Přípravný týden - příklady z matematiky

Pavel Strachota, Edita Pelantová, Severin Pošta, Lubomíra Dvořáková, Petr Ambrož

18. září 2023

Obsah

Plán výuky přípravného týdne

V AR 2023/2024 je výuka matematiky v PT rozvrhována do 2 přednášek a 3 cvičení, přičemž délka jedné výukové jednotky je 45 minut.

Pokusíme se jít na studenty zlehka:

- Na přednáškách budou mj. ukázány některé příklady, které lze klidně zopakovat i na cvičení.
- Na cvičení postup podrobně komentujeme a trpělivě vysvětlujeme. Ptáme se, co není jasné. Nikde není dáno, kolik toho musíme stihnout.
- V rámci přípravného týdne **pokud možno vůbec nezmíníme** komplexní čísla, exponenciální funkci, logaritmy, sin a cos, atd. [1]

Plán výuky:

- **Matematika 1 (přednáška):**
  - motivační příklad
    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\prod_{j=3}^{k+1}(j-2)} = ??$$
    … matematika, jako každá teorie, potřebuje jazyk, v němž může být vhodně formulována. Abychom pochopili motivační příklad, musíme se tento jazyk naučit.
  - zavedení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$, množiny celých čísel $\mathbb{Z}$ a množiny $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (slovně)
  - zavedení sumy, sčítacího indexu, horní a dolní meze
  - asociativní zákon, možnost sčítat v libovolném pořadí
  - posunutí indexu, sčítání odzadu
  - součet aritmetické posloupnosti, resp. $\sum_{k=1}^{n} k$
  - součet geometrické posloupnosti
  - přímý důkaz vzorce $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ (nikoliv matematickou indukcí)
  - zavedení produktu
  - pravidla pro manipulaci s produkty

[1] Základní poznatky o komplexních číslech a elementárních funkcích komplexní proměnné budou shrnuty až na jedné z prvních přednášek MAN a bude jim věnována pozornost i na cvičení.

- definice faktoriálu
- výsledek motivačního příkladu

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\prod_{j=3}^{k+1}(j-2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{\prod_{j=1}^{k-1} j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{k} j}{\prod_{j=1}^{k-1} j} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n (n+1) .$$

- nějaké příklady na sčítání sum nebo produktů, např.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \text{(viz níže)}$$

- **Matematika 2 (cvičení):**
  - příklady na sumy
  - příklady na vyčíslení produktů
- **Matematika 3 (přednáška):**
  - princip matematické indukce
  - jeden nebo dva jednoduché příklady na důkaz matematickou indukcí
  - zavedení kombinačního čísla $\binom{n}{m}$ pomocí kombinatorické definice (viz níže)
  - důkaz vztahu $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$ pomocí kombinatoriky (viz níže)
  - důkaz vztahu $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ matematickou indukcí
  - důkaz binomické věty matematickou indukcí
  - důkaz vzorce $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ matematickou indukcí
  - dvojné sumy, suma a produkt
- **Matematika 4 a 5 (cvičení):**
  - příklady na dvojné sumy
  - příklady na matematickou indukci

Kapitola 1

Zkrácené psaní součtu a součinu

1.1 Příklady na sumy

Definice. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n & \text{pro } n \geq m, \\ 0 & \text{pro } n < m. \end{cases}$$

Symbol k se nazývá sčítací index (obvykle volíme písmenka i, j, k, ℓ). m je dolní mez sumy, n je horní mez.

1.1. Vypočítejte

$$\sum_{k=-1}^{5} k^3.$$

Řešení: Vypočítáme dle definice, že

$$\sum_{k=-1}^{5} k^3 = 224.$$

Věta. *Zřejmě platí*

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k,$$
$$\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k, \ c \in \mathbb{R},$$

1.2. Posouvejte index a zachovejte rovnost, např.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=5}^{?} a_?,$$

$$\sum_{k=5}^{10} \frac{2k}{k-1} = \sum_{k=?}^{7} ??,$$

$$\sum_{k=5}^{10} (3k+1)^2 = \sum_{k=?}^{?} (3k-5)^2\,,\ \text{atd.}$$

Řešení: Snadné.

1.3. Zjednodušte

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k.$$

Řešení:

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{2j}$$

1.4. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Řešení: Bude rozebráno na přednášce. Lze postupovat několika formálně odlišnými způsoby:

1. Rozepsat sumu dvakrát pod sebou

$$\begin{gathered} 1 + 2 + 3 + \cdots + k \\ +k + (k-1) + \cdots + 1 \end{gathered}$$

2. Využít zkráceného zápisu

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k)\right) = \frac{1}{2} n\,(n+1)\,.$$

3. Získat výsledek ze vztahu

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k - n.$$

4. Nakreslit si tabulku zápasů $(n+1)$ týmů, kdy hraje každý s každým.

1.5. Sečtěte
$$\sum_{k=0}^{n} ak + b.$$

Řešení:
$$\sum_{k=0}^{n} ak + b = (n+1)\,b + a\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)\left(b + \frac{an}{2}\right)$$

1.6. Sečtěte
$$\sum_{k=1}^{100} (k-10)\,.$$

Řešení:
$$\sum_{k=1}^{100} (k-10) = \frac{1}{2}100\cdot 101 - 100\cdot 10 = 5050 - 1000 = 4050.$$

1.7. Sečtěte
$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Řešení: Bude provedeno na první přednášce. Je snazší upravovat
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \ldots$$
než
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = \ldots$$
Výsledek:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \cdots = \frac{1}{6}n\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)\,.$$

1.8. Sečtěte
$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Řešení: Analogicky - spočítejte
$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = \ldots$$

1.9. Sečtěte

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Nápověda: Vypočítejte $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$

Řešení: Na přednášce.

1.10. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, k.$$

Řešení:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{n-1}{2} - n & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

1.11. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}.$$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

1.12. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

Řešení:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - 1$$

1.13. Odvoďte vzorec

$$(a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n - b^n.$$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}
$$

Využili jsme roznásobení a posunutí indexu. Po odečtení zbyl z první sumy jen n-tý člen a z druhé sumy jen ten nultý.

1.2 Příklady na produkty

Definice. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom

$$
\prod_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m a_{m+1} \cdots a_n & \text{pro } n \geq m, \\ 1 & \text{pro } n < m. \end{cases}
$$

Věta. *Zřejmě platí*

$$
\prod_{k=m}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right),
$$

$$
\prod_{k=m}^{n} c a_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k, \quad c \in \mathbb{R},
$$

Definice. Faktoriál z čísla $n = 0, 1, 2, \ldots$ definujeme jako

$$
n! = \prod_{k=1}^{n} k.
$$

1.14. Vypočítejte

$$
\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=2}^{n+1} a_k}
$$

pro $a_k \neq 0$.

Řešení:

$$
\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=2}^{n+1} a_k} = \frac{a_1}{a_{n+1}}
$$

1.15. Vypočítejte

$$
\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).
$$

Řešení:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\cdots=n+1$$

(viz předchozí úloha)

1.16. Vypočítejte

$$\prod_{k=0}^{n} aq^k.$$

Řešení:

$$\prod_{k=0}^{n} aq^k = a^n \prod_{k=0}^{n} q^k = a^n q^{\sum_{k=0}^{n} k} = a^n q^{n(n+1)/2}$$

1.3 Příklady na vnořené sumy

Sčítancem a_i v sumě $\sum_{i=1}^{n} a_i$ může být opět suma, tj. např.

$$a_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik},$$

takže potom dostáváme dvojnou sumu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}.$$

1.17. Sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(1+2i)(1-3k).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(1+2i)(1-3k) &= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(1+2i)}_{\text{konstanta vzhledem ke } k}\sum_{k=1}^{n}(1-3k)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(1+2i)\left(n-\frac{3}{2}n(n+1)\right)\\
&= \left(n-\frac{3}{2}n(n+1)\right)\sum_{i=1}^{n}(1+2i)\\
&= \left(-\frac{3}{2}n^2-\frac{n}{2}\right)(n+n(n+1))\\
&= -\frac{1}{2}n^2(3n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

1.18. Sečtěte

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} ik.$$

Řešení:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} ik = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{k=1}^{n} k = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{4}n^2 (n+1)^2$$

1.19. Vypočítejte

$$\sum_{i=-1}^{5}\sum_{j=-5}^{1} (1 + 2i + 3j + 4ij).$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-1}^{5}\sum_{j=-5}^{1} (1 + 2i + 3j + 4ij) &= \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} (1 + 2(i-2) + 3(j-6) + 4(i-2)(j-6)) \\
&= \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} (1 + 2i + 3j - 22 + 4ij - 24i - 8j + 48) \\
&= \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} (-22i - 5j + 4ij + 27) \\
&= (-22-5) \cdot 7 \cdot \underbrace{7 \cdot 4}_{\sum_{i=1}^{7} i = \frac{1}{2} 7 \cdot 8} + 4(7 \cdot 4)^2 + 27 \cdot 7^2 \\
&= 7^2 \left(-27 \cdot 3 + 4^3\right) = 49 \cdot (-81 + 64) = -49 \cdot 17 = -833
\end{aligned}$$

1.20. Ukažte, že platí

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} a_{ik}.$$

Řešení: Nakreslit do 2D tabulky a naznačit sčítání po řádcích, resp. po sloupcích.

1.21. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k.$$

Řešení:

$$\sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} q^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} q^k = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{i-1} q^k\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^i}{1-q}\right)$$
$$= \frac{1}{1-q}\left(\sum_{i=1}^{n} q^i - \sum_{i=1}^{n} q^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{1-q}\left(q\sum_{i=0}^{n-1} q^i - nq^{n+1}\right)$$
$$= \frac{q}{1-q}\left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n\right)$$

1.22. Vypočítejte

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k}.$$

Řešení:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}n(n+1)+n\right) = \frac{1}{4}n(n+3).$$

1.4 Příklady na vnořené produkty

1.23. Vypočítejte

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{i^n k^n}.$$

Řešení:

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{i^n k^n} = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{i^n}\frac{1}{k^n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{n^2}}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{n^2}}\left(\frac{1}{n!}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{n!}\right)^{n^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{n^2}} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{n!}\right)^{n^2} = \left(\frac{1}{n!}\right)^{2n^2}$$

1.24. Ukažte, že platí

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i} a_{ik} = \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=k}^{n} a_{ik}.$$

Řešení: Asociativní zákon platí pro násobení stejně jako pro sčítání. Viz část 1.3.

1.25. Vypočítejte
$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{i^n k^n}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{i^n k^n} &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{ni}}\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{k^n} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{ni}}\left(\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\right)^n = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{ni}}\frac{1}{i!^n}\\ &= \left[\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^i}\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\right)\right]^n = \left[\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^i}\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{n+1-i}}\right)\right]^n\\ &= \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{n+1}}\right]^n = \left[\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right]^{n(n+1)} = \frac{1}{n!^{n^2+n}}.\end{aligned}$$

K rovnosti červených výrazů: S přepisem $\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{k}=\frac{1}{i!}$ jsme se trochu unáhlili. Platí totiž

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{i!} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{k} = \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=k}^{n}\frac{1}{k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{n+1-k}}.$$

Nakonec zaměníme označení indexu k za i a opět sloučíme pod jeden produkt.

Kapitola 2

Matematická indukce

Schéma důkazu matematické indukce: Máme výrok $V(n)$, jehož pravdivostní hodnota je závislá na $n \in \mathbb{N}$.

$$[V(1) \wedge ((\forall n \in \mathbb{N})(V(n) \implies V(n+1)))] \implies [(\forall n \in \mathbb{N})(V(n))].$$

Analogicky

$$[V(0) \wedge ((\forall n \in \mathbb{N})(V(n-1) \implies V(n)))] \implies [(\forall n \in \mathbb{N}_0)(V(n))].$$

Poznámka. Zatím není možné pro studenty vést výklad s použitím matematického zápisu výroků, kvantifikátorů atd. Princip matematické indukce bude vysvětlen „lidským“ způsobem na přednášce, a podobně jej můžeme zopakovat i zde. Vysvětlíme pojem „indukční předpoklad“, tj. předpoklad platnosti $V(n)$ při dokazování $V(n+1)$.

Poznámka. Ilustrativní případ indukce je padající domino:

- $V(1)\ldots$ znamená „šťouchneme do prvního kamene domina“
- $V(n) \implies V(n+1)\ldots$ znamená „jestliže padne n-tý kámen, tak srazí i $(n+1)$. kámen“
- výsledek: spadnou všechny kameny domina

2.1. Dokažte matematickou indukcí již dříve dokázaný vztah

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Řešení: Pro $n = 1$ zjevně platí $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$.

Indukční krok $(n-1) \to n$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \underbrace{\frac{1}{2}(n-1)n}_{\text{z indukčního předpokladu}} + n = \frac{1}{2}n(n-1+2) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

2.2. Dokažte matematickou indukcí již dříve dokázaný vztah

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = a^n - b^n.$$

Řešení: Pro $n = 1$ vzorec přejde v rovnost

$$a - b = a - b.$$

Indukční krok $(n-1) \to n$ pro $n \geq 2$: Upravujeme výraz

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= (a-b)\left[b\sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k} + a^{n-1}\right] \\ &= b\left(a^{n-1} - b^{n-1}\right) + (a-b)\,a^{n-1} \\ &= a^n - b^n,\end{aligned}$$

kde ve 2. řádku jsme využili indukční předpoklad (platnost vztahu pro $n-1$) a dospěli jsme k platnosti vztahu i pro n.

Definice. Nechť m, n jsou přirozená čísla nebo 0 a nechť $m \leq n$. Kombinačním číslem $\binom{n}{m}$ rozumíme počet všech různých možností, jak z množiny o n prvcích vybrat množinu o m prvcích.

Poznámka. Zřejmě platí $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Věta. *Pro $n > 1$, $m \geq 1$ platí*

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Důkaz. Z n-prvkové množiny, kde n je alespoň 1, vyčleníme stranou jeden pevně zvolený prvek X. Máme-li nyní vybrat m prvků, máme dvě možnosti □

1. Do vybrané podmnožiny patří prvek X: Pak máme $\binom{n-1}{m-1}$ možností, jak z množiny $(n-1)$ ostatních prvků vybrat zbývajících $(m-1)$ prvků.

2. Do vybrané podmnožiny nepatří prvek X: Pak máme $\binom{n-1}{m}$ možností, jak z množiny $(n-1)$ ostatních prvků vybrat všech m prvků.

Kombinační čísla lze sestavit do tvaru tzv. Pascalova trojúhelníku, kde na n-tém řádku jsou postupně čísla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.

2.3. Pomocí matematické indukce podle n dokažte, že platí

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Řešení: Indukci provedeme podle řádku Pascalova trojúhelníku. Na nultém a prvním řádku Pascalova trojúhelníku platí $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, což daný vztah splňuje. Uvažujme n-tý řádek, kde $n > 1$. Pro $m = 0$ je

$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!n!},$$

takže stačí dokazovat pro $m \geq 1$. Podle indukčního předpokladu vzorec platí pro předchozí $(n-1)$. řádek. Proto lze dosadit do vztahu

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m!)} + \frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!} \\ &= \frac{m\,(n-1)!}{m!\,(n-m)!} + \frac{(n-m)\,(n-1)!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno.

2.4. Dokažte matematickou indukcí binomickou větu

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

pro $n = 0, 1, 2, \ldots$

Řešení: Pro $n = 0$ zřejmě platí (pro lib. a, b kromě toho, že 0^0 není přesně vzato definováno)

$$1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} 1 \cdot 1$$

Indukční krok $(n-1) \to n$:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)\,(a+b)^{n-1} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] a^k b^{n-k} + b^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.\end{aligned}$$

Využije se roznásobení, posunutí indexu, vyjmutí jednoho členu ze sumy, sloučení pod jednu sumu … vše pečlivě komentovat!

2.5. Dokažte, že n-prvková množina má 2^n podmnožin.

Řešení: Z n-prvkové množiny lze vybrat prázdnou množinu, všechny jednoprvkové, dvouprvkové atd. množiny. Jejich počet je tedy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2.6. Dokažte, že

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Řešení: Pokusíme se o důkaz matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vychází $\frac{1}{2} \leq 1$, což platí. V indukčním kroku $n \to (n+1)$ pak chceme dokázat

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Při platnosti indukčního předpokladu platí

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{2n+1}{2n+2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \\ &\leq \frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

Nyní stačí dokázat

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{n}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ \frac{2n+1}{2n+2} &\leq \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 &\leq \frac{n}{n+1} \\ (2n+1)^2 (n+1) &\leq n (2n+2)^2 \\ n+1 &\leq 0, \end{aligned}$$

což bohužel pravda není. Tímto způsobem tedy odhad matematickou indukcí použít nejde. Odhad je totiž příliš hrubý (odhadujeme shora příliš velkým číslem), takže po použití (taktéž hrubého) indukčního předpokladu se nám nepodaří indkukční krok dokončit.

2.7. Dokažte, že

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Řešení: Pokud se podaří toto dokázat, bude platit i odhad z předchozí úlohy, neboť

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Postupujeme opět matematickou indukcí. Pro $n = 1$ vychází $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$, což stále platí (je to vidět??). V indukčním kroku $n \to (n+1)$ pak chceme dokázat

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Při platnosti indukčního předpokladu platí

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} &= \frac{2n+1}{2n+2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \\
&\leq \frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2n+1}},
\end{aligned}$$

Nyní stačí dokázat

$$\begin{aligned}
\frac{2n+1}{2n+2} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \\
\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \\
(2n+1)(2n+3) &\leq (2n+2)^2 \\
0 &\leq 1,
\end{aligned}$$

což platí a indukční krok je tím úspěšně dokázán.

2.8. Dokažte, že součet třetích mocnin každých tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

Řešení: Budeme postupovat matematickou indukcí podle prvního z trojice čísel. Pro $n = 1$ platí

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 4 \cdot 9.$$

Indukční krok $n \to (n+1)$:

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = \underbrace{n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3}_{\text{dělitelné devíti z ind. předpokladu}} + \underbrace{9n^2 + 27n + 27}_{\text{dělitelné devíti}}$$

2.9. Dokažte, že pro posloupnost přirozených čísel definovanou jako

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= 4, \\ a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 3a_n \end{aligned}$$

platí

$$a_n = 3^n - (-1)^n .$$

Řešení: Jde o zobecněnou matematickou indukci, kdy používáme indukční předpoklad nejen pro předchozí prvek posloupnosti, ale pro oba dva. Nejprve vztah úspěšně ověříme pro $n = 0$ a $n = 1$. Nyní chceme dokázat, že

$$a_{n+2} = 3^{n+2} - (-1)^{n+2} .$$

Dosadíme indukční předpoklad do a_n i a_{n+1}. Dostaneme

$$\begin{aligned} a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n &= 2\left(3^{n+1} - (-1)^{n+1}\right) + 3\left(3^n - (-1)^n\right) \\ &= 3^n (2 \cdot 3 + 3) - 2(-1)^{n+1} - 3(-1)^n \\ &= 3^{n+2} + 2(-1)^{n+2} - 3(-1)^{n+2} \\ &= 3^{n+2} - (-1)^{n+2} . \end{aligned}$$

2.10. Dokažte, že číslo 133 je dělitelem čísla $\left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Řešení: Pro $n = 1$ dostáváme $11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 121 + 12 = 133$, takže výrok pro $n = 1$ platí.

Indukční krok $n \to (n+1)$:

$$\begin{aligned} \left(11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1}\right) &= 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \underbrace{\left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right)}_{\text{dělitelné 133 z indukčního předpokladu}} + \underbrace{\left(12^2 - 11\right)}_{=133} 12^{2n-1} \end{aligned}$$