) $D(f^{-1}) = \langle -4, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{4+x}$; ■b) $D(f^{-1}) = \langle -4, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{4+x}$; ■c) $D(f^{-1}) = R$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ pro $x>0$, $f^{-1}(x) = x$ pro $x \le 0$; ■d) $D(f^{-1}) = \{x \,/\, (\exists n \in N)(x = n^2+n+1)\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{4x-3} - 1)$; ■e) $D(f^{-1}) = \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $f^{-1}(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}$ pro $x \in (0, \frac{1}{2}\rangle$, $f^{-1}(0) = 0$; ■f) $D(f^{-1}) = \langle -\frac{1}{2}, 0)$, $f^{-1}(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}$; ■g) $D(f^{-1}) = \{0\}$, $f^{-1}(0) = 1$; ■h) $D(f^{-1}) = R$, $f^{-1}(x) = x - 1$ pro $x \ge 1$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ pro $x<1$; ■i) $D(f^{-1}) = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$, $f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x}$ pro $x<0$, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$ pro $x>1$; ■j) $D(f^{-1}) = R$, $f^{-1}(x) = x - 1$ pro $x \in Q$, $f^{-1}(x) = x + 1$ pro $x \in R-Q$. **232.** ■a) $f \circ g$ není definováno, $g \circ f = \{ (0,2), (1,2), (2,2) \}$; ■b) $f \circ g = \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,3) \}$, $g \circ f = Id_A$; ■c) $f \circ g = \{ (0,3), (1,2), (2,1), (3,0) \}$, $g \circ f = f \circ g$; ■d) $f \circ g = \{ (0,0), (1,0), (2,0), (3,1), (4,2) \}$, $g \circ f = \{ (0,4), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4) \}$; ■e) $(f \circ g)(x) = 1 - 4x$, $(g \circ f)(x) = 3 - 4x$; ■f) $f \circ g = g$, $g \circ f = g$; ■g) $f \circ g : R \to R$, $(f \circ g)(x) = |x|$, $g \circ f : \langle 0,+\infty) \to \langle 0,\infty)$, $(g \circ f)(x) = x$; ■h) $f \circ g : R - \{\frac{1}{2}\} \to R$, $g \circ f = R \to R$; $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{2x-1}$ pro $x \in (-\infty,-1\rangle \cup (\frac{1}{2},+\infty)$, $(f \circ g)(x) = \frac{2-x}{2x-1}$ pro $x \in (-1, \frac{1}{2})$; $(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ pro $x \ge 0$, $(g \circ f)(x) = \frac{x}{2x-3}$ pro $x<0$; ■i) $f \circ g = \{ (0,0) \}$, $g \circ f : (R) \to R$, $(g \circ f)(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^2-x+1}$.

233. ■a) Návod: Má-li A n prvků , $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, a f je prosté, pak $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ jsou navzájem různé, takže $H(f) = A$; ■b) Návod: Je-li $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, pak, má-li být $H(f) = A$, musí být prvky $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ navzájem různé. **234.** Pro $n \in N$ položme: $f(n) = n + 1$; $g(n) = n - 1$ pro $n>1$, $g(1) = 1$. Potom f je prosté, ale není na N , g je na N , ale není prosté. **235.** Návod: Je-li $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ a $B' = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$, při čemž $B \cap B' = \emptyset$, ukažte, že $m = n$ a že $B = B'$. 236. Návod: Zvolte $b_1 \in A$ libovolně a položte $b_2 = f(b_1)$, $b_3 = f(b_2)$, atd. Protože A má jen konečně mnoho prvků, existují i, j, kde $i<j$, tak, že $b_i = b_j$. Ukažte, že potom $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}$ je cyklus. 237. Návod: Postupujte obdobně jako ve cv. 236. Užitím toho, že f je prosté, dokažte, že $i = 1$ a tedy b_1 leží v cyklu.

238. Návod: Předpokládejte, že f není prosté a dojděte ke sporu (viz cv. 236). 239. Návod: cv. 233, 234, 237. 240. $f: Z \to Z$, $f(x) = x + 1$.

241. Návod: Podle cv. 239 můžeme psát A jako sjednocení cyklů, řekněme jako $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$. Má-li B_1 n_1 prvků, B_2 n_2 prvků, ... B_k n_k prvků, pak stačí položit $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$. 242. Důkaz přímo z definice; příklad: $f: A \to B$, $g: B \to A$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$ pro $x \neq 0$, $g(0) = 0$. 243. Viz 242.

OPERACE SE SYSTÉMY MNOŽIN

256. ■a) $\{0\}$; ■b) $\langle \frac{1}{2}, 1)$; ■c) $\langle 1,2\rangle$; ■d) $\emptyset$; ■e) $(0,1)$; ■f) $(-\infty,1)$; ■g) $(-1,0)$; ■h) R ; ■i) $\emptyset$. 257. ■a) $(-\infty,0\rangle$; ■b) $\langle -1,1\rangle$; ■c) $\langle -1,1)$.
258. ■a) $\emptyset$; ■b) $(0,2\rangle$; ■c) $\emptyset$; ■d) R. 260. ■a) R ; ■b) R.
261. ■a) $\{0\}$; ■b) $\emptyset$. 262. $\langle 1,+\infty)$. 263. $\emptyset$, $(0,1)$.
265. Např. $A_n = \{m \in N \mid m \geq n\}$. 269. Např. $\left\{\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \rangle\right\}_{n \in N}$.
270. Např. $\left\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right\}_{n \in N}$.

OMEZENOST MNOŽIN, INFIMUM, SUPREMUM

272. ■a) Omezená shora, neomezená zdola ; ■b) omezená zdola, neomezená shora ; ■c) omezená ; ■d) omezená ; ■e) omezená zdola, neomezená shora ; ■f) neomezená shora ani zdola ; ■g) omezená zdola, neomezená shora ; ■h) omezená ; ■i) neomezená shora ani zdola ; ■j) omezená zdola, neomezená shora ; ■k) omezená zdola, neomezená shora ; ■l) omezená ; ■m) neomezená shora, omezená zdola ; ■n) omezená. 273. ■a),b),c),e) omezená, ■d),f) neomezená. 274. $M_1 \subset M_2$, M_1 je omezená, M_2 není omezená.
275. M_1 omezená, M_2 neomezená. 276. ■a) horní závory: $\langle -1+ \frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$, dolní závory: $(-\infty, -1- \frac{2}{\sqrt{3}}\rangle$; ■b) horní závory: $\langle 1,+\infty)$, dolní závory: $(-\infty,0)$.
277. $\langle -\frac{23}{5}, +\infty)$. 278. Pro nekonečný počet množin tvrzení neplatí.
282. Neplyne. 283. Opačná implikace neplatí. 285. Ano.
287. $\sup C \leq \sup A + \sup B$.

VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

289. 291. Obrácená implikace neplatí, viz posloupnost 1,2,1,2,1,... (pro k=2). 296. ■a) ostře rostoucí; ■b) ostře klesající; ■c) ostře rostoucí; ■d) ostře klesající; ■e) není monotonní: $a_{n+1} > a_n$ pro $n<100$,

■g) ostře rostoucí; ■h) pro k liché ostře klesající, pro k sudé ostře rostoucí; ■i) ostře rostoucí; ■j) není monotonní; ■k) není monotonní; ■l) není monotonní: $a_1<a_2<a_3$, $a_{n+1}<a_n$ pro $n\geq 3$; ■m) není monotonní: $a_1<a_2$; $a_{n+1}<a_n$ pro $n\geq 2$; ■n) je klesající, není ostře klesající; ■o) je klesající, je-li $c\in(0,2\rangle$; není monotonní, je-li $c>2$ (klesá při $n\geq[c]$) ; ■p) ostře rostoucí; ■r) ostře klesjící. 297. $a_1>0$, $q>1$: ostře rostoucí; $a_1>0$, $0<q<1$: ostře klesající; $a_1<0$, $q>1$: ostře klesající; $a_1<0$, $0<q<1$: ostře rostoucí; $a_1\neq 0$, $q<0$: není monotonní; $a_1=0$, q libovolné nebo a_1 libovolné, $q=1$: konstantní; $a_1>0$, $q=0$: klesající; $a_1<0$, $q=0$: rostoucí.

298. (a_n) je ostře rostoucí při $c>0$, ostře klesající při $c<0$, konstantní (tj. rostoucí i klesající) při $c=0$. 299. ■a) $c<d$; ■b) $c>d$.

300. Pro $p>-3$ je posloupnost ostře rostoucí; pro $p = -3$ je rostoucí (neostře); pro $p<-3$ není monotonní. 301. $a_n = 30 + \dfrac{(n-1)(n+4)}{2}$.

303. ■a) Při $a_1>2$ je posloupnost ostře rostoucí ; při $a_1=2$ je konstantní, při $a_1<2$ je ostře klesající; ■b) ostře rostoucí ; ■c) ostře rostoucí ; ■d) při $a_1>\sqrt{c}$ je ostře klesající ; při $a_1=\sqrt{c}$ je konstantní ; při $a_1<\sqrt{c}$ není monotonní. 305. ■a) např. $a_n= n^2$, $b_n= -n$; ■b) např. $a_n = n$, $b_n = -n^2$; ■c) např. $a_n = n$, $b_n= (-1)^n- 2n$. 306. Ne: např. $a_n = b_n = -\dfrac{1}{n}$.

307. ■a) rostoucí ; ■b) rostoucí ; ■c) klesající . Bez uvedeného předpokladu a) neplatí (př. $a_n= -\dfrac{1}{n}$) , b) platí pro k lichá a neplatí pro k sudá , c) neplatí (př. $a_n= 2n-9$) . 308. ■a) např. $a_n= 1 - \dfrac{1}{2^n}$;

■b) kterákoliv konstantní posloupnost; ■c) taková posloupnost neexistuje . 309. V případech a), d), f), h) . 310. Ano. Např. z posloupnoosti $a_n = n$ lze vybrat posloupnosti : 1, 2, 4, 7, 11 ... ; 3, 5, 8, 12, 17, ... ; 6, 9, 13, 18, 24, ... ; 10, 14, 19, 25, 32, ... ;

311. Návod: dokažte nejprve, že ke každému $n\in N$ existuje $m\in N$ tak, že pro všechna $k>m$ je $a_k>n$.

DEFINICE LIMITY

312. ■a) $\left[\forall H_\alpha\right]\left[\exists n_0\right]\left[\forall n>n_0\right]\left[a_n\in H_\alpha\right]$; ■b) $\left[\exists H_\alpha\right]\left[\forall n_0\right]\left[\exists n>n_0\right]\left[a_n\notin H_\alpha\right]$; ■c) $\left[\forall a \in \bar{R} \text{ (resp. } \bar{C})\right]\left[\exists H_\alpha\right]\left[\forall n_0\right]\left[\exists n>n_0\right]\left[a_n\notin H_\alpha\right]$. 313. Pouze a) je ekvivalentní. 314. Ekvivalentní tvrzení jsou a), c), d). 323. Buď neexistuje limita, nebo je rovna $+\infty$. 324. Buď limita neexistuje, nebo je rovna 0.

325. Může existovat $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ resp. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)$. 326. Ano.

327. Ano. 332. Např. ■a) $a_n= n!$; ■b) $a_n= n+1$; ■c) $a_n= \sqrt[n]{n}$.

334. Např. ■a) $a_n = n!$; ■b) $a_n = (-1)^n.n!$; ■c) $a_n = 1/n!$; ■d) $a_n = 2^n$.

LIMITY RACIONÁLNÍCH A IRACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

336. $+\infty$. **337.** $-\infty$ **338.** V $\overline{C}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} P_k(n) = \infty$; V $\overline{R}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} P_k(n) =$ $+\infty$ (když koeficient u největší mocniny > 0), nebo $-\infty$ (když koeficient u největší mocniny < 0) . **339.** ■a) V $\overline{R}$ limita neexistuje, v $\overline{C}$ je to ∞ ; ■b) ∞ . **340.** ■a) $2/3$; ■b) $\dfrac{-2i}{3}$. **341.** ■a) $+\infty$; ■b) 5 ; ■c) 0 . **342.** ■a) 0 ; ■b) 4. **343.** Když $k < \ell$, je limita 0; když $k = \ell$, je limita = p = (koeficient u n^k v polynomu P_k / koeficient u n^ℓ v polynomu Q_ℓ) ; když $k > \ell$ je limita v $\overline{C}$ rovna ∞ a limita v $\overline{R}$ je rovna $+\infty$ resp. $-\infty$ (znaménko u nekonečna je stejné jako znaménko p). **344.** $i/3^5$. **345.** $(3/2)^{30}$. **346.** $3^5/2^7$. **347.** $k^{-k(k+1)}$ **348.** 5^{-2^k} . **350.** $1/2$. **351.** $\dfrac{1}{3}$. **352.** ■a) limita neexistuje ; ■b) $1/2$. **353.** $4/9$. **354.** 1 . **355.** 1 . **356.** ■a) limita neexistuje ; ■b) $1/2$. **357.** $16/9$. **358.** $\dfrac{1}{p.p!}$. **359.** $1/3$. **360.** $2/3$. **361.** $+\infty$. **362.** $-\infty$. **363.** $-\infty$. **364.** $+\infty$ pro $r \neq p$, $-\infty$ pro $r=p$. **365.** ■a) $+\infty$; ■b) $+\infty$. **366.** ■a) $+\infty$ pro $r>p$, 4 pro $r=p$, 0 pro $r<p$; ■b) $+\infty$ $r>\dfrac{p}{2}$, 6 pro $r = \dfrac{p}{2}$, 0 pro $r<\dfrac{p}{2}$. **367.** $\sqrt{2}$. **368.** $\dfrac{1}{2}$. **369.** ■a) $+\infty$; ■b) 1 ; ■c) 0 . **370.** $-\dfrac{1}{3}$. **371.** 1 . **372.** $-\dfrac{1}{2}$. **373.** ■a) $+\infty$; ■b) $-\infty$; ■c) 0 . **374.** ■a) $+\infty$; ■b) $-\infty$; ■c) $\dfrac{1}{2}$; ■d) $+\infty$. **375.** ■a) 1 ; ■b) 0 ; ■c) $+\infty$; ■d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; ■e) neexistuje ; ■f) 0 . **376.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. **377.** 0 pro $k<7$, $\dfrac{1}{8\sqrt{2+\sqrt{8}}}$ pro $k = 7$, $+\infty$ pro $k>7$. **378.** $\dfrac{a+b}{2}$. **379.** $\dfrac{1}{2}$. **380.** $\dfrac{2}{3}$. **381.** $\dfrac{4}{3}$. **382.** $\dfrac{2}{3}$. **383.** $-\dfrac{1}{4}$. **384.** ■a) $+\infty$; ■b) $-\dfrac{15}{6}$. **385.** $-\dfrac{1}{4}$. **386.** $\dfrac{2}{k}$. **387.** ■a) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$; ■b) $\dfrac{(k-1)\sqrt[k]{2}}{2k}$. **388.** 2 . **389.** -1. **390.** $-\dfrac{1}{288}$. **391.** $\dfrac{1}{2}$. **392.** $+\infty$ pro $r> \dfrac{11}{24}$, $\dfrac{1}{6}$ pro $r = \dfrac{11}{24}$, 0 pro $r< \dfrac{11}{24}$. **393.** $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$. **394.** $a = -1$, $b = 0$. **395.** $a = 1$, $b = d = 0$, $c = -\dfrac{1}{2}$.

SEVŘENÉ POSLOUPNOSTI

396. ■a) $+\infty$; ■b) 1 ; ■c) $+\infty$; ■d) 1 . **399.** Např. ■a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{3}$; ■b) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. **400.** $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \notin Z\right) \vee \left((\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in Z) \wedge (\exists\, n_0) (\forall\, n > n_0)(a_n \geq a)\right)$ **401.** ■a) $+\infty$; ■b) 0 ; ■c) 0 . **402.** ■a) 0 ;

■b) $+\infty$; ■c) 1 ; ■d) 0 ; ■e) 1 pro $r < 2$, 0 pro $r > 2$; (jen pro zajímavost, pro $r = 2$ je limita $\pi/4$.) ■f) 1 . **403.** ■a) 0 ; ■b) $+\infty$ pro $\alpha > 1$, 1 pro $\alpha = 1$, 0 pro $\alpha < 1$; ■c) 0 ; ■d) 0 ; ■e) $-\infty$; ■f) $+\infty$; ■g) 0 .

404. ■a) 1 ; ■b) limita neexistuje . **406.** 0 pro $|a|<1$, 1 pro $|a|>1$ $\frac{1}{2}$ pro $a=1$, pro $a=-1$ nemá smysl . **407.** 0 pro $|a|\neq 1$, $\frac{1}{2}$ pro $a=1$, neexistuje pro $a=-1$. **408.** 1 pro $|a|>1$, -1 pro $0<|a|<1$, 0 pro $|a|=1$, pro $a=o$ nemá smysl. **409.** 1 pro $|a|>1$, $\frac{3}{2}$ pro $|a|<1$, $\frac{4}{3}$ pro $a=1$, neexistuje pro $a=-1$. **410.** $+\infty$ pro $a>1$, $\frac{3}{2}$ pro $a=1$, $\frac{5}{3}$ pro $|a|<1$, neexistuje pro $a\leq -1$. **411.** $+\infty$ pro $a>1$, -1 pro $a=1$, -3 pro $|a| <1$, pro $a=-1$ nemá smysl, pro $a<-1$ neexistuje.

412. a pro $|a|>1$, $-3a$ pro $0<|a|<1$, -1 pro $a=1$, 1 pro $a=-1$, pro $a=0$ nemá smysl. **413.** $-\frac{1}{3}$. **414.** $\frac{1}{a}$ pro $|a|>|b|$, $\frac{1}{b}$ pro $|a|<|b|$, $\frac{1}{a}$ pro $a=b\neq 0$, pro $a=-b$ nemá smysl. **415.** $\frac{1-b}{1-a}$ pro $\max(a,b)<1$, $+\infty$ pro $a>b$ a $a>1$, 0 pro $a<b$ a $b>1$, 1 pro $a=b$. **416.** $\frac{1-b}{1+a}$ pro $\max(a,b)<1$, 0 pro $a<b$ a $b>1$, pro $a\geq b$ a $a>1$ neexistuje. **417.** $x = -6$, $x = 4$. **418.** $x = 1$. **419.** 0 pro $b<1$, $\frac{1}{1-a}$ pro $b=1$ a $a<1$, $+\infty$ pro $a\geq 1$. **420.** 0 . **421.** 0 . **422.** 2. **423.** 1 . **424.** $\frac{1}{3}$. **425.** $+\infty$ pro $|a|>1$, 1 pro $|a|=1$, 0 pro $|a|<1$. **426.** $+\infty$ pro $a>1$, 1 pro $a=1$, 0 pro $|a|<1$, -1 pro $a=-1$, $-\infty$ pro $a<-1$. **427.** $+\infty$ pro $a>1$, 1 pro $a=1$, 0 pro $|a|<1$, pro $a\leq -1$ neexistuje. **428.** Viz 427. **429.** $\frac{1}{2}$ pro $|a|>1$, 0 pro $|a|=1$, -1 pro $0<|a|<1$, pro $a=0$ nemá smysl. **430.** $+\infty$ pro $a>1$, 1 pro $a=1$, 0 pro $|a|<1$, neexistuje pro $a\leq -1$. **431.** 2 pro $|a|>1$, 0 pro $|a|<1$, -5 pro $a=1$, pro $a=-1$ neexistuje. **433.** ■a) sign(a) ; ■b) 1 ; ■c) 1 ; ■d) 1 ; ■e) $\max(a_1,a_2,\dots,a_k)$. **434.** 0 . **436.** ■a) 3 ; ■b) $-\sqrt{3}$.

437. ■a) 0 pro $|a| \leq 1$, $+\infty$ pro $a > 1$, limita neexistuje pro $a < -1$; ■b) stejně jako v příkladu a) ■c) 0 .

BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA

439. $\left(\exists\ \varepsilon > 0\right)\left(\forall\ n_0\right)\left(\exists\ n > n_0\right)\left(\exists\ p \in N\right)\left(|a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon\right)$ **440.** Ekvivalentní tvrzení jsou d), f), g). **446.** ■a) libovolné x ; ■b) libovolné x ; ■c) $x \in (-1,1\rangle$.

LIMITY POSLOUPNOSTÍ ZADANÝCH REKURENTNĚ

447. Buď je rovna 5 nebo $+\infty$ nebo $-\infty$ nebo neexistuje; ■a) 5 ; ■b) $+\infty$; ■c) $-\infty$; ■d) neexistuje, ■e) neexistuje . **448.** Buď je rovna -1 nebo -4 nebo $+\infty$; ■a) $+\infty$; ■b) -1 ; ■c) -4 ; ■d) -1 ; ■e) -4 ;

■f) -1 . $\boxed{450.}$ Buď je rovna 2 nebo $+\infty$ nebo $-\infty$;

■a) $-\infty$; ■b) $+\infty$; ■c) 2 . $\boxed{451.}$ $1-\sqrt{1-c}$ pro $0<c\le 1$, $+\infty$ pro $c>1$.

$\boxed{452.}$ $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4c})$. $\boxed{453.}$ $\frac{3-\sqrt{9-4c}}{2}$ pro $0<c<2$, 2 pro $c=2$, $+\infty$ pro $c>2$. $\boxed{454.}$ $\sqrt{c}$. $\boxed{455.}$ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

PODÍLOVÉ A ODMOCNINOVÉ KRITÉRIUM

$\boxed{458.}$ ■a) 0 ; ■b) 0; ■c) $+\infty$ pro $a>1$, 0 pro $|a|\le 1$, pro $a<-1$ neexistuje ; ■d) 0 ; ■e) $+\infty$; ■f) 0 ; ■g) viz c) ; ■h) 0 ; ■i) viz c) ; ■j) 0 . $\boxed{459.}$ Buď leží v intervalu $\langle -1,1\rangle$, nebo neexistuje.

STOLZŮV A CAUCHYŮV VZOREC

$\boxed{460.}$ ■a) 2/3 ; ■b) 1 ; ■c) 0 ; ■d) 16/15 ; ■e) $1/(p+1)$; ■f) 1/2 ; ■g) $2^p/(p+1)$; ■h) 1 ; ■i) 1 ; ■j) $+\infty$. $\boxed{461.}$ a . $\boxed{462.}$ b .

$\boxed{463.}$ a/2 . $\boxed{465.}$ x . $\boxed{466.}$ $(a+1)/2$. $\boxed{467.}$ a . $\boxed{468.}$ ■a) $+\infty$; ■b) 1 . $\boxed{470.}$ Např. $x_n=(-1)^n+3$. $\boxed{471.}$ ■b) Např. $x_n=(-1)^n+3$.

ČÍSLO e; LIMITY S OBECNOU MOCNINOU A LOGARITMEM

$\boxed{475.}$ 2,71828... $\boxed{476.}$ 1 . $\boxed{479.}$ ■a) $+\infty$; ■b) 0 . $\boxed{481.}$ e .

$\boxed{482.}$ $\frac{4}{e}$. $\boxed{483.}$ e^3 . $\boxed{484.}$ e . $\boxed{485.}$ $\sqrt[3]{e}$. $\boxed{486.}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

$\boxed{487.}$ $\frac{1}{e}$. $\boxed{488.}$ e . $\boxed{489.}$ e^3 . $\boxed{490.}$ ■a) e ; ■b) 1 ; ■c) $+\infty$.

$\boxed{491.}$ $\frac{1}{\sqrt{e}}$. $\boxed{492.}$ 1 . $\boxed{494.}$ 1 . $\boxed{495.}$ 1 . $\boxed{496.}$ 1 .

$\boxed{497.}$ $\frac{2}{5}$. $\boxed{498.}$ $\frac{3}{2}$. $\boxed{499.}$ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. $\boxed{501.}$ 1 . $\boxed{502.}$ e^{10} .

$\boxed{503.}$ $\sqrt{e}$. $\boxed{504.}$ 5 . $\boxed{505.}$ e^x . $\boxed{506.}$ e^2 . $\boxed{509.}$ ln 2 .

$\boxed{510.}$ ln 2 . $\boxed{511.}$ $\ln 2-\frac{1}{4}$. $\boxed{512.}$ $\frac{3}{2}\ln 2$. $\boxed{513.}$ ■a) $+\infty$; ■b) 0 . $\boxed{514.}$ $\frac{c}{2}+\ln 2$. $\boxed{515.}$ 0 . $\boxed{516.}$ 0 . $\boxed{517.}$ $-1+\ln 2$.

LIMES SUPERIOR, LIMES INFERIOR A HROMADNÉ HODNOTY

$\boxed{518.}$ ■a) $\limsup_{n\to\infty} a_n=1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=-1$; ■b) $\limsup_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=-1$; ■c) $\limsup_{n\to\infty} a_n=+\infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=0$; ■d) $\limsup_{n\to\infty} a_n=1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=-1/2$; ■e) $\limsup_{n\to\infty} a_n=2$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=1$; ■f) $\limsup_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty} a_n=0$; ■g) $\limsup_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty} a_n=1$; ■h) $\limsup_{n\to\infty} a_n=\liminf_{n\to\infty} a_n=1/2$; ■i) $\limsup_{n\to\infty} a_n=4$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=2$; ■j) $\limsup_{n\to\infty} a_n=2/3$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=0$; ■k) $\limsup_{n\to\infty} a_n=1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=-1$; ■l) $\limsup_{n\to\infty} a_n=1/2$, $\liminf_{n\to\infty} a_n=-1/2$; ■m) $\limsup_{n\to\infty} a_n=-\frac{3}{a+1}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = -\frac{3}{a+1} - 1$ pro $|a| > 1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = -\infty$ pro $0 < a < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = +\infty$ pro $-1 \le a < 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = -4$ pro $a = 1$; ■n) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = 1 - \ln 2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = -\ln 2$; ■o) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = c - \ln 3$; ■p) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = 1/e$; ■q) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup a_n = e^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf a_n = 1$. $\boxed{519.}$ Limita neexistuje, nebo je rovna 5. $\boxed{520.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. $\boxed{523.}$ Neplyne.

$\boxed{525.}$ V a) ani v b) obrácená implikace neplatí. $\boxed{527.}$ Např. pro posloupnosti $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, $b_n = \sin\frac{(n+1)\pi}{2}$ jsou všechny nerovnosti ostré. $\boxed{528.}$ Neplatí. $\boxed{529.}$ ■a) $\left\{ 0, \mp\sin\frac{\pi}{q}, \mp\sin\frac{2\pi}{q}, \ldots, \mp\sin[q/2]\frac{\pi}{q} \right\}$; ■b) $\{0\}$ pro $q = 1$; pro $q > 1$ $\left\{ \cos(k\frac{\pi}{q}).\cos(k-1)\frac{\pi}{q} \mid k = 1,\ldots,[(q+2)/4] \right\} \cup \left\{ \sin(k\frac{\pi}{q}).\sin(k-1)\frac{\pi}{q} \mid k = 1,\ldots,[(q+2)/4] \right\}$; ■c) $\langle 0,1\rangle$ ■d) $\{-1, 0, 1\}$; ■e) $\langle 0,1\rangle$. $\boxed{533.}$ Např. posloupnost $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{4}{6},\frac{3}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\ldots$

$\boxed{534.}$ Např. $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$. $\boxed{537.}$ Např. $a_n = \{n\}^{\frac{1}{\log\log n}}$.

$\boxed{538.}$ ■a) $+\infty$; ■b) x .