CVIČENÍ
Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

Diferenciální počet

Doc. RNDr. Jan Mareš, CSc.
Jana Vondráčková, prom. mat.

2005
Česká technika – nakladatelství ČVUT

ISBN 80-01-02560-8

P Ř E D M L U V A

Toto skriptum vzniklo z potřeby nahradit alespoň zčásti osvědčenou sbírku příkladů B.P. Dĕmidovič: Sbornik zadač i upražněnij po matĕmatičeskomu analizu, která se mnoho let používala v základním studiu při výuce matematické analýzy, ale není již v dostatečném množství dostupná.

Sbírka je určena posluchačům všech oborů 1. ročníku FJFI ČVUT a pokrývá v postačující míře celou látku diferenciálního počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné. Členění příkladů do jednotlivých partií je zřejmé z obsahu.

Při tvorbě skripta čerpali autoři především ze zmíněné sbírky Dĕmidovičovy, částečně také ze sbírek jiných autorů. Těžiště práce bylo v uspořádání příkladů do takových tématických celků, které optimálně vyhovují současné náplni přednášky z matematické analýzy na FJFI.

Praha, červen 1985

Autoři.

1. Úvod

1.1. Pojem funkce

Určete definiční obor následujících funkcí:

1. $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$

2. $f(x) = (x - 2)\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

3.a) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

b) $f(x) = \ln(x + 2) + \ln(x - 2)$

4. $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

5. $f(x) = \sqrt{\cos x^2}$

6. $f(x) = \ln \sin \frac{\pi}{x}$

7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

8. $f(x) = \sqrt{\ln \operatorname{tg} x}$

9. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x + 1}$

10. $f(x) = \arccos (2\sin x)$

11. $f(x) = \operatorname{cotg} \pi x + \arccos 2^x$

12. $f(x) = \ln \ln \ln x$

U následujících funkcí stanovte jejich definiční obor a obor hodnot:

13. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

14. $f(x) = \ln(-x^2 + 5x - 6)$

15. $f(x) = \ln(1 - 2\cos x)$

16. $f(x) = \arccos \frac{2x}{x^2 + 1}$

17. $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}$

18. $f(x) = 2^{\arccos(1 - x)}$

Nalezněte množinu $f(M)$, je-li

19. $f(x) = x^2$, $M = (-1,2)$

20. $f(x) = |x|$, $M = \langle -3,2)$

21. $f(x) = \log_{10} x$, $M = (\frac{1}{10}, 100)$

22. $f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$, $M = R_+$

23. $f(x) = \frac{x}{2x - 1}$, $M = (0,1)$

24. $f(x) = \sqrt{x - x^2}$, $M = (0,1)$

25. Nalezněte lineární funkci $f(x) = ax + b$ tak, aby $f(0) = -2$ a $f(3) = 5$.

26. Nalezněte kvadratickou funkci $f(x) = ax^2 + bx + c$ tak, aby $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$ a $f(1) = 5$.

27. Nalezněte kubickou funkci $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tak, aby $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(1) = -3$ a $f(2) = 5$.

28. Nalezněte funkci tvaru $f(x) = a + bc^x$ tak, aby $f(0) = 15$, $f(2) = 30$ a $f(4) = 90$.

29. Dokažte, že tvoří-li argumenty x_n $(n \in N)$ funkce $f(x) = ax + b$ aritmetickou posloupnost, pak odpovídající hodnoty $f(x_n)$ tvoří také aritmetickou posloupnost.

30. Dokažte, že tvoří-li argumenty x_n $(n \in N)$ funkce $f(x) = ca^x$ $(c \neq 0$, $a > 0)$ aritmetickou posloupnost, pak odpovídající hodnoty $f(x_n)$ tvoří geometrickou posloupnost.

31. Funkce signum se definuje následovně:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases}$$

Dokažte, že pro všechna $x \in R$ platí vztah $|x| = x \operatorname{sgn} x$.

V následujících příkladech nalezněte složené funkce $f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$.

32. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

33. $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$

34. $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x$

35. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

36. $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ x & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases} , \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ -x^2 & \text{pro} \quad x > 0 \end{cases}$$

37. Nalezněte $f(f(x))$ a $f(f(f(x)))$, je-li $f(x) = \frac{1}{1 - x}$.

38. Nalezněte $f_n(x)$, je-li $f_0(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_k(x) = f_1(f_{k-1}(x))$ pro $k \in \hat{n} - \{1\}$, $n \in N$.

39. Nalezněte $f(x)$, je-li $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$.

40. Nalezněte $f(x)$, je-li $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$.

41. Nalezněte $f(x)$, je-li $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

42. Celá část reálného čísla x je definována vztahem

$$[x] = \max \{n \in Z \mid n \leq x\} .$$

Dokažte, že pro každé $x \in R$ platí

$$x - 1 < [x] \leq x \quad , \quad [x] \leq x < [x] + 1 .$$

Hyperbolické funkce (hyperbolický sinus, cosinus, tangens a cotangens) jsou definovány vztahy

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} , \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ,$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} , \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} .$$

V následujících příkladech dokažte základní vlastnosti hyperbolických funkcí $\sinh x$ a $\cosh x$.

43. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

44. $\sinh (x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
$\cosh (x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

45. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

46. $\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$

$\cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}$

1.2. Vlastnosti funkcí

O následujících funkcích dokažte, že jsou v uvedených intervalech ostře rostoucí.

47. $f(x) = x^2$ v $\langle 0,\infty)$

48. $f(x) = \sin x$ v $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

49. $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ v $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

50. $f(x) = \sinh x$ v $(-\infty,\infty)$

51. $f(x) = \cosh x$ v $\langle 0,\infty)$

O následujících funkcích dokažte, že jsou v uvedených intervalech ostře klesající.

52. $f(x) = x^2$ v $(-\infty,0\rangle$

53. $f(x) = \cos x$ v $\langle 0,\pi\rangle$

54. $f(x) = \mathrm{cotg}\, x$ v $(0,\pi)$

55. $f(x) = \cosh x$ v $(-\infty,0\rangle$

U následujících funkcí vyšetřete monotonii.

56. $f(x) = ax + b$

57. $f(x) = ax^2 + bx + c$

58. $f(x) = x^3$

59. $f(x) = \sqrt{x}$

60. $f(x) = \frac{1}{x}$

61. $f(x) = |x|$

62. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

63. $f(x) = a^x \quad (a > 0)$

64. $f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$

65. $f(x) = [x]$

O následujících funkcích rozhodněte, zda jsou sudé nebo liché.

66. $f(x) = |x|$

67. $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x)^2} + \sqrt[3]{(1 + x)^2}$

68. $f(x) = 3x^3 - x$

69. $f(x) = x^4 + 5x^2$

70. $f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x}$

71. $f(x) = \sinh x$

72. $f(x) = \cosh x$

73. $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$

74. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

75. $f(x) = [x]$

76. Dokažte, že součin dvou sudých nebo dvou lichých funkcí je funkce sudá a že součin sudé a liché funkce je funkce lichá.

77. Dokažte, že každou funkci definovanou na nějakém "symetrickém" intervalu $(-a,a)$ $(a > 0)$ lze napsat jako součet funkcí sudé a liché.

O následujících funkcích rozhodněte, jsou-li periodické; v kladném případě určete jejich nejmenší periodu T.

78. $f(x) = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x \qquad (a,b,\lambda \neq 0)$

79. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

80. $f(x) = x \sin x$

81. $f(x) = \sin^2 x$

82. $f(x) = \sin x^2$

83. $f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$

84. $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

85. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

86. $f(x) = \sin x + \sin (\sqrt{2}\, x)$

87. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in Q \\ 0 & \text{pro} \quad x \in R - Q \end{cases}$ (Dirichletova funkce)

88. Buďte f_1, f_2 periodické funkce s týmž definičním oborem, s periodami T_1 a T_2 a nechť $\frac{T_1}{T_2} \in Q$. Dokažte, že potom také funkce $f_1 + f_2$ a $f_1 f_2$ jsou periodické.

1.3. Inverzní funkce

K následujícím funkcím nalezněte funkce inverzní.

89. $f(x) = ax + b$

90. $f(x) = (x - 1)^3$

91. $f(x) = x^2 + 1$

92. $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$

93. $f(x) = \ln 2x$

94. $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

95. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

96. $f(x) = x + [x]$

97. $f(x) = \sinh x$

98. $f(x) = \cosh x$

99. $f(x) = \mathrm{tgh}\, x$

100. $f(x) = \mathrm{cotgh}\, x$

101. Funkce $f(x)$ daná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in Q \\ -x & \text{pro} \quad x \in R - Q \end{cases}$$

není monotonní v žádném intervalu, ale má inverzní funkci; nalezněte ji.

V příkladech 102 až 108 dokažte uvedené vztahy.

102. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

103. $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}$

104. $\arcsin \sin x = (-1)^k (x - k\pi)$, kde $k = \left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right]$

105. $\arccos \cos x = (-1)^k (x - \frac{\pi}{2} - k\pi) + \frac{\pi}{2}$, kde $k = \left[\frac{x}{\pi}\right]$

106. $\mathrm{arctg}\, \mathrm{tg}\, x = x - k\pi$, kde $k = \left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right]$

107. $\mathrm{arccotg}\, \mathrm{cotg}\, x = x - k\pi$, kde $k = \left[\frac{x}{\pi}\right]$

108. $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\, \mathrm{sgn}\, x \qquad (x \neq 0)$

109. Dokažte součtový vzorec pro funkci arkus tangens:

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, y = \mathrm{arctg}\, \frac{x + y}{1 - xy} + \varepsilon\pi$$, kde

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad xy < 1 \\ \mathrm{sgn}\, x & \text{pro} \quad xy > 1 \end{cases}$$

110. Dokažte součtový vzorec pro funkci arkus sinus:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi, \text{ kde}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{, pokud } xy \leq 0 \text{ nebo } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \operatorname{sgn} x & \text{, pokud } xy > 0 \text{ a } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} .$$

111. Dokažte součtový vzorec pro funkci arkus kosinus:

$$\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon} \arccos \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + \varepsilon 2\pi ,$$

kde

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{pro } x + y \geq 0 \\ 1 & \text{pro } x + y < 0 \end{cases} .$$

112. Dokažte vztah

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4} & \text{pro } x < -1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{pro } x > -1 \end{cases} .$$

113. Dokažte, že pro všechna $x \in R - Z$ platí

$$\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \left(\frac{2x-1}{2} \pi \right) = [x] .$$

114. Dokažte, že

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} .$$

Návod: položte $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, spočtěte $\operatorname{tg} 4\alpha$, položte $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ a spočtěte $\operatorname{tg} \beta$.

V příkladech 115 až 119 dokažte uvedené vztahy mezi cyklometrickými funkcemi.

115. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

116. $$\operatorname{arccotg} x = \begin{cases} \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{pro } x \geqq 0 \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{pro } x \leqq 0 \end{cases}$$

117. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,1))$

118. $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \,.\, \operatorname{sgn} x$

119. $$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2} & \text{pro } x \in \langle 0,1 \rangle \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2} & \text{pro } x \in \langle -1,0 \rangle \end{cases}$$

Rozhodněte, pro jaká x platí vztahy:

120. $\arcsin \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}\pi - x$

121. $\arccos x + \arccos \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} \right) = \dfrac{\pi}{3}$

122. $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \pi$

Zjednodušte následující výrazy:

123. $\sin \operatorname{arctg} x$

124. $\cos \operatorname{arctg} x$

125. $\operatorname{tg} \arcsin x \qquad (x \in (-1,1))$

126. $\arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2}$

127. $\arcsin (2x \sqrt{1-x^2}) - 2 \arcsin x$

128. $\arcsin x + \arcsin (2x \sqrt{1-x^2}) + 3 \arccos x \qquad \left(|x| \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

129. $3 \arccos x - \arccos (3x - 4x^3) \qquad \left(|x| \leqq \dfrac{1}{2}\right)$

Následující parametrické rovnice definují jednu nebo více funkcí $y = f(x)$; určete je.

130. $x = 1 - t \quad , \quad y = 1 - t^2$

131. $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t^2 + \frac{1}{t^2}$ $(t \neq 0)$

132. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a, b > 0)$

133. $x = a \cos^2 t$, $y = b \sin^2 t$ $(t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, $a, b > 0)$

134. $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ $(a, b > 0)$

135. $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \operatorname{arccotg} t$

136. $x = 1 - \cos t$, $y = t - \sin t$ $(t \in \langle 0, 2\pi \rangle)$

1.4. Grafy funkcí

Načrtněte grafy následujících funkcí:

137. $f(x) = ax + b$ pro $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -2$, $b = 0, 1, -2$

138. $f(x) = ax^2$ pro $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -2$

139. $f(x) = (x - d)^2$ pro $d = 0, 2, -3$

140. $f(x) = x^2 + c$ pro $c = 0, 2, -3$

141. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

142. $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

143. $f(x) = \frac{1}{2} x^2 + x + 1$

144. $f(x) = x^3 + 1$

145. $f(x) = \frac{1}{x}$

146. $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$

147. $f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 3}$

148. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

149. $f(x) = \sqrt{x}$

150. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

151. $f(x) = a^x$ pro $a = \frac{1}{2}, e, 10$

152. $f(x) = \sinh x$

153. $f(x) = \cosh x$

154. $f(x) = \operatorname{tgh} x$

155. $f(x) = \operatorname{cotgh} x$

156. $f(x) = \log_a x$ pro $a = \frac{1}{2}, e, 10$

157. $f(x) = \ln(-x)$

158. $f(x) = \ln |x|$

159. $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

160. $f(x) = a \sin x$ pro $a = 3, -2$

161. $f(x) = \sin ax$ pro $a = 2, \frac{1}{2}$

162. $f(x) = \sin(x - a)$ pro $a = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$

163. $f(x) = a \cos x + b \sin x$
Návod: Vyjádřete $f(x)$ ve tvaru $c \sin(x - d)$.

164. $f(x) = |\sin x|$

165. $f(x) = \sin x^2$

166. $f(x) = \sin \sqrt{x}$

167. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

168. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

169. $f(x) = e^{-x} \cos x$

170. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \geqq \frac{\pi}{2})$

171. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

172. $f(x) = |x|$

173. $f(x) = |1 - x| + |1 + x|$

174. $f(x) = |1 - x| - |1 + x|$

175. $f(x) = |x| + |x^2 - 1|$

176. $f(x) = |6x^2 + x| - 1$

177. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

178. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$

179. $f(x) = [x]$

180. $f(x) = x - [x]$

181. $f(x) = \min(x - [x], [x] + 1 - x)$

182. $f(x) = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]$

183. $f(x) = \sqrt{\ln \sin x}$

2. Limita

184. Nechť

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n ,$$

kde $n \in N$, $a_k \in R$ $(k = 0,1,2,\dots,n)$, $a_0 \neq 0$.

Dokažte, že

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \operatorname{sign} a_0 \,.\, (+\infty) ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} a_0 \,.\, (+\infty) & \text{, je-li } n \text{ sudé ,} \\ \operatorname{sign} a_0 \,.\, (-\infty) & \text{, je-li } n \text{ liché .} \end{cases}$$

185. Nechť

$$r(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m} ,$$

kde $n \in N$, $m \in N$, $a_k \in R$, $b_j \in R$ $(k = 0,1,2,\dots,n$; $j = 0,1,2,\dots,m)$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Dokažte, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \begin{cases} +\infty \text{ nebo } -\infty & \text{, je-li } n > m \text{ ,} \\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{, je-li } n = m \text{ ,} \\ 0 & \text{, je-li } n < m \text{ .} \end{cases}$$

Na čem závisí znaménko nevlastní limity v prvním případě $(n > m)$?

186. Nechť

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} ,$$

kde p,q jsou polynomy (jako v př. 185) ; nechť $p(a) = q(a) = 0$, kde $a \in R$.

Jakých hodnot může nabýt

$$\lim_{x\to a} r(x) \quad \text{, resp.} \quad \lim_{x\to a-} r(x) \quad \text{, resp.} \quad \lim_{x\to a+} r(x) \quad ?$$

187. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$; d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$.

188. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x}$

189. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)(1 - 4x)(1 - 5x)}{(6x - 1)^5}$

190. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(3x + 1)^{20}(2x + 1)^{10}}{(2x - 1)^{30}}$

191. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 - 2x^2}$

192. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$

193. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$

194. a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 8x^2 + 16}$ b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 8x^2 + 16}$

195. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}$ $(m \in N ,\ n \in N)$

196. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ $(n \in Z)$

197. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$

198. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ $(m \in N ,\ n \in N)$

199. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}$ $(a \in R ,\ n \in N)$

200. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1} - (n + 1)x + n}{(x - 1)^2}$ $(n \in N)$

201. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1 - x^m} - \dfrac{n}{1 - x^n} \right)$ $(m \in N ,\ n \in N)$

202. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$

203. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1 + 2x} + 1}{\sqrt[3]{2 + x} + x}$

204. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

205. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$

206. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x + 2 \cdot \sqrt[3]{x^4}}$

207. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

208. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$

209. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}} \right)$

210. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ $(n \in N)$

211. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}$ $(n \in N)$

212. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $(m \in N, n \in N)$

213. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$ $(m \in N, n \in N)$

214. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ $(m \in N, n \in N)$

215. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

216. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2n} - 2x + 1}{x^n - 2x + 1}$ $(n \in N)$

217. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

218. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x+1}$

219. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right)$

220. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right)$

221. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$ 222. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$

223. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$

224. $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}} - \sqrt{\dfrac{1}{x} - \sqrt{\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}} \right)$

225. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$

226. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$

227. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$ $(n \in N)$

228. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x^2} + x)^n - (\sqrt{1 + x^2} - x)^n}{x}$ $(n \in N)$

229. Určete konstanty α a β z podmínky:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - \alpha x - \beta \right) = 0 .$$

230. Určete konstanty α_i a β_i $(i = 1,2)$ z podmínek:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \alpha_1 x - \beta_1 \right) = 0 ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \alpha_2 x - \beta_2 \right) = 0 .$$

231. Určete konstanty α a β z podmínky:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{1 - x^3} - \alpha x - \beta \right) = 0 \quad .$$

---

232. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

233. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

234. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ $\quad (\alpha, \beta \in R, \beta \neq 0)$

235. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ $\quad (m, n \in Z)$

236. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

237. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

238. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

239. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

240. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{cotg} 3x$

241. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

242. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 2x}$

243. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$ $\quad (\alpha, \beta \in R)$

244. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$

245. $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$

246. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x})$

247. Dokažte:

a) $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$; b) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \qquad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi \ ; k \in Z)$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a \qquad (a \neq k\pi \ ; k \in Z)$.

248. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} \qquad (a \in R)$

249. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a} \qquad (a \in R)$

250. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} \qquad (a \neq (2k+1)\ \frac{\pi}{2} \ ; k \in Z)$

251. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} a}{x - a} \qquad (a \neq k\pi \ ; k \in Z)$

252. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x} \qquad (a \in R)$

253. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a + x) + \sin(a - x) - 2\sin a}{x^2} \qquad (a \in R)$

254. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a + 2x) - 2\cos(a + x) + \cos a}{x^2} \qquad (a \in R)$

255. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a + x)\ \sin(a + 2x) - \sin^2 a}{x} \qquad (a \in R)$

256. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$

257. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$

258. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

259. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \operatorname{cotg}^3 x}{2 - \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}^3 x}$

260. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \beta x} \qquad (\alpha, \beta \in R \ ; \beta \neq 0)$

261. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x}{1 - \cos x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \ldots \cos nx}{1 - \cos x}$

262. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + tg\, x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$

263. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$

264. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

265. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$

266. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$

267. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

268. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}\ \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

---

269. a) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1 + x}{2 + x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1 + x}{2 + x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1 + x}{2 + x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

270. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

271. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x^2}}$

272. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{\frac{2}{x^2}}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2+1}\right)^{2x^2}$

273. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

274. a) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

275. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

276. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{x}$ $(a>0, c>0)$

277. $\lim\limits_{x\to1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\operatorname{cotg}\pi x}$ 278. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

279. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3x}}$

280. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(a\neq k\pi, k\in Z)$

281. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 282. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$

283. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$ 284. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

285. $$\lim_{x\to 0+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$$

286. $$\lim_{x\to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\operatorname{cotg} 2x}$$

287. $$\lim_{x\to +\infty} x\,(\ln(x+1)-\ln x)$$

288. $$\lim_{x\to +\infty} (\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$$

289. $$\lim_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$$

290. $$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a} \qquad (a>0)$$

291. $$\lim_{x\to 10} \frac{\log_{10} x - 1}{x-10}$$

292. $$\lim_{x\to 0} \frac{\log_{10}(a+x) + \log_{10}(a-x) - 2\log_{10} a}{x^2} \qquad (a>0)$$

293. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx} \qquad (b\neq 0)$$

294. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} \qquad (b\neq 0)$$

295. $$\lim_{x\to 0} \ln\frac{\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2 x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}} \qquad (\alpha\in R)$$

296. $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\alpha x + \sqrt{1-\alpha^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})} \qquad (\alpha\in R)$$

297. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x-1)}$$

298. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$$

299. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^{\alpha x})}{\ln(1+e^{\beta x})} \qquad (\alpha>0, \beta>0)$$

300. a) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$ b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$$

301. a) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$ b) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

302. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{2x})}$ 303. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln (1 + 2^x) \cdot \ln (1 + \frac{3}{x})$

304. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (1 + x e^x)}{\ln (x + \sqrt{1 + x^2})}$

305. $\lim\limits_{x\to 0+} \ln (x \ln a) \cdot \ln \left(\dfrac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right)$ $(a > 1)$

306. $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ 307. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$

308. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ $(\alpha \neq \beta)$

309. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos xe^x - \cos xe^{-x}}{x^3}$ 310. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2 e^{\frac{x}{x+1}} - 1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

311. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a > 0, b > 0)$

312. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1 + x\, 2^x}{1 + x\, 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ 313. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ $(a > 0, \beta \neq 0)$

314. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x - a^b}{x - b}$ $(a > 0)$ 315. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{b+x} + a^{b-x} - 2\, a^b}{x^2}$ $(a > 0)$

316. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$ $(a > 0)$ 317. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x - a^a}{x - a}$ $(a > 0)$

318. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x + a)^{x+a}\,(x + b)^{x+b}}{(x + a + b)^{2x+a+b}}$

319. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$

320. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}}$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$

321. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{x}$

---

322. a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sinh x - \sinh a}{x - a}$ $(a \in R)$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cosh x - \cosh a}{x - a}$ $(a \in R)$

323. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cosh x}{\ln \cos x}$

324. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln \cosh x)$

325. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tgh} x}$

326. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sinh \sqrt{x^2 + x} - \sinh \sqrt{x^2 - x}}{\cosh x}$

---

327. $\lim\limits_{x\to +\infty} \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

328. $\lim\limits_{x\to +\infty} \arccos (\sqrt{x^2 + x} - x)$

329. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

330. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

331. a) $\lim\limits_{x\to 1-} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 - x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1+} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1 - x}$

332. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin (a + x) - \arcsin a}{x}$ $(|a| < 1)$

333. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} (a + x) - \operatorname{arctg} a}{x}$ $(a \in R)$

334. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \frac{1 + x}{1 - x}}{\operatorname{arctg} (1 + x) - \operatorname{arctg} (1 - x)}$

335. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$

336. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

---

337. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n} \qquad (x \in R)$

338. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^n \qquad (x \in R)$

339. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \qquad (x \in R)$

340. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \ln\cos\frac{\pi}{n}$

341. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$

342. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{n+1}{n-1}\frac{\pi}{2}\right)^{\operatorname{tg}\frac{n-1}{n+1}\frac{\pi}{2}}$

343. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cosh\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$

344. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \qquad (a > 0)$

---

345. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}} + a^{-\frac{1}{n}} - 2\right) \qquad (a > 0)$

346. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right) \qquad (a > 0)$

347. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a - 1 + \sqrt[n]{b}}{a}\right)^n \qquad (a > 0, b > 0)$

348. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \qquad (a > 0, b > 0)$

349. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n \qquad (a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_m > 0)$

350. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + a^n} \qquad (a > 0)$

351. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + a^n + \left(\frac{a^2}{2}\right)^n} \qquad (a > 0)$

352. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + a^{2n}}}$ $(a > 0)$

353. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n + a^n)}{n}$ $(a > 0)$

354. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

355. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}}$

356. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

357. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n\text{ krát}} x$

3. Spojitost

3.1. Spojitost funkce

U následujících funkcí vyšetřete spojitost a charakter jejich bodů nespojitosti:

358. $f(x) = |x|$

359. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

360. $f(x) = [x]$

361. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$

362. $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + x^3}$

363. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

364. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

365. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$

366. $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$

367. $f(x) = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

368. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

369. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

370. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

371. $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$

372. $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$

373. $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right]$

374. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin x$

375. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin \frac{\pi}{x}$

376. $f(x) = \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn} \sin \frac{\pi}{x}$

377. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$

378. $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$

379. $f(x) = \dfrac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}$

380. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - 1}{x}$

381. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

382. $f(x) = \ln \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$

383. $f(x) = \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1)$

384. $f(x) = [x]\,(x - [x])$

385. $$f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{pro } x \in Q \\ 0 & \text{pro } x \in R - Q \end{cases}$$

386. Buď $f_{m,n}(x) = \cos^n(\pi\, m!\, x)$ $(x \in R,\ m,n \in N)$ a nechť $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} f_{m,n}(x)$. Dokažte, že funkce $f(x)$ je Dirichletova funkce (viz 87), nespojitá v libovolném $x \in R$.

387. Dokažte, že <u>Riemannova funkce</u>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in Q - \{0\},\ x = \frac{p}{q},\ q > 0,\ p,q \text{ nesoudělná} \\ 1 & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \in R - Q \end{cases}$$

je spojitá v libovolném $x \in R - Q$ a nespojitá v libovolném $x \in Q$.

388. Vyšetřete spojitost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{q\,x}{q+1} & \text{pro } x \in Q - \{0\},\ x = \frac{p}{q},\ q > 0,\ p,q \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ |x| & \text{pro } x \in R - Q \end{cases}$$

389. Buďte f, g funkce takové, že

a) funkce f je spojitá v bodě a, funkce g je nespojitá v bodě a;
b) obě funkce f i g jsou nespojité v bodě a.

Definujme funkce s a p vztahy

$$s(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad p(x) = f(x)\,.\,g(x) \,.$$

Co lze říci o spojitosti funkcí s a p v bodě a?

3.2. Stejnoměrná spojitost funkce

390. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, spojitá v intervalu $(0,1)$, není v tomto intervalu stejnoměrně spojitá. Je funkce f stejnoměrně spojitá v intervalu $(0{,}01,\ 1)$?

391. Dokažte, že funkce $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$, spojitá a omezená v intervalu $(0,1)$, není v tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

392. Dokažte, že funkce $f(x) = \sin x^2$, spojitá a omezená v R, není v R stejnoměrně spojitá.

Rozhodněte, zda následující funkce jsou stejnoměrně spojité v uvedených intervalech.

393. $f(x) = 5x - 3$ v R

394. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ v R

395. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ v $(-1,1)$

396. $f(x) = x + \sin x$ v R

397. $f(x) = x \sin x$ v R

398. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ v $(0,1)$

399. $f(x) = \ln x$ v $(0,1)$

400. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v R

401. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ v $(0,\pi)$

402. $f(x) = \sqrt{x}$ v $\langle 0,\infty)$

403. Dokažte, že funkce $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{x}$ je stejnoměrně spojitá v intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$, ale není stejnoměrně spojitá v jejich sjednocení.

404. Dokažte, že funkce f spojitá v omezeném intervalu (a,b) má v bodech a,b odstranitelné nespojitosti (a lze ji tedy spojitě dodefinovat v bodech a,b) právě tehdy, je-li stejnoměrně spojitá v (a,b) .

405. Dokažte, že je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a,+\infty)$ a existuje-li

konečná $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, je f stejnoměrně spojitá v $\langle a, +\infty)$

406. Dokažte, že funkce spojitá, omezená a monotonní v intervalu (a,b) je stejnoměrně spojitá v tomto intervalu.

4. Derivace

4.1. Derivace funkce

Nalezněte derivace následujících funkcí:

407. $f(x) = \frac{2}{3} x^4 - 2x + 3$

408. $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x$

409. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

410. $f(x) = (5 + 2x)^{10} (3 - 4x)^{20}$

411. $f(x) = (1 - x)(1 - x^2)^2 (1 - x^3)^3$

412. $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$

413. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (c^2 + d^2 \neq 0)$

414. $f(x) = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

415. $f(x) = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$

416. $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \qquad (x > 0)$

417. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

418. $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}$

419. $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{x^5 + 3}$

420. $f(x) = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\,\sqrt[3]{3 + x^3} \qquad (x \neq -\sqrt[3]{3})$

421. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}} \qquad (|x| \neq 1)$

422. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \qquad (x > 0)$

423. $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$

424. $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}} \qquad (x \in (0, \pi^2))$

425. $f(x) = \sin^2 x$

426. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

427. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$

428. $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$

429. $f(x) = e^{-x^2}$

430. $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$

431. $f(x) = 2^{\sqrt{\sin^2 x}} \quad (x \neq k\pi, k \in Z)$

432. $f(x) = 3^{2^x}$

433. $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\, e^x$

434. $f(x) = (1 + \operatorname{cotg} \frac{x}{2})\, e^x$

435. $f(x) = \dfrac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, e^{ax} \quad (a, b \neq 0)$

436. $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$

437. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{\frac{x}{2}} \quad (x > 0)$

438. $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a, b > 0)$

439. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0)$

440. $f(x) = \ln |x|$

441. $f(x) = \ln \ln \ln x$

442. $f(x) = \frac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

443. $f(x) = \ln \ln^a bx \quad (a \in R, b \in R_+)$

444. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right)$

445. $f(x) = \log_{10}^3 x^2$

446. $f(x) = \log_2 \ln 2x$

447. $f(x) = \log_x e$

448. $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$

449. $f(x) = x \ln^2 (x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x$

450. $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2})$

451. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

452. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

453. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

454. $f(x) = x (\sin \ln x - \cos \ln x)$

455. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$

456. $f(x) = \arcsin \frac{x}{2} \quad (|x| < 2)$

457. $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x}{\sqrt{2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2})$

458. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a} \quad (a \neq 0)$

459. $f(x) = \sqrt{x} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad (x > 0)$

460. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{2}}{x}$

461. $f(x) = \operatorname{arctg} (x - \sqrt{1 + x^2})$

462. $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \arccos x \quad (|x| < 1)$

463. $f(x) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1 + x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} \quad (x > 0)$

464. $f(x) = \arccos \frac{1}{x} \quad (|x| > 1)$

465. $f(x) = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$

466. $f(x) = \arccos \cos^2 x \quad (x \neq k\pi, k \in Z)$

467. $f(x) = \arcsin (\sin x - \cos x) \quad (x \in (k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in Z)$

468. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}$

469. $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

470. $f(x) = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad (x \neq 0)$

471. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3$

472. $f(x) = \ln \frac{x + a}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \quad (b \neq 0)$

473. $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0, |x| < a)$

474. $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}\, x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\, x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\, x}{x^2 - 1}$

475. $f(x) = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x \quad (|x| < 1)$

476. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} - \frac{\arccos x}{x} \quad (0 < |x| < 1)$

477. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)$

478. $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}} \quad (x \in (0,1))$

479. $f(x) = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x$

480. $f(x) = \operatorname{arctg} (x + \sqrt{1 + x^2})$

481. $f(x) = \ln (e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$

482. $f(x) = x + x^x + x^{x^x}$

483. $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \qquad (a > 0)$

484. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

485. $f(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$

486. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

487. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

488. $f(x) = \sinh x$

489. $f(x) = \cosh x$

490. $f(x) = \operatorname{tgh} x$

491. $f(x) = \operatorname{cotgh} x$

492. $f(x) = \ln \sinh x + \dfrac{1}{2 \sinh x}$

493. $f(x) = \dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln \operatorname{cotgh} \dfrac{x}{2}$

494. $f(x) = \operatorname{arctg} \operatorname{tgh} x$

495. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{\cosh x} \qquad (x \neq 0)$

496. $f(x) = \operatorname{argsinh} x$

497. $f(x) = \operatorname{argcosh} x \qquad (x > 1)$

U následujících funkcí nalezněte derivace, případně derivace zleva a zprava, ve všech bodech,kde existují.

498. $f(x) = |x|$

499. $f(x) = x\,|x|$

500. $f(x) = \operatorname{sgn} x$

501. $f(x) = [x]$

502. $f(x) = x\,[x]$

503. $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$

504. $f(x) = |\sin x|$

505. $f(x) = |\sin^3 x|$

506. $f(x) = \arcsin \sin x$

507. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{|x|}$

508. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$

509. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$

510. $f(x) = |\ln |x||$

511. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$

512. $f(x) = [x] \sin \pi x$ 513. $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$

514. $$f(x) = \begin{cases} x \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

515. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right| & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

516. Pro jaká $\alpha \in R$ funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a) je spojitá v bodě 0 ,
b) má derivaci v bodě 0 ,
c) má spojitou derivaci v bodě 0 ?

517. Pro jaká $\alpha \in R$, $\beta \in R_+$ funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{|x|^{\beta}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

a) má derivaci v jistém okolí bodu 0 ,
b) má omezenou derivaci v jistém okolí bodu 0 ?

518. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in Q \\ 0 & \text{pro } x \in R - Q \end{cases}$$

má derivaci pouze v bodě 0 .

519. Nechť polynom $P(x)$ má k-násobný ($k \in N$) kořen α . Dokažte, že potom číslo α je $(k - 1)$-násobným kořenem polynomu $P'(x)$. (Přitom říkáme, že α je 0-násobným kořenem polynomu, není-li vůbec kořenem tohoto polynomu.)

520. Nechť funkce $f_1, \dots, f_n$ mají konečnou derivaci v bodě $x \in R$. Dokažte, že

potom platí:

$$(f_1(x) \dots f_n(x))' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x) \dots f_{k-1}(x)\, f_k'(x)\, f_{k+1}(x) \dots f_n(x) \quad .$$

521. Nalezněte $f'(0)$, je-li $f(x) = \prod_{k=0}^{1000} (x - k)$.

522. Nechť funkce f_{ij} $(i,j \in \hat{n}, n \in N)$ mají konečnou derivaci v bodě $x \in R$. Dokažte následující pravidlo o derivování determinantu:

$$\begin{vmatrix} f_{1\,1}(x), & \dots & ,f_{1\,n}(x) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_{n\,1}(x), & \dots & ,f_{n\,n}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{1\,1}(x) & , \dots & ,f_{1\,n}(x) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_{k-1\,1}(x), & \dots & ,f_{k-1\,n}(x) \\ f_{k\,1}'(x) & , \dots & ,f_{k\,n}'(x) \\ f_{k+1\,1}(x), & \dots & ,f_{k+1\,n}(x) \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_{n\,1}(x) & , \dots & ,f_{n\,n}(x) \end{vmatrix}$$

523. Nalezněte $f'(x)$, je-li

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

524. Nalezněte $f'(x)$, je-li

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

525. Dokažte, že derivace sudé diferencovatelné funkce je funkce lichá a že derivace liché diferencovatelné funkce je funkce sudá.

526. Dokažte, že derivace periodické diferencovatelné funkce je funkce periodická.

527. Je možné, aby funkce $f + g$ měla derivaci v bodě x ,

a) nemá-li právě jedna z funkcí f,g derivaci v bodě x ;

b) nemá-li žádná z funkcí f,g derivaci v bodě x ?

528. Je možné, aby funkce $f.g$ měla derivaci v bodě x,

a) nemá-li právě jedna z funkcí f,g derivaci v bodě x;

b) nemá-li žádná z funkcí f,g derivaci v bodě x?

529. Je možné, aby funkce $f(g(x))$ měla derivaci v bodě x, jestliže

a) funkce f má derivaci v bodě $g(x)$ a funkce g nemá derivaci v bodě x;

b) funkce f nemá derivaci v bodě $g(x)$ a funkce g má derivaci v bodě x;

c) funkce f nemá derivaci v bodě $g(x)$ a funkce g nemá derivaci v bodě x?

V následujících příkladech nalezněte naznačené součty derivováním vhodných funkcí.

530. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1}$

531. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2\, x^{k-1}$

532. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cos kx$

533. $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}$

Návod: využijte vztah

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Následující parametrické rovnice definují jednu nebo více funkcí $y = f(x)$; nalezněte derivace $f'(x)$.

534. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ $(t \in R)$

535. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$ $(t > 0)$

536. $x = \ln(1 + t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$ $(t > 0)$

537. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$ $(t \in R)$

538. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(t \in (-\pi, \pi),\ a,b > 0)$

539. $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ $(t \in R,\ a,b > 0)$

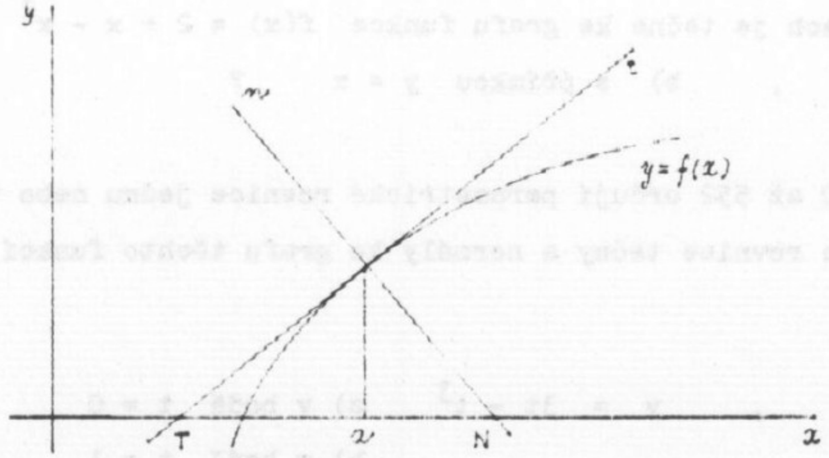
540. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(t \in R, a > 0)$

541. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(t \in R, a > 0)$

542. $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$ $(t \in R)$

543. $x = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $(t \in R)$

4.2. Význam derivace v geometrii a mechanice



Nechť funkce f má konečnou nenulovou derivaci v bodě $a \in R$. Tečna t ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad .$$

Normála n ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a) \quad .$$

Je-li T resp. N průsečík tečny t resp. normály n s osou x , nazveme úsečku o krajních bodech T,a resp. N,a úsek tečny resp. úsek normály. Pro velikosti úseků platí:

$$u_t = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| \quad , \qquad u_n = |f(a)\,f'(a)| \quad .$$

V příkladech 544 až 548 nalezněte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a .

544. $f(x) = x^2 - 5x + 4$, $a = -1$

545. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $a = -2$

546. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$

547. $f(x) = \ln x$, $a = 1$

548. $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, a) $a = -1$, b) $a = 2$, c) $a = 3$.

549. Ve kterých bodech je tečna ke grafu funkce $f(x) = 2 + x - x^2$ rovnoběžná
a) s osou x , b) s přímkou $y = x$?

V příkladech 550 až 552 určují parametrické rovnice jednu nebo více funkcí $y = f(x)$. Nalezněte rovnice tečny a normály ke grafu těchto funkcí v uvedených bodech.

550. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ a) v bodě $t = 0$,
b) v bodě $t = 1$.

551. $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}$ v bodě $(2,2)$.

552. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ a) v bodě $(0,0)$,
b) v bodě $t = \dfrac{\pi}{4}$.

553. Nalezněte všechny body, ve kterých má graf funkce $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}$ tečnu rovnoběžnou s osou y .

554. Určete rovnici tečny k cykloidě $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ v bodě $t = \alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Na základě výsledku popište konstrukci tečny.

555. Nalezněte rovnice tečny a normály k elipse $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ v bodě $(6,\ 6{,}4)$.

556. Nechť $a, b \in R$, $a < b$. Polopřímky $y = k_1(x - a)$ $(x < a)$ a $y =$

$= k_2(x - b) \quad (x > b)$ spojte kubickou parabolou $y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ $(\alpha \neq 0, x \in \langle a,b \rangle)$ tak, aby vzniklá křivka byla hladká v R .

557. Pod jakým úhlem protíná křivka $y = \ln x$ osu x ?

558. Pro jaké hodnoty parametru $p > 0$ protíná křivka $y = \operatorname{arctg} px$ osu x pod úhlem větším než 89^o ?

559. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ přímku $x = 2$?

560. V jakém bodě křivky $y^2 = 2x^3$ je tečna kolmá k přímce $4x - 3y + 2 = 0$?

561. Dokažte, že tečny k hyperbole $y = \frac{x-4}{x-2}$ v jejích průsečících s osami souřadnic jsou rovnoběžné .

562. Nalezněte rovnici normály ke křivce $y = -\sqrt{x} + 2$ v jejím průsečíku s přímkou $y = x$.

563. Úhlem, pod kterým se protínají křivky $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$, rozumíme úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pod kterým se protínají tečny sestrojené k oběma křivkám v jejich průsečíku (a,b) . Dokažte, že pro $f_1'(a)\, f_2'(a) \neq -1$ je

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{f_2(a) - f_1(a)}{1 + f_1'(a)\, f_2'(a)} \right| .$$

V příkladech 564 až 568 určete úhel, pod kterým se protínají dané křivky.

564. $y = x^2 \quad , \quad y = x^3$

565. $y = x^2 \quad , \quad x = y^2$

566. $y = (x - 2)^2 \quad , \quad y = 4 + 4x - x^2$

567. $y = \sin x \quad , \quad y = \cos x \quad , \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$

568. $x^2 + y^2 = 8x \quad , \quad y^2 = x$

569. Vypočtěte vzdálenost normály ke křivce $y = e^{2x} + x^2$ sestrojené v bodě $(0,1)$ od počátku souřadnic.

570. Vypočtěte velikost úseku tečny ke křivce $y = \alpha x^n$ $(\alpha \neq 0, n \in N)$ v bodě a . Na základě výsledku popište konstrukci tečny.

571. Dokažte, že u paraboly $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ je velikost úseku tečny v bodě $a \in R_+$ rovna $2a$, zatímco velikost úseku normály je p (nezávisle na a). Na základě výsledku popište konstrukci tečny.

572. Dokažte, že křivka $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ má konstantní velikost úseku tečny.

573. Vypočtěte délku normály (od bodu dotyku k ose x) k řetězovce $y = a \cosh \frac{x}{a}$ $(a \neq 0)$ v bodě x.

574. Za jaké podmínky se parabola $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ dotýká osy x ?

575. Za jaké podmínky se kubická parabola $y = x^3 + px + q$ dotýká osy x ?

576. Za jaké podmínky se křivka $y = ax^2$ dotýká křivky $y = \ln x$?

Vyjadřuje-li funkce $s(t)$ závislost dráhy hmotného bodu s na čase t, pak 1.derivace $s'(t)$ vyjadřuje rychlost a 2.derivace $s''(t)$ zrychlení hmotného bodu v čase t.

577. Závislost dráhy hmotného bodu, pohybujícího se na ose x, na čase má tvar $x(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) V jakých časových okamžicích je smysl pohybu hmotného bodu stejný jako kladný smysl na ose x ?

b) V jakých časových okamžicích je zrychlení bodu nulové ?

578. Těleso o hmotnosti 4kg se pohybuje přímočaře, $s(t) = t^2 + t + 1$. Určete kinetickou energii tělesa v čase $t = 5$ sec.

579. V jakém okamžiku $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přestala na hmotný bod, pohybující se dosud harmonickým pohybem $s(t) = \cos 3t$, působit síla, jestliže se od tohoto okamžiku pohyboval rovnoměrně přímočaře rychlostí $v = \frac{3}{2}$ m/sec ?

580. V jakém bodě elipsy $16x^2 + 9y^2 = 400$ se při pohybu po této elipse y-ová souřadnice zmenšuje tak rychle, jako se x-ová souřadnice zvětšuje ?

581. Poloměr koule r se mění rychlostí v. Jakou rychlostí se mění povrch a objem této koule.

582. Kolo se otáčí tak, že úhel otočení je přímo úměrný čtverci času. První

otáčka (od začátku otáčení) trvala 8 sec . Vypočtěte úhlovou rychlost ω 32 sec od začátku otáčení.

583. Bod A se pohybuje rovnoměrně po kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ s periodou T . V čase $t = 0$ má souřadnice $(r,0)$. Vypočtěte rychlost $v(t)$ a zrychlení $a(t)$ projekce bodu A na osu x .

584. Hmotnému bodu ve vakuu je udělena počáteční rychlost v_0 ve směru svírajícím s vodorovnou rovinou úhel $\alpha \in \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$. Stanovte trajektorii vrženého hmotného bodu, jeho rychlost, zrychlení, maximální výšku a dolet.

4.3. Derivace vyšších řádů

Nalezněte n-té $(n \in N_0)$ derivace následujících funkcí:

585. $f(x) = e^x$

586. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$

587. $f(x) = \sin x$

588. $f(x) = \cos x$

589. $f(x) = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$

590. $f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

V příkladech 591 až 600 nalezněte derivace daných řádů.

591. f'' , je-li $f(x) = e^{-x^2}$

592. f'' , je-li $f(x) = \operatorname{tg} x$

593. f'' , je-li $f(x) = x \ln x$

594. f'' , je-li $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$

595. $f^{(10)}$, je-li $f(x) = \sqrt{x}$

596. $f^{(8)}$, je-li $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x}$

597. $f^{(20)}$, je-li $f(x) = x^2 e^{2x}$

598. $f^{(5)}$, je-li $f(x) = x \ln x$

599. $f^{(5)}$, je-li $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

600. $f^{(50)}$, je-li $f(x) = x^2 \sin 2x$

Nalezněte n-té $(n \in N_0)$ derivace následujících funkcí:

601. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

602. $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

603. $f(x) = \frac{1}{x(1 - x)}$

604. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

605. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$

606. $f(x) = \sin^2 x$

607. $f(x) = \sin^3 x$

608. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

609. $f(x) = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$

610. $f(x) = e^x \cos x$ Návod: $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$

611. $f(x) = x \sinh x$

612. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ Návod: Využijte příklad 613.

613. Dokažte, že

$$\left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left((n + 1) \operatorname{arccotg} x\right)$$

Návod: $\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$

614. Nalezněte $f^{(n)}(0)$, je-li

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ b) $f(x) = \arcsin x$

Návod: Užijte Leibnizovu formuli na rovnosti

$(1 + x^2)\, f''(x) = -2x\, f'(x)$ resp. $(1 - x^2)\, f''(x) = x\, f'(x)$.

V příkladech 615 až 620 definují parametrické rovnice jednu nebo více funkcí $y = f(x)$. Nalezněte derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ těchto funkcí.

615. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $t \neq 1$

616. $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $a > 0$, $t \neq k\pi$, $k \in Z$

617. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \neq 2k\pi$, $k \in Z$

618. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

619. $x = \frac{1}{\cos t}$, $y = \operatorname{tg} t$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

620. $x = \arcsin t$, $y = \ln(1 - t^2)$, $t \in (-1, 1)$

621. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

má derivace všech řádů v bodě 0 a vypočtěte je.

Návod: Použijte l´Hospitalovo pravidlo.

622. Dokažte, že funkce $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty, splňuje rovnost $y'' + y = 0$.

623. Dokažte, že funkce $y(x) = c_1 \cosh x + c_2 \sinh x$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty, splňuje rovnost $y'' - y = 0$.

624. Dokažte, že funkce $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in R)$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty, splňuje rovnost

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)\, y' + \lambda_1 \lambda_2\, y = 0 .$$

625. Dokažte, že funkce $y(x) = e^{-x} \cos x$ splňuje rovnost $y^{(4)} + 4y = 0$.

626. Dokažte, že funkce $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + e^x$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty, splňuje rovnost

$$y'' - 4y' + 4y = e^x .$$

627. Dokažte, že Legendrův polynom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \left((x^2 - 1)^n\right)^{(n)} \quad (n \in N_0)$$

splňuje rovnost

$$(1 - x^2)\, P_n''(x) - 2x\, P_n'(x) + n(n+1)\, P_n(x) = 0 .$$

Návod: Derivujte $(n + 1)$-krát rovnost $(x^2 - 1)\, f'(x) = 2nx\, f(x)$, kde $f(x) = (x^2 - 1)^n$.

628. Dokažte, že funkce

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$$

je pro každé $n \in N$ polynom stupně n v proměnné x - tzv. Čebyševův polynom - a že $T_n(x)$ splňuje rovnost

$$(1 - x^2)\, T_n''(x) - x\, T_n'(x) + n^2\, T_n(x) = 0 \quad .$$

Návod: Sečtením rovností $(\alpha \in R)$

$$\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha = (\cos\alpha \pm i \sin\alpha)^n$$

dokažte, že $\cos n\alpha$ je polynom stupně n v proměnné $\cos\alpha$.

629. Dokažte, že funkce

$$L_n(x) = e^x\, (x^n e^{-x})^{(n)}$$

je pro každé $n \in N_0$ polynom stupně n v proměnné x - tzv. Laguerrův polynom - a že $L_n(x)$ splňuje rovnost

$$x\, L_n''(x) + (1 - x)\, L_n'(x) + n\, L_n(x) = 0 \quad .$$

Návod: Derivujeme-li n-krát funkci $f(x) = x^n e^{-x}$, dostaneme

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, k!\, \binom{n}{k}^2 x^{n-k} \; ;$$

dále derivujeme $(n + 1)$-krát rovnost $x\, f'(x) + (x - n)\, f(x) = 0$ a dosadíme podle vztahu $f^{(n)}(x) = e^{-x} L_n(x)$.

630. Dokažte, že funkce

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$$

je pro každé $n \in N_0$ polynom stupně n v proměnné x - tzv. Hermitův polynom - a že $H_n(x)$ splňuje rovnost

$$H_n''(x) - 2x\, H_n'(x) + 2n\, H_n(x) = 0 \, .$$

Návod: Derivováním rovnosti $\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$ získáme vztah $H_{n+1} = 2x\, H_n - H_n'$; odtud plyne první tvrzení. Dále derivujeme $(n + 1)$-krát rovnost $f'(x) + 2x\, f(x) = 0$, kde $f(x) = e^{-x^2}$ a dosadíme podle vztahu $f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$.

631. Matematickou indukcí dokažte rovnost

$$\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{\frac{1}{x}} \qquad (n \in N_0, x \neq 0) \quad .$$

632. Matematickou indukcí dokažte rovnost

$$(x^n \ln x)^{(n)} = n!\, \left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \qquad (n \in N_0, x > 0) \quad .$$

5. Užití derivací

5.1. Věty o přírůstku funkce.

633. **Dokažte, že všechny kořeny derivace polynomu**

$$p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

jsou reálné a separujte je (t.j. pro každý kořen nalezněte interval, v němž tento kořen leží, a který již žádný jiný kořen neobsahuje).

634. **Dokažte, že všechny kořeny derivace polynomu**

$$p(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$$

jsou reálné. (Užijte též cv. 519.)

635. Dokažte, že derivace polynomu, jehož všechny kořeny jsou reálné, má také všechny kořeny reálné.

636. Nechť funkce f má konečnou derivaci v každém bodě intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, a

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to b-} f(x).$$

Dokažte, že v intervalu (a, b) existuje bod c tak, že $f'(c) = 0$.

637. Nechť pro funkci f platí:

1. má spojitou derivaci řádu $n-1$ v intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$;
2. má derivaci řádu n v intervalu (x_0, x_n);
3. $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, kde $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Dokažte, že v intervalu (x_0, x_n) existuje bod c tak, že $f^{(n)}(c) = 0$.

638. Dokažte, že Legendrův polynom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

má všechny kořeny reálné a ležící v intervalu $(-1, 1)$.

639. Dokažte, že Laguerrův polynom

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{d x^n}$$

má všechny kořeny kladné.

640. Dokažte, že **Hermitův polynom**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{d x^n}$$

má všechny kořeny reálné.

S použitím věty o přírůstku funkce dokažte následující nerovnosti:

641. $n(b-a) a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a) b^{n-1}$, je-li $0 < a < b$, $n > 1$

642. $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$, je-li $a, b \in R$

643. $|\mathrm{arctg}\, a - \mathrm{arctg}\, b| \leqslant |a - b|$, je-li $a, b \in R$

644. $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, je-li $0 < b < a$

645. **Dokažte implikaci: Jestliže funkce f je diferencovatelná a není omezená v omezeném intervalu (a,b) , pak ani její derivace není v intervalu (a,b) omezená. Obrácená implikace neplatí (sestrojte vhodný příklad) .**

646. Dokažte, že má-li funkce f v libovolném otevřeném intervalu (a,b) omezenou derivaci, pak je v tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

647. Dokažte tvrzení: Je-li $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, kde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, pak je funkce f v intervalu (a,b) konstantní. Co lze říci o funkci f , pro kterou je $f^{(n)}(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$?

648. Dokažte, že výraz

$$\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$$

při $x^2 < \frac{1}{2}$ nezávisí na x .

649. Jaký vztah platí mezi funkcemi

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x} \quad , \quad g(x) = \operatorname{arctg} x \quad ?$$

Návod: Dokažte, že pro $x \neq 1$ je $f'(x) = g'(x)$ a užijte cvičení 647.

Dokažte následující rovnosti:

650. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

651. $\operatorname{arccotg} x = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, je-li $x \geqslant 0$

(Jaký vztah platí mezi danými funkcemi při $x < 0$?)

652. $\dfrac{2x - 1}{2} - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \dfrac{2x - 1}{2} \pi \right) = [x]$,

jestliže x není celé číslo.

653. $3 \arccos x - \arccos (3x - 4x^3) = \pi$,

je-li $|x| \leqslant \frac{1}{2}$

Zjednodušte následující výrazy:

654. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x}{1 + x}$

655. $\arcsin x - \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

656. $\arcsin (2x \sqrt{1 - x^2}) - 2 \arcsin x$

657. $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$

5.2. Monotonie, extrémy, konvexnost a konkávnost

Vyšetřete monotonii následujících funkcí:

658. $f(x) = 2 + x - x^2$

659. $f(x) = 3x - x^3$

660. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

661. $f(x) = x \sqrt{1 - x^2}$

662. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + a}$ $(a > 0)$

663. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

664. $f(x) = x^2 - \ln x^2$

665. $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$

666. $f(x) = x^n e^{-x}$ $(n > 0, x \geqslant 0)$

667. $f(x) = \cosh^3 x + 1$

668. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$

669. $f(x) = x + \sin x$

670. $f(x) = x + |\sin 2x|$

671. $f(x) = e^x \cos x$

672. $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$, je-li $x > 0$

$f(0) = 0$

673. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(0 < x < \pi)$

674. $f(x) = x^x$

675. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

676. Dokažte, že každý polynom alespoň 1.stupně je funkce ostře monotonní v intervalech $(-\infty, -x_0)$ a $(x_0, +\infty)$, kde x_0 je dostatečně velké kladné číslo.

677. Dokažte, že každá racionální funkce, která není konstantní, je ostře monotonní v intervalech $(-\infty, -x_0)$ a $(x_0, +\infty)$, kde x_0 je dostatečně velké kladné číslo.

678. Dokažte, že funkce

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{2}{x} \quad , \text{je-li } x \neq 0 \ , \ f(0) = 0 \ ,$$

je rostoucí v bodě $x = 0$, ale není rostoucí v žádném okolí bodu $x = 0$.

V příkladech 679 až 705 nalezněte všechny body, v nichž má daná funkce lokální extrém.

679. $f(x) = 2 - x - x^2$

680. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

681. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 9$

682. $f(x) = a + (x - b)^4$

683. $f(x) = a + (x - b)^3$

684. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

685. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

686. $f(x) = (x - 4)^4 (x + 3)^3$

687. $f(x) = x^m (1 - x)^n \qquad (m,n \in N)$

688. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

689. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

690. $f(x) = x \sqrt[3]{x - 1}$

691. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x - 1)}$

692. $f(x) = x\, e^{-x}$

693. $f(x) = x^n e^{-x} \qquad (n \in N)$

694. $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

695. $f(x) = x \ln^2 x$

696. $f(x) = x^2 \ln x$

697. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

698. $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$

699. $f(x) = e^x \sin x$

700. $f(x) = |x|\, e^{-|x-1|}$

701. $f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!}\right) e^{-x} \qquad (n \in N)$

702. $f(x) = \sin 3x - 3 \sin x$

703. $f(x) = \arcsin \sin x$

704. $f(x) = \arccos \cos x$

705. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$

706. Rozhodněte, zda je pravdivé tvrzení:

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum, pak existuje kladné číslo δ tak, že v intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ funkce f roste a v intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ klesá.

Návod: uvažte funkci

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right) & \text{, je-li } x \neq 0 \\ 0 & \text{, je-li } x = 0 \end{cases} .$$

707. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{, je-li } x \neq 0 \\ 0 & \text{, je-li } x = 0 \end{cases}$$

má v bodě $x = 0$ lokální minimum, a funkce

$$g(x) = \begin{cases} x\, e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{, je-li } x \neq 0 \\ 0 & \text{, je-li } x = 0 \end{cases}$$

nemá v bodě $x = 0$ lokální extrém, přestože je $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in N$. Načrtněte grafy těchto funkcí.

V příkladech 708 až 719 nalezněte maximum a minimum dané funkce v uvedeném intervalu.

708. $f(x) = 2x^2 - 8x + 1 \quad , \quad \langle 1,4 \rangle$

709. $f(x) = |2x^2 - 8x + 1| \quad , \quad \langle 1,4 \rangle$

710. $f(x) = -3x^4 + 6x^2 \quad , \quad \langle -2,2 \rangle$

711. $f(x) = x - 2\sqrt{x} \quad , \quad \langle 0,4 \rangle$

712. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1} \quad , \quad \langle 0,4 \rangle$

713. $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} \quad , \quad \langle 0,1 \rangle$

714. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} \quad , \quad \langle 0,1 \rangle$

715. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x}{1 + x} \quad , \quad \langle 0,1 \rangle$

716. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2} \quad , \quad \langle \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \rangle$

717. $f(x) = x\, e^{-x} \quad , \quad \langle 0,+\infty)$

718. $f(x) = |x|\, e^{-|x-1|} \quad , \quad \langle -1,2 \rangle$

719. $f(x) = x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad (-\infty,+\infty)$

V příkladech 720 až 726 nalezněte supremum a infimum dané funkce v uvedeném intervalu.

720. $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$, $(1,4)$

721. $f(x) = |2x^2 - 8x + 1|$, $(1,4)$

722. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(-\infty,+\infty)$

723. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $(\frac{1}{100},100)$

724. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$, $(-\infty,+\infty)$

725. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$, $(0,+\infty)$

726. $f(x) = e^{-x}\cos x$, $(0,+\infty)$

Vyšetřete konvexnost , konkávnost a inflexní body následujících funkcí:

727. $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

728. $f(x) = 3x^2 - x^3$

729. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

730. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

731. $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$

732. $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^2}$

733. $f(x) = x + \sin x$

734. $f(x) = e^{-x^2}$

735. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

736. $f(x) = x \ln|x|$

737. $f(x) = x^3 \ln x + 1$

738. $f(x) = x \sin(\ln x)$

739. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

má tři inflexní body, které leží na jedné přímce.

5.3. Různé úlohy

Dokažte následující nerovnosti:

740. $e^x > 1 + x$, je-li $x \neq 0$

741. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, je-li $x > 0$

742. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, je-li $x > 0$

743. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, je-li $0 < x < \frac{\pi}{2}$

744. $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$, je-li $0 < x < \frac{\pi}{2}$

745. $x - \frac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x$, je-li $x > 0$

746. $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$, je-li $x > 0$

747. $(x^a + y^a)^{\frac{1}{a}} > (x^b + y^b)^{\frac{1}{b}}$, je-li $x > 0, y > 0, 0 < a < b$

748. $\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b - a}$ $(0 < a < b, n > 1)$

749. $\frac{1}{2}(a^n + b^n) > (\frac{a + b}{2})^n$ $(a > 0, b > 0, a \neq b, n > 1)$

750. $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$

751. $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}$ $(x, y > 0, x \neq y)$

V příkladech 752 až 762 stanovte počet reálných kořenů dané rovnice (v závislosti na parametru $a \in R$) a tyto kořeny separujte.

752. $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$

753. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x = a$

754. $x^4 - 4ax^3 - 2 = 0$

755. $2x^3 - 3ax^2 + 1 = 0$

756. $x^5 - 5x = a$

757. $x^2 - x - \ln x + a = 0$

758. $x^2 + x + e^{-x} + a = 0$

759. $6 \operatorname{arctg} x - x^3 + a = 0$

760. $x \ln x = a$

761. $\ln x = ax$

762. $e^x = ax^2$

763. Při jakých hodnotách parametrů a, b $(a > 1, b \in R)$ rovnice

$$a^x = bx$$

a) nemá reálné kořeny ; b) má právě jeden reálný kořen ; c) má dva reálné kořeny .

764. Zjistěte, za jakých podmínek má rovnice

$$x^3 + px + q = 0$$

a) právě jeden reálný kořen ; b) tři reálné kořeny .

V příkladech 765 až 767 nalezněte největší člen dané posloupnosti $(a_n)_{n \in N}$.

765. $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$

766. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 10^4}$

767. $a_n = \sqrt[n]{n}$

768. Pro daná čísla $\alpha, \beta, a \in R_+$ nalezněte největší hodnotu součinu α-té a β-té mocniny dvou kladných čísel, jejichž součet je roven a .

769. Pro daná čísla $\alpha, \beta, a \in R_+$ nalezněte nejmenší hodnotu součtu α-té a β-té mocniny dvou kladných čísel, jejichž součin je roven a .

770. Pro jaké základy logaritmů existuje číslo rovnající se svému logaritmu ?

771. Úsečku rozdělte na dvě části tak, aby součet obsahů čtverců sestrojených

nad oběma částmi byl minimální.

772. Ze všech obdélníků s daným obsahem určete ten, který má nejmenší obvod.

773. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků s daným součtem délek přepony a odvěsny určete ten, jehož obsah je největší.

774. Do elipsy s délkami poloos a, b vepište obdélník, jehož strany jsou rovnoběžné s osami elipsy a jehož obsah je maximální.

775. Určete bod elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tak, aby tečna k elipse sestrojená v tomto bodě vytvořila s osami souřadnic trojúhelník s minimálním obsahem.

776. Do trojúhelníku se základnou z a výškou v vepište obdélník s maximálním obvodem.

777. Do dané kruhové a) výseče, b) úseče se středovým úhlem $2\alpha \leq \pi$ vepište obdélník s maximálním obsahem.

778. Nalezněte bod A paraboly $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, který má od bodu $P = (p,p)$ ze všech bodů paraboly nejmenší vzdálenost a tuto vzdálenost vypočtěte.

779. Na parabole $y = x^2$ nalezněte bod, který je nejblíže k přímce $y = 2x - 4$.

780. Nalezněte nejdelší tětivu BM elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, je-li $B = (0,-b)$.

781. Nalezněte pravidelný čtyřboký hranol vepsaný do koule o poloměru R, jehož objem je maximální.

782. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním objemem.

783. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním povrchem.

784. Jaký je minimální objem kužele opsaného kouli o objemu V?

785. Jaký je maximální objem kužele vepsaného kouli o objemu V ?

786. Jaký je maximální objem kužele s danou stranou s ?

787. Při jakých rozměrech má válec daného objemu nejmenší povrch?

788. Do kužele s úhlem 2α u vrcholu (v osovém řezu) a poloměrem podstavy R vepište válec s maximálním povrchem.

789. Na podstavě válce o výšce v a poloměru r leží celou svou podstavou polokoule o poloměru r. Určete rozměry v a r tak, aby uvažované těleso mělo minimální povrch při daném objemu V.

790. Text na stránce knihy má pokrývat obdélník o obsahu S, přitom dolní i horní okraj má mít šířku a, levý a pravý okraj šířku b. Při jakém poměru šířky k výšce textu bude plocha celé stránky minimální?

791. Z papíru tvaru obdélníka se stranami a,b vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.

792. Jakou kruhovou výseč je nutno vystřihnout z papíru tvaru kruhu o poloměru R, aby kornout stočený ze zbylé části měl co největší objem?

793. Ze tří prken stejné šířky se má vyrobit žlab na vodu. Při jakém úhlu mezi bočními stěnami a vodorovnou rovinou bude mít žlab největší propustnost?

794. Příčný průřez kanálem má tvar rovnoramenného lichoběžníka. Kanál je naplněn vodou do výšky h, plošný obsah průřezu části kanálu naplněné vodou je S. Při jakém úhlu φ mezi bočními stěnami a vodorovnou rovinou bude minimální obsah ploch smáčených vodou?

795. Nádoba tvaru válce s tlouštkou stěn i dna c má mít objem V. Určete vnitřní rozměry (poloměr dna r a výšku h) nádoby tak, aby spotřeba materiálu na výrobu nádoby byla co nejmenší.

796. Dolní část okna má tvar obdélníka, horní tvar půlkruhu o poloměru daném

šířkou okna. Délka rámu celého okna je p. Při jakých rozměrech bude okno propouštět nejvíce světla?

797. Mezi dvěma neprotínajícími se koulemi o poloměrech r, R $(r < R)$ je na spojnici jejich středů umístěn bodový zdroj světla. Při jaké poloze tohoto zdroje bude součet povrchů osvětlených částí obou koulí největší?

798. V rovině se po každé ose souřadnic pohybuje hmotný bod, první rychlostí v_1 $[m/s]$, druhý rychlostí v_2 $[m/s]$. V okamžiku $t = 0$ se pohybují směrem k počátku souřadnic a jsou od něho vzdáleny a_1 $[m]$, resp. a_2 $[m]$. Ve kterém okamžiku bude vzdálenost bodů nejmenší?

799. Továrna je od přímé železniční tratě, procházející městem, vzdálena a [km], od města c [km]. Náklady na přepravu 1 tuny zboží činí na hlavní trati q Kčs na 1 km, na vlečce p Kčs na 1 km, $p > q$. Pod jakým úhlem k hlavní trati je třeba postavit vlečku do továrny, aby náklady na přepravu z továrny do města byly minimální?

800. Někdo se potřebuje v co nejkratším čase dostat z místa A do místa B; vzdálenost těchto míst je c. Může jít buď celou cestu pěšky rychlostí v_1 nebo část cesty jet autem rychlostí $v_2 > v_1$ po přímé silnici, která prochází místem A ve vzdálenosti b od místa B. V jaké vzdálenosti od A musí cestující opustit silnici?

801. Do řeky šířky a je pod pravým úhlem přiveden plavební kanál šířky b. Jaká je maximální délka klády, kterou je možno splavit kanálem do řeky?

5.4. L´Hospitalovo pravidlo

S použitím l´Hospitalova pravidla vypočtěte následující limity:

802. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $\quad (a, b \in R, b \neq 0)$

803. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ 804. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^2}$

805. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

806. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$

807. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$

808. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$

809. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\ln(1 - x)}$

810. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(1 - x) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{cotg} \pi x}$

811. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ $(a, b \in R, b \neq 0)$

812. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ $(a, b \in R, b \neq 0)$

813. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

814. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{e^{bx}}$ $(a, b \in R_+)$

815. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a}$ $(a \in R_+)$

816. $\lim\limits_{x \to 0_+} x^a \ln x$ $(a \in R_+)$

817. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^a}$ $(a \in R_+)$

818. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$

819. $\lim\limits_{x \to 1} \sin(x - 1) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

820. $\lim\limits_{x \to 1_-} \ln x \cdot \ln(1 - x)$

821. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln^3 x)$

822. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{x} \right)$

823. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

824. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x} \right)$

825. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x \right)$

826. $\lim\limits_{x \to 0_+} x^x$

827. $\lim\limits_{x \to 0_+} x^{x^x} - 1$

828. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

829. $\lim\limits_{x \to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$

830. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$

831. $\lim\limits_{x\to 0_+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$

832. $\lim\limits_{x\to 0_+} (\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}}$

833. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\, x)^{2x-\pi}$

834. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}\, x\right)^x$

835. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

836. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

837. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

838. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

839. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

840. Vyšetřete diferencovatelnost funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{pro } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

v bodě $x = 0$.

841. Nalezněte asymptotu křivky

$$y = \frac{x^{1+x}}{(x + 1)^x} .$$

842. Vyšetřete možnost použití l´Hospitalova pravidla k výpočtu následujících limit:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}$

5.5. Taylorův vzorec

843. Vyjádřete polynom

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$$

v mocninách dvojčlenu $x - 2$.

844. Pro polynom

$$p(x) = x^4 + 4x^2 - x + 3$$

sestrojte Taylorův polynom 2.stupně v mocninách dvojčlenu $x - 1$ a vypočtěte zbytek v Taylorově vzorci pro a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 2$.

845. Dokažte, že pro funkce e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ ($\alpha \in R$) existují Taylorovy polynomy T_m se středem v bodě $a = 0$ pro každé $m \in N_0$ a mají následující tvar :

$$e^x \quad : \quad T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x \quad : \quad T_{2n-1}(x) = T_{2n}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x \quad : \quad T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) \quad : \quad T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^\alpha \quad : \quad T_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

846. Sestrojte všechny Taylorovy polynomy se středem v uvedeném bodě **a** pro funkce :

a) $f(x) = \ln(b + x)$ $(b > 0)$, $a = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 3$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = 0$ (použijte cvičení 614 a)).

V příkladech 847 až 860 sestrojte pro danou funkci Taylorův polynom pro uvedený střed a a stupeň n :

847. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $a = 2$, $n = 3$

848. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $n = 3$

849. $f(x) = \dfrac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$, $a = 0$, $n = 4$

850. $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$, $a = 0$, $n = 3$

851. $f(x) = b \cosh \dfrac{x}{b}$ $(b > 0)$, $a = 0$, $n = 2$

852. $f(x) = e^{2x - x^2}$, $a = 0$, $n = 5$

853. $f(x) = e^{\sin x}$, $a = 0$, $n = 4$

854. $f(x) = \ln (1 + e^x)$, $a = 0$, $n = 4$

855. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$, $a = 0$, $n = 13$

856. $f(x) = \sin (\sin x)$, $a = 0$, $n = 3$

857. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $n = 5$

858. $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$, $n = 3$

859. $f(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$ $a = 0$, $n = 6$

860. $f(x) = x^x - 1$, $a = 1$, $n = 3$

861. Odhadněte absolutní hodnotu chyby r v přibližném vyjádření následujících funkcí v daných intervalech:

a) $e^x \doteq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

b) $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6}$, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

c) $\operatorname{tg} x \doteq x + \frac{x^3}{3}$, $-\frac{1}{10} \leqslant x \leqslant \frac{1}{10}$

d) $\sqrt{1 + x} \doteq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

e) $\sqrt[3]{1 + x} \doteq 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

862. Pro jaká x je absolutní hodnota chyby přibližného vyjádření následujících funkcí menší než 10^{-4} :

a) $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6}$ b) $\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$

c) $\ln (1 + x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$

863. Dokažte vzorec

$$\sqrt[n]{a^n + b} = a + \frac{b}{n\, a^{n-1}} - r \qquad (n \geqslant 2, a > 0, b > 0) ,$$

kde $0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n-1}}$ a s jeho užitím vypočtěte přibližně :

$\sqrt[5]{245}$, $\sqrt[7]{129}$, $\sqrt[9]{515}$, $\sqrt[10]{1027}$.

864. Vypočtěte přibližně následující hodnoty tak, aby chyba, které se dopustíte, byla v absolutní hodnotě menší než 10^{-3} :

a) $\sin 1$; b) $\sin 1^{\circ}$; c) $\sqrt{e}$; d) $\sqrt[5]{33}$; e) $\sqrt[12]{4000}$;

f) $(1,1)^{1,2}$; g) $\ln 1,05$.

865. Vypočtěte číslo e s přesností na 7 desetinných míst.

866. Vypočtěte číslo π s přesností na 8 desetinných míst (užijte vzorec $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, viz př. 114).

S užitím Taylorova vzorce vypočítejte následující limity :

867. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 + x^4}$

868. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

869. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

870. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$

871. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x \right)$

872. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$

873. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$

874. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$

6. Vyšetřování průběhu funkcí a křivek

6.1. Průběhy funkcí

Vyšetřete průběh a sestrojte graf následujících funkcí :

875. $f(x) = 3x - x^3$

876. $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$

877. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11$

878. $f(x) = 10x - 5x^3 + x^5$

879. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

880. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

881. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

882. $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

883. $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

884. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$

885. $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$

886. $f(x) = \frac{x}{3 - x^2}$

887. $f(x) = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$

888. $f(x) = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$

889. $f(x) = \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)^4$

890. $f(x) = \frac{x^2(x - 1)}{(x + 1)^2}$

891. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$

892. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$

893. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x - 1)^2}$

894. $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$

895. $f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

896. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$

897. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

898. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

899. $f(x) = (x + 1)^3 \sqrt[3]{x^2}$

900. $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2} + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

901. $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

902. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

903. $f(x) = \dfrac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$

904. $f(x) = \dfrac{|1 + x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$

905. $f(x) = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{x + 3}}$

906. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x + 1}}$

907. $f(x) = \sin^2 x$

908. $f(x) = \sin x^2$

909. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

910. $f(x) = x + \sin x$

911. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$

912. $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$

913. $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$

914. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$

915. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

916. $f(x) = \arcsin (\sin x)$

917. $f(x) = \arccos (\cos x)$

918. $f(x) = \mathrm{arctg}\, (\mathrm{tg}\, x)$

919. $f(x) = \mathrm{arccotg}\, (\mathrm{cotg}\, x)$

920. $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$

921. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$

922. $f(x) = \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{x}$

923. $f(x) = \mathrm{arccotg}\, \dfrac{1}{x}$

924. $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$

925. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$

926. $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$

927. $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

928. $f(x) = \arccos \dfrac{1 - x}{1 - 2x}$

929. $f(x) = e^{-x} \sin x$

930. $f(x) = e^{-x^2}$

931. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ **pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$**

932. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

933. $f(x) = x + e^{-x}$

934. $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$

935. $f(x) = x \ln x$

936. $f(x) = x^2 \ln x$

937. $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$

938. $f(x) = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

939. $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

6.2. Průběhy křivek

Vyšetřete průběh a sestrojte graf následujících křivek :

940. $x = \dfrac{(t + 1)^2}{4}$, $y = \dfrac{(t - 1)^2}{4}$

941. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

942. $x = \dfrac{2 + t^2}{1 + t^2}$, $y = t - \dfrac{t}{1 + t^2}$

943. $x = \dfrac{t^2}{1 - t^2}$, $y = \dfrac{1}{1 + t^2}$

944. $x = \dfrac{t^2}{t - 1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$

945. $x = \dfrac{t}{1 - t^2}$, $y = \dfrac{t(1 - 2t^2)}{1 - t^2}$

946. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$

947. $x = a \cos 2t \quad , \quad y = a \cos 3t \qquad (a > 0)$

948. $x = \cos^4 t \quad , \quad y = \sin^4 t$

949. $x = t \ln t \quad , \quad y = \dfrac{\ln t}{t}$

950. $x = a(t - \sin t) \quad , \quad y = a(1 - \cos t) \qquad (a > 0)$

951. $x = a(\sinh t - t) \quad , \quad y = a(\cosh t - 1) \qquad (a > 0)$

952. $x = a \cos^3 t \quad , \quad y = a \sin^3 t \qquad (a > 0)$

953. $r = a + b \cos \varphi \qquad (0 < a \leq b)$

954. $r = a \sin 3\varphi \qquad (a > 0)$

955. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \qquad (a > 0)$

956. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

---

957. $x^3 + y^3 = 3x^2$

958. $y^2 = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

959. $y^2 = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

960. $y^2 = x^4(x - 1)$

961. $y^2 = x^3 - 2x^2 + x$

962. $y^2 = x^2 \dfrac{1 - x}{(1 + x)^2}$

963. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2) \qquad (a > 0)$

964. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (a > 0)$

965. $x^3 + y^3 = 3axy \qquad (a > 0)$

966. $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 16(x^2 + y^2)$

967. $(x^2 + y^2 - 6x)^2 = x^2 + y^2$

968. $(x^2 + y^2)^3 = 27x^2y^2$

969. $(x^2 + y^2)^2 = xy$

970. $x^4 + y^4 = 8xy^2$

971. $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

972. $(x^2 - y^2)^2 = 2x$

973. $x^2(x - y)^2 + y = 0$

974. $x^3y^3 = x - y$

975. $x^2y^2 + x - 2y = 0$

976. $xy(x - y) + x + y = 0$

977. $x^4 - y^4 + xy = 0$

978. $x^2(x^2 + y^2) = 4(x - y)^2$

979. $xy(x + y) + x^2 = 2y^2$

980. $x^4 - y^4 = 4x^2y$

981. $x^5 + y^5 = xy^2$

982. $x^6 + 2x^3y - y^3 = 0$

983. $x^y = y^x$

Výsledky

1. $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0,\sqrt{3}\rangle$. 2. $\langle -1,1)$. 3. a) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; b) $(2,+\infty)$. 4. $\bigcup_{k=0}^{\infty} \langle 4k^2\pi^2 ,(2k+1)^2\pi^2\rangle$. 5. $\langle -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\rangle \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \langle \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}, \sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}\rangle \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \langle -\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}, -\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}\rangle$.

6. $(1,+\infty)\cup \bigcup_{k\in Z-\{0\}} (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$. 7. $\bigcup_{k=0}^{\infty}(k,k+1)$.

8. $\bigcup_{k\in Z} \langle k\pi+\frac{\pi}{4}, k\pi+\frac{\pi}{2})$. 9. $\langle -\frac{1}{3},1\rangle$. 10. $\bigcup_{k\in Z} \langle k\pi-\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{\pi}{6}\rangle$. 11. $R_- - Z$. 12. (e,∞). 13. $\langle -1,2\rangle$, $\langle 0,\frac{3}{2}\rangle$.

14. $(2,3)$, $(-\infty,-\ln 4\rangle$. 15. $\bigcup_{k\in Z}(\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5}{3}\pi+2k\pi)$, $(-\infty,\ln 3\rangle$.

16. R, $\langle 0,\pi\rangle$. 17. $\langle -1,1\rangle$, $\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$. 18. $\langle 0,2\rangle$, $\langle 1,2^{\pi}\rangle$.
19. $\langle 0,4)$. 20. $\langle 0,3\rangle$. 21. $(-1,2)$. 22. $(0,\frac{1}{2})$.
23. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. 24. $(0,\frac{1}{2}\rangle$. 25. $a=\frac{7}{3}$, $b=-2$. 26. $a=\frac{7}{6}$, $b=\frac{17}{6}$, $c=1$. 27. $a=\frac{10}{3}$, $b=-\frac{7}{2}$, $c=-\frac{29}{6}$, $d=2$. 28. $f(x)=10+5.2^x$.

32. $f(f(x))=x^4$, $g(g(x))=\sqrt[4]{x}$, $f(g(x))=x$ $(x\geq 0)$, $g(f(x))=|x|$.
33. $f(f(x))=x^4$, $g(g(x))=2^{2^x}$, $f(g(x))=2^{2x}$, $g(f(x))=2^{x^2}$. 34. $f(f(x))=x^4$, $g(g(x))=x$, $f(g(x))=(1-x)^2$, $g(f(x))=1-x^2$. 35. $f(f(x))=\mathrm{sgn}\,x$, $g(g(x))=x$ $(x\neq 0)$, $f(g(x))=g(f(x))=\mathrm{sgn}\,x$ $(x\neq 0)$. 36. $f(f(x))=f(x)$, $g(g(x))=f(g(x))=0$ pro všechna $x\in R$, $g(f(x))=g(x)$. 37. $f(f(x))=\frac{x-1}{x}$ $(x\neq 1)$, $f(f(f(x)))=x$ $(x\neq 0, x\neq 1)$. 38. $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 39. x^2-5x+6.

40. $\frac{1+\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{sgn}\,x}{x}$ $(x\neq 0)$. 41. x^2-2 $(|x|\geq 2)$. 56. Pro $a>0$ roste v R, pro $a<0$ klesá v R. 57. Pro $a>0$ klesá v $(-\infty,-\frac{b}{2a})$, roste v $(-\frac{b}{2a},+\infty)$; pro $a<0$ roste v $(-\infty,-\frac{b}{2a})$, klesá v $(-\frac{b}{2a},+\infty)$.
58. Roste v R. 59. Roste v R_{+0}. 60. Klesá v R_- a v R_+. 61. Klesá v R_{-0}, roste v R_{+0}. 62. Pro $ad-bc>0$ (<0) roste (klesá) v $(-\infty,-\frac{d}{c})$ a

v $(-\frac{d}{c},+\infty)$. 63. Pro $a\in(0,1)$ klesá v R , pro $a>1$ roste v R. 64. Pro $a\in(0,1)$ klesá v R_+ , pro $a>1$ roste v R_+. 65. Roste v R. 66. Sudá. 67. Sudá. 68. Lichá. 69. Sudá. 70. Lichá. 71. Lichá. 72. Sudá. 73. Lichá. 74. Lichá. 75. Není sudá ani lichá.

78. $T=\frac{2\pi}{\lambda}$. 79. $T=2\pi$. 80. Neperiodická. 81. $T=\pi$. 82. Neperiodická. 83. $T=6\pi$. 84. $T=\pi$. 85. Neperiodická. 86. Neperiodická.

87. Periodická; periodou je libovolné kladné racionální číslo. 89. Pro $a=0$ neexistuje; pro $a\neq 0$ je $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$. 90. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}+1$ $(x\in R)$.

91. f^{-1} neexistuje; definujeme-li však funkce $f_1(x)=f(x)$ pro $x\in(-\infty,0\rangle$ a $f_2(x)=f(x)$ pro $x\in\langle 0,+\infty)$, je $f_1^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$ $(x\geq 1)$ a $f_2^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$ $(x\geq 1)$.

92. $f^{-1}(x)=f(x)$ $(x\neq -1)$. 93. $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}e^x$ $(x\in R)$. 94. $f^{-1}(x)=\log_2 x^2$ $(x\in R_+)$. 95. Pro $ad=bc$ neexistuje; pro $ad\neq bc$ je $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

96. $f^{-1}(x)=x-\left[\frac{x}{2}\right]$ $(x\in\bigcup_{k\in Z}\langle 2k,2k+1))$. 97. $f^{-1}(x)=\operatorname{argsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $(x\in R)$. 98. f^{-1} neexistuje; definujeme-li však funkce $f_1(x)=f(x)$ pro $x\in(-\infty,0\rangle$ a $f_2(x)=f(x)$ pro $x\in\langle 0,+\infty)$, je $f_2^{-1}(x)=\operatorname{argcosh} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x\geq 1)$ a $f_1^{-1}(x)=-\operatorname{argcosh} x=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ $(x\geq 1)$. 99. $f^{-1}(x)=\operatorname{argtgh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(x\in(-1,1))$.

100. $f^{-1}(x)=\operatorname{argcotgh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ $(x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty))$. 101. $f^{-1}=f$.

120. $x\in\langle\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\rangle$. 121. $x\in\langle\frac{1}{2},1\rangle$. 122. $x\geq 1$. 123. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

124. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 125. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 126. $-\frac{\pi}{2}$ pro $x\in\langle -1,0\rangle$, $2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$ pro $x\in\langle 0,1\rangle$. 127. 0 pro $|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pi\operatorname{sgn} x-4\arcsin x$ pro $|x|\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

128. $\frac{3}{2}\pi$. 129. π. 130. $f(x)=2x-x^2$ $(x\in R)$. 131. $f(x)=x^2-2$ $(x\in(-\infty,-2\rangle\cup\langle 2,+\infty))$. 132. $f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(x\in\langle -a,a\rangle)$, $f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(x\in\langle -a,a\rangle)$. 133. $f(x)=b-\frac{b}{a}x$ $(x\in\langle 0,a\rangle)$. 134. $f_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ $(x\geq a)$, $f_2(x)=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ $(x\geq a)$. 135. $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ $(x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$.

136. $f_1(x)=\arccos(1-x)-\sqrt{2x-x^2}$ $(x\in\langle 0,2\rangle)$, $f_2(x)=2\pi-f_1(x)$ $(x\in\langle 0,2\rangle)$.

187. a) -8 ; b) neexistuje ; c) $+\infty$; d) $-\infty$. 188. 6. 189. $-\frac{5!}{6^5}$.

190. $(\frac{3}{2})^{20}$. 191. $-\frac{3}{2}$. 192. $\frac{1}{3}$. 193. $\frac{1}{4}$. 194. a) $+\infty$; b) neexistuje . 195. $\frac{1}{2}nm(n-m)$. 196. n. 197. $\frac{n(n+1)}{2}$. 198. $\frac{m}{n}$.

199. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. 200. $\frac{n(n+1)}{2}$. 201. $\frac{m-n}{2}$. 202. $\frac{4}{3}$. 203. $\frac{1}{2}$.

204. -2. 205. 2. 206. $\frac{1}{6}$. 207. $\frac{3}{2}$. 208. $\frac{112}{27}$. 209. $\frac{1}{2}$.

210. $\frac{1}{n}$. 211. $\frac{2\sqrt[n]{a}}{n\,a}$. 212. $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$. 213. $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$. 214. $\frac{n}{m}$.

215. $\frac{1}{n!}$. 216. $\frac{2(n-1)}{n-2}$ pro $n \neq 2$; neexistuje pro $n=2$. 217. a) 1 ; b) -1. 218. a) 1 ; b) 1. 219. a) $\frac{1}{2}$; b) $+\infty$. 220. a) 1 ; b) -1.

221. 1. 222. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 223. $\frac{1}{2}$. 224. 1. 225. $\frac{2}{3}$. 226. 2.

227. 2^n. 228. $2n$. 229. $\alpha = 1$, $\beta = -1$. 230. $\alpha_i = \mp 1$, $\beta_i = \pm \frac{1}{2}$ $(i=1,2)$. 231. $\alpha = -1$, $\beta = 0$. 232. 5. 233. $\frac{2}{3}$. 234. $\frac{\alpha}{\beta}$.

235. $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. 236. 0. 237. $\frac{1}{2}$. 238. $\frac{1}{4}$. 239. 1.

240. $\frac{1}{3}$. 241. $\frac{1}{2}$. 242. 1. 243. $\frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$. 244. $\frac{1}{2}$.

245. $\frac{2}{\pi}$. 246. 0. 248. $\cos a$. 249. $-\sin a$. 250. $\frac{1}{\cos^2 a}$.

251. $-\frac{1}{\sin^2 a}$. 252. $2\cos a$. 253. $-\sin a$. 254. $-\cos a$.

255. $\frac{3}{2}\sin 2a$. 256. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 257. -24. 258. -3.

259. $\frac{3}{4}$. 260. $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. 261. a) 5 ; b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 262. $\frac{1}{4}$.

263. $\frac{4}{3}$. 264. $-\frac{1}{12}$. 265. $\sqrt{2}$. 266. 0. 267. $\frac{3}{2}$. 268. 3.

269. a) $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 1. 270. a) 0 ; b) 1. 271. a) 0 ; b) $+\infty$.

272. a) 1 ; b) 1 ; c) 1 ; d) $\frac{1}{e^2}$. 273. a) e ; b) 1 ; c) $+\infty$.

274. a) $\frac{1}{e^3}$; b) 1 ; c) neexistuje. 275. e^{2a}. 276. 0, je-li $a<c$; $+\infty$, je-li $a>c$; $e^{\frac{b-d}{a}}$, je-li $a=c$. 277. $\frac{1}{e}$. 278. 1. 279. $\sqrt{e}$.

280. $e^{\operatorname{cotg} a}$. 281. $e^{\frac{3}{2}}$. 282. $\frac{1}{e}$. 283. 1. 284. e.

285. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 286. e. 287. 1. 288. 0. 289. $-\ln 2$.

290. $\frac{1}{a}$. 291. $\frac{1}{10}\log_{10} e$. 292. $-\frac{\log_{10} e}{a^2}$. 293. $\frac{2a}{b}$.

294. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 295. 0. 296. α. 297. $\frac{1}{5}$. 298. $\frac{3}{2}$. 299. $\frac{\alpha}{\beta}$.

300. a) 1 ; b) 0. 301. a) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$; b) 0. 302. $\frac{1}{2}$. 303. $\ln 8$.

304. 1. 305. $2\ln a$. 306. e^2. 307. $\alpha - \beta$. 308. 1.

309. -2. 310. e^2. 311. $\ln a - \ln b$. 312. $\frac{2}{3}$. 313. $\frac{\alpha}{\beta}\,a^{\alpha-\beta}$.

(314.) $a^b \ln a$. (315.) $a^b \ln^2 a$. (316.) $a^a \ln \frac{a}{e}$. (317.) $a^a \ln ae$.
(318.) $\frac{1}{e^{a+b}}$. (319.) $\sqrt[3]{abc}$. (320.) $(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$. (321.) a) 1 ; b) $\frac{1}{2}$;
c) 1 . (322.) a) $\cosh a$; b) $\sinh a$. (323.) -1 . (324.) $\ln 2$.
(325.) 1 . (326.) $2 \sinh \frac{1}{2}$. (327.) $\frac{\pi}{2}$. (328.) $\frac{\pi}{3}$. (329.) a) $-\frac{\pi}{4}$;
b) $\frac{\pi}{4}$. (330.) a) $\frac{3}{4}\pi$; b) $\frac{\pi}{4}$. (331.) a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$. (332.) $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$.
(333.) $\frac{1}{1+a^2}$. (334.) 2 . (335.) $\frac{1}{2}$. (336.) 1 . (337.) x . (338.) 1 .
(339.) $e^{-\frac{1}{2}x^2}$. (340.) $-\frac{\pi^2}{2}$. (341.) e^2 . (342.) 1 . (343.) e^{π^2} .
(344.) $\ln a$. (345.) $(\ln a)^2$. (346.) $\ln a$. (347.) $b^{\frac{1}{a}}$. (348.) $\sqrt{ab}$.
(349.) $\sqrt[m]{a_1 . a_2 . \; \dots \; . a_m}$. (350.) 1 , je-li $0 < a \leq 1$; a , je-li $a > 1$.
(351.) 1 , je-li $0 < a \leq 1$; a , je-li $1 < a < 2$; $\frac{a^2}{2}$, je-li $a \geq 2$. (352.) 0 , je-li $0 < a < 2$; $2\sqrt{2}$, je-li $a=2$; a^2 , je-li $a > 2$. (353.) $\ln 2$, je-li $0 < a \leq 2$; $\ln a$, je-li $a > 2$. (354.) 0 . (355.) $e^{\frac{2}{\pi}}$. (356.) 1 . (357.) 0 .

(358.) Spojitá v R. (359.) Spojitá v $R-\{0\}$; pro $x=0$ nespojitost 1.druhu .

(360.) Spojitá v $R-Z$; pro $x \in Z$ nespojitost 1.druhu . (361.) Spojitá v $R_{+0} - \{n^2 \mid n \in N\}$; pro $x=n^2$ nespojitost 1.druhu . (362.) Spojitá v $R-\{-1\}$; pro $x=-1$ odstranitelná nespojitost . (363.) Spojitá v $R_+ - \{1\}$; pro $x=1$ nespojitost 2. druhu . (364.) Spojitá v $R-\{0\}$; pro $x=0$ odstranitelná nespojitost .

(365.) Spojitá v $R-\{k\pi \mid k \in Z\}$; pro $x=0$ odstranitelná nespojitost, pro $x=k\pi$ $(k \neq 0)$ nespojitost 2.druhu . (366.) Viz 359. (367.) Viz 364. (368.) Spojitá v $R-\{0\}$; pro $x=0$ nespojitost 2.druhu . (369.) Viz 364. (370.) Viz 364.

(371.) Viz 368. (372.) Spojitá v $R-(\{\frac{1}{k} \mid k \in Z-\{0\}\} \cup \{0\})$; pro $x=\frac{1}{k}$ nespojitost 1.druhu, pro $x=0$ nespojitost 2.druhu . (373.) Viz 372, ale pro $x=0$ odstranitelná nespojitost . (374.) Spojitá v $R-\{k\pi \mid k \in Z\}$; pro $x=k\pi$ nespojitost 1.druhu .

(375.) Viz 372. (376.) Spojitá v $R-(\{\pm\frac{1}{\sqrt{k}} \mid k \in N\} \cup \{0\})$; pro $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ nespojitost 1.druhu, pro $x=0$ nespojitost 2.druhu . (377.) Spojitá v $R-(\{\frac{2}{(2k+1)\pi} \mid k \in Z\} \cup \{0\})$; pro $x=0$ i pro $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ nespojitost 2.druhu .

(378.) Spojitá v $R-\{0,1\}$; pro $x=0$ nespojitost 2.druhu, pro $x=1$ nespojitost 1.druhu . (379.) Spojitá v $R-(\{\frac{2}{2k+1} \mid k \in Z\} \cup \{0\})$; všechny body nespojitosti odstranitelné . 380. Viz 359. 381. Spojitá v R_+ ; pro $x=0$ odstranitelná nespojitost . 382. Viz 368. 383. Spojitá v $R-\{(2k+1)\pi \mid k\in Z\}$; pro $x=(2k+1)\pi$ nespojitost 1.druhu . 384. Spojitá v $(R-Z)\cup\{1\}$; pro $x\in Z-\{1\}$ nespojitost 1.druhu . 385. Nespojitá pro libovolné $x\in R$; pro $x\in Z$ spojitá zprava . 388. Spojitá pro $x=0$ a $x\in R_+-Q$, jinak nespojitá . 389. a) s nespojitá v a , p může být jak spojitá tak nespojitá v a ; b) s i p mohou být jak spojité tak nespojité v bodě a . 390. Ano. 393. Ano. 394. Ne.

395. Ano. 396. Ano. 397. Ne. 398. Ano. 399. Ne.

400. Ano. 401. Ano. 402. Ano. 407. $\frac{8}{3}x^3-2$. 408. x^2+x-2 .

409. $-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}$. 410. $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$. 411. $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$. 412. $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$. 413. $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

414. $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. 415. $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$. 416. $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. 417. $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. 418. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

419. $\frac{\sqrt{x}\,(19x^5+27)}{6\sqrt[3]{(x^5+3)^2}}$. 420. $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$. 421. $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

422. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. 423. $-2\cos x\,(1+2\sin x)$.

424. $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$. 425. $\sin 2x$.

426. $\frac{2\sin x\,(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2 x^2}$. 427. $\frac{2}{\sin^2 x}$.

428. $1+\operatorname{tg}^6 x$. 429. $-2xe^{-x^2}$. 430. $\frac{-2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$.

431. $2^{\sqrt{\sin^2 x}}\ln 2 \,.\, \cos x \,.\, \operatorname{sgn}\sin x$. 432. $3^{2^x} . 2^x . \ln 3 . \ln 2$.

433. x^2e^x . 434. $\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,e^x$. 435. $\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin bx$.

436. $e^x(1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}}))$. 437. $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}(1+x)$. 438. $f(x)(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x})$.

439. $a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x a^{a^x}\ln^2 a$. 440. $\frac{1}{x}$.

441. $\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}$. 442. $\frac{x}{x^4-1}$. 443. $\frac{a}{x\ln bx}$.

444. $-\dfrac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(1+x\ln\frac{1}{x})\,(1+x\ln(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}))}$. **445.** $\dfrac{6\log_{10}^2 x^2}{x\ln 10}$.

446. $\dfrac{1}{x\ln 2\cdot\ln 2x}$. **447.** $-\dfrac{\log_x^2 e}{x}$. **448.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

449. $\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$. **450.** $\sqrt{x^2+a^2}$. **451.** $\dfrac{1}{\sin x}$. **452.** $\dfrac{1}{\cos x}$.

453. $-\dfrac{1}{\cos x}$. **454.** $2\sin\ln x$. **455.** $\sin x\cdot\ln \operatorname{tg} x$.

456. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **457.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. **458.** $\dfrac{2ax}{x^4+a^2}$. **459.** $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$.

460. $\dfrac{1}{x^2+2}$. **461.** $\dfrac{1}{2+2x^2}$. **462.** $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$.

463. $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$. **464.** $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. **465.** 1 .

466. $\dfrac{\cos x\,.\,2\operatorname{sgn}\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. **467.** $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$. **468.** $\dfrac{1}{1+x^2}$.

469. 1 . **470.** $-\dfrac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$. **471.** $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$. **472.** $\dfrac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$.

473. $\sqrt{a^2-x^2}$. **474.** $\dfrac{1}{1+x^4}$. **475.** $\arcsin^2 x$. **476.** $\dfrac{\arccos x}{x^2}$.

477. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **478.** $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. **479.** $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

480. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. **481.** $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. **482.** $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}(\frac{1}{x}+\ln x+$
$+\ln^2 x)$. **483.** $x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}(\frac{1}{x}+\ln a\ln x)+x^x a^{x^x}(1+\ln x)\ln a$.

484. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. **485.** $(\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}\,\dfrac{\ln x-1}{x^2}$. **486.** $(\sin x)^{1+\cos x}$
$(\operatorname{cotg}^2 x-\ln\sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x)$. **487.** $\dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}$
$(x-2\ln^2 x+x\ln x\ln\ln x)$. **488.** $\cosh x$. **489.** $\sinh x$. **490.** $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

491. $-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$. **492.** $(1+\dfrac{1}{2\sinh x})\operatorname{tgh}^3 x$. **493.** $-\dfrac{2}{\sinh^3 x}$.

494. $\dfrac{1}{\cosh 2x}$. **495.** $\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\cosh x}$. **496.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **497.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

498. $f'(x)=\operatorname{sgn} x$ pro $x\neq 0$; $f'_{\pm}(0)=\pm 1$. **499.** $f'(x)=2|x|$. **500.** $f'(x)=$
$=0$ pro $x\neq 0$; $f'(0)=+\infty$. **501.** $f'(x)=0$ pro $x\neq k, k\in Z$; $f'_{-}(k)=+\infty$, $f'_{+}(k)=0$.

502. $f'(x)=k$ pro $x\in(k,k+1), k\in Z$; $f'_+(k)=k$, $f'_-(k)=+\infty.\mathrm{sgn}\, k$ $(k\neq 0)$, $f'_-(0)=-1$. 503. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{sgn}\, x}{1+x^2}$ pro $x\neq 0$; $f'_\pm(0)=\pm 1$. 504. $f'(x)=\cos(x+k\pi)$ pro $x\in(k\pi,(k+1)\pi), k\in Z$; $f'_\pm(k\pi)=\pm 1$. 505. $f'(x)=\frac{3}{2}|\sin x|\sin 2x$.

506. $f'(x)=\mathrm{sgn}\cos x$ pro $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$; $f'_\pm(\frac{\pi}{2}+k\pi)=\mp(-1)^k$.

507. $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ pro $|x|>1$; $f'_\pm(\pm 1)=\pm\infty$. 508. $f'(x)=\dfrac{2\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)}{1+x^2}$ pro $|x|\neq 1$; $f'_\pm(1)=\mp 1$, $f'_\pm(-1)=\pm 1$. 509. $f'(x)=\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ pro $x\neq 0$; $f'_\pm(0)=\pm 1$.

510. $f'(x)=\dfrac{\mathrm{sgn}\,(|x|-1)}{x}$ pro $|x|\neq 1$; $f'_\pm(x)=\pm 1$ pro $|x|=1$. 511. $f'(x)=\dfrac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$ pro $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$, $k\in N_0$; $f'_\pm(0)=\pm 1$, $f'(\pm\sqrt{2k\pi})=\pm\infty$, $f'(\pm\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty$ $(k\in N)$. 512. $f'(x)=\pi[x]\cos\pi x$ pro $x\neq k, k\in Z$; $f'_-(k)=(-1)^k\pi(k-1)$, $f'_+(k)=(-1)^k\pi k$. 513. $f'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$. 514. $f'(x)=(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x})\,\mathrm{sgn}\cos\frac{\pi}{x}$ pro $x\neq 0, x\neq\frac{2}{2k+1}$, $k\in Z$; $f'_\pm(0)$ neexistují , $f'_\pm(\frac{2}{2k+1})=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$. 515. $f'(x)=(2x\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x})\,\mathrm{sgn}\cos\frac{\pi}{x}$ pro $x\neq 0$, $x\neq\frac{2}{2k+1}$, $k\in Z$; $f'(0)=0$, $f'_\pm(\frac{2}{2k+1})=\pm\pi$. 516. a) $\alpha>0$; b) $\alpha>1$; c) $\alpha>2$.

517. a) $\alpha>1$; b) $\alpha\geq\beta+1$. 521. $1000!$. 523. $3x^2+15$. 524. $6x^2$.

527. a) Ano, např. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{pro } x\neq 0\\ 0 & \text{pro } x=0\end{cases}$, $g(x)=|x|$; b) Ano . 528. a) Ano, např. $f(x)=x$, $g(x)=|x|$; b) Ano, např. $f(x)=g(x)=|x|$. 529. a) Ano, např. $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$; b) Ano, např. $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$; c) Ano, např. $f(x)=2x+|x|$, $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$. 530. $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

531. $\dfrac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$.

532. $\dfrac{n\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$. 533. $\frac{1}{2^n}\mathrm{cotg}\,\frac{x}{2^n}-\mathrm{cotg}\,x$.

534. $\frac{3(t+1)}{2}$. 535. $\dfrac{\sqrt[6]{(1-\sqrt{t})^4}}{\sqrt{\sqrt[3]{t}\,(1-\sqrt[3]{t})}}$ $(t\neq 1)$. 536. $\frac{t}{2}$. 537. -1 .

538. $-\frac{b}{a}$ cotg t $(t\neq 0)$. 539. $\frac{b}{a}$ cotgh t $(t\neq 0)$. 540. $-\text{tg } t$ $(t\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,$ $k\in Z)$. 541. cotg $\frac{t}{2}$ $(t\neq 2k\pi, k\in Z)$. 542. tg t tg $(t+\frac{\pi}{4})$ $(t\neq \frac{\pi}{4}+k\pi,$ $t\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z)$. 543. sgn t $(t\neq 0)$. 544. $y=-7x+3$, $y=\frac{1}{7}x+\frac{71}{7}$.

545. $y=5$, $x=-2$. 546. $x=0$, $y=0$. 547. $y=x-1$, $y=-x+1$.

548. a) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$, $y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; b) $y=3$, $x=2$; c) $x=3$, $y=0$.

549. a) $\frac{1}{2}$, b) 0 . 550. a) $y=\frac{3}{2}x$, $y=-\frac{2}{3}x$; b) $y=3x-1$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

551. $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. 552. a) $y=0$, $x=0$; b) $(\pi+4)x+(\pi-4)y-$ $-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2=0$, $(4-\pi)x+(4+\pi)y-\sqrt{2}\pi=0$. 553. $x=k\pi$, $k\in Z$.

554. $y=x\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+2a-\alpha a\,\text{cotg}\,\frac{\alpha}{2}$ pro $\alpha\in(0,2\pi)$, $x=0$ pro $\alpha=0$, $x=2\pi a$ pro $\alpha=2\pi$. 555. $3x+5y-50=0$, $5x-3y-10{,}8=0$. 556. $y=\alpha(x-a)(x-b)(x-c)$, kde $\alpha=\frac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c=\frac{bk_1+ak_2}{k_1+k_2}$ pro $k_1+k_2\neq 0$; pro $k_1+k_2=0$ nemá řešení . 557. $\frac{\pi}{4}$.

558. $p>\text{tg } 89^\circ \doteq 57{,}29$. 559. arctg $\frac{2}{e}$, tj. $36{,}3^\circ$. 560. $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$.

562. $y=2x-1$. 564. 0 ; arctg $\frac{1}{7}$, tj. $8{,}1^\circ$. 565. $\frac{\pi}{2}$; arctg $\frac{3}{4}$, tj. $36{,}9^\circ$. 566. arctg $\frac{8}{15}$, tj. $28{,}1^\circ$. 567. arctg $2\sqrt{2}$, tj. $70{,}5^\circ$.

568. 0 ; arctg $\frac{7\sqrt{7}}{11}$, tj. $59{,}3^\circ$. 569. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. 570. $\frac{|a|}{n}$.

573. $|a|\cosh^2\frac{x}{a}$. 574. $b^2-4ac=0$. 575. $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$.

576. $a=\frac{1}{2e}$. 577. a) $t\in(0,4)\cup(8,\infty)$; b) $t=4\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 578. $E_k=242$J.

579. $t=\frac{7}{18}\pi$. 580. $\left(3, \frac{16}{3}\right)$ nebo $\left(-3, -\frac{16}{3}\right)$ v závislosti na smyslu pohybu . 581. $8\pi rv$ a $4\pi r^2v$. 582. $\omega=2\pi/\text{sec}$. 583. $v(t)=-\frac{2\pi r}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$, $a(t)=-\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$. 584. (Souřadnicové osy v rovině trajektorie, osa x vodorovná, pohyb začíná v počátku souřadnic, pro body trajektorie platí $x\geq 0$.) Trajektorie: $y=x\,\text{tg}\,\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ pro $\alpha\in\langle 0, \frac{\pi}{2})$; $x=0, y=t$,

$t \in \langle 0, \frac{v_0^2}{2g} \rangle$ pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $v(t) = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2}$, $a(t) = g$, maximální výška : $\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, dolet : $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. **585.** e^x . **586.** $a^x \ln^n a$.

587. $\sin (x+n \frac{\pi}{2})$. **588.** $\cos (x+n \frac{\pi}{2})$. **589.** $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

590. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$. **591.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **592.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **593.** $\frac{1}{x}$.

594. $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$. **595.** $-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **596.** $\frac{8!}{(1-x)^9}$.

597. $2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$. **598.** $-\frac{6}{x^4}$. **599.** $\frac{274-120\ln x}{x^6}$.

600. $2^{49}(100x \cos 2x + (1225-2x^2)\sin 2x)$. **601.** $a_n n!$.

602. $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$. **603.** $n!\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right)$.

604. $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$. **605.** $\frac{(2n-1)!!}{(\sqrt{1-2x})^{n+1}}$.

606. $-2^{n-1}\cos (2x+n \frac{\pi}{2})$. **607.** $\frac{3}{4}\sin (x+n \frac{\pi}{2}) - \frac{3^n}{4}\sin (3x+n \frac{\pi}{2})$.

608. $e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n(n-1)\dots(n-k+1)}{x^{k+1}}$. **609.** $(-1)^n e^{-x}(x^2-2(n-1)x+(n-1)$ $(n-2))$. **610.** $2^{\frac{n}{2}} e^x \cos (x+n \frac{\pi}{4})$. **611.** $x \sinh x + n \cosh x$ pro n sudé , $x \cosh x + n \sinh x$ pro n liché . **612.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin (n \operatorname{arccotg} x)$.

614. a) $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$;

b) $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ ((n-2)!!)^2 & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$,

kde klademe $(-1)!!=1$.

615. $\frac{3}{2}(t+1)$, $\frac{3}{4(1-t)}$. **616.** $-\operatorname{cotg} t$, $\frac{-1}{a \sin^3 t}$. **617.** $\operatorname{cotg} \frac{t}{2}$, $\frac{-1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}$. **618.** $\operatorname{tg} (t+ \frac{\pi}{4})$, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3 (t+ \frac{\pi}{4})}$. **619.** $\frac{1}{\sin t}$, $-\operatorname{cotg}^3 t$. **620.** $\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\frac{-2}{1-t^2}$. **654.** $\frac{\pi}{4}$, je-li $x < -1$; $-\frac{3}{4}\pi$, je-li $x<-1$. 655. $-\frac{\pi}{2}$, je-li $-1\leq x\leq 0$; $2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$, je-li $0\leq x\leq 1$.

656. $-(\pi+4\arcsin x)$, je-li $-1\leq x-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 0 , je-li $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\pi-4\arcsin x$, je-li $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$. 657. $\pi.\mathrm{sign}\, x$, je-li $|x|\geq 1$;

$4\,\mathrm{arctg}\, x$, je-li $|x|\leq 1$. 658. V intervalu $(-\infty,\frac{1}{2})$ roste, v intervalu $(\frac{1}{2},+\infty)$ klesá . 659. V intervalech $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ klesá, v intervalu $(-1,1)$ roste. 660. Viz 659. 661. V intervalech $(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ klesá, v intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ roste . 662. V intervalu $(0,a)$ roste, v intervalu $(a,+\infty)$ klesá . 663. V intervalech $(0,1)$, $(1,e)$ klesá , v intervalu $(e,+\infty)$ roste . 664. V intervalech $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ klesá , v intervalech $(-1,0)$, $(1,+\infty)$ roste . 665. V intervalech $(-\infty,0)$, $(\frac{2}{\ln 2},+\infty)$ klesá, v intervalu $(0,\frac{2}{\ln 2})$ roste . 666. V intervalu $(0,n)$ roste, v intervalu $(n,+\infty)$ klesá . 667. V intervalu $(-\infty,0)$ klesá, v intervalu $(0,+\infty)$ roste .

668. Funkce roste v intervalu $(1,+\infty)$ a v intervalech $(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k})$, $(-\frac{1}{2k-1},-\frac{1}{2k})$; klesá v intervalu $(-\infty,-1)$ a v intervalech $(\frac{1}{2k},\frac{1}{2k-1})$, $(-\frac{1}{2k},-\frac{1}{2k+1})$; $k\in N$. 669. Roste v intervalu $(-\infty,+\infty)$. 670. V intervalech $(\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3})$ roste, v intervalech $(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2})$ klesá $(k\in Z)$. 671. V intervalech $((8k-3)\frac{\pi}{4},(8k+1)\frac{\pi}{4})$ roste, v intervalech $((8k+1)\frac{\pi}{4},(8k+5)\frac{\pi}{4})$ klesá $(k\in Z)$. 672. V intervalech $(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi},e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi})$ roste, v intervalech $(e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi},e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi})$ klesá $(k\in Z)$.

673. Klesá. 674. V intervalu $(0,\frac{1}{e})$ klesá, v intervalu $(\frac{1}{e},+\infty)$ roste.

675. Roste v intervalech $(-\infty,-1)$, $(0,+\infty)$. 679. $x=-\frac{1}{2}$ (max) .

680. $x=1$ (max) , $x=5$ (min) . 681. Funkce nemá lokální extrémy .

682. $x=b$ (min) . 683. Funkce nemá lokální extrémy . 684. $x=1$ (min) $x=2$ (max) , $x=3$ (min) . 685. $x=1$ (max) , $x=3$ (min) . 686. $x=0$ (max), $x=4$ (min) . 687. $x=0$ (min) , je-li m sudé ; $x=1$ (min) , je-li n sudé ;

$x=\frac{m}{m+n}$ (max) . 688. $x=-1$ (max) , $x=1$ (min) . 689. $x=-1$ (min) , $x=1$ (max) . 690. $x=\frac{3}{4}$ (min) . 691. $x=0$ (max) , $x=\frac{2}{3}$ (min) . 692. $x=1$ (max) . 693. $x=0$ (min) , je-li n sudé ; $x=n$ (max) . 694. $x=e^{-2}$ (min) . 695. $x=e^{-2}$ (max) , $x=1$ (min) . 696. $x=e^{-\frac{1}{2}}$ (min) . 697. $x=1$ (min) , $x=e^2$ (max) . 698. Funkce nemá lokální extrémy . 699. $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in Z$ (min) ; $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k\in Z$ (max) . 700. $x=-1$ (max) , $x=0$ (min) , $x=1$ (max).

701. $x=0$ (max) , je-li n liché . 702. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ (min) ; $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $k\in Z$ (max) . 703. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$ (max) ; $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$, $k\in Z$ (min) .

704. $x=2k\pi$, $k\in Z$ (min) ; $x=(2k+1)\pi$, $k\in Z$ (max) . 705. $x=-1$ (min) , $x=1$ (max) . 706. Tvrzení není pravdivé . 708. 1 ; -7 . 709. 7 ; 0 .

710. 3 ; -24 . 711. 0 ; -1 . 712. $\frac{3}{5}$; -1 . 713. 1 ; $\frac{3}{5}$.

714. 2 ; $\sqrt[3]{2}$. 715. $\frac{\pi}{4}$; 0 . 716. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$. 717. e^{-1} ; 0 .

718. 1 ; 0 . 719. $\frac{1}{\sqrt{e}}$; $-\frac{1}{\sqrt{e}}$. 720. sup=1 ; inf=min=-7 .

721. sup=max=7 ; inf=min=0 . 722. sup=1 ; inf=min=-1 . 723. sup=100,01; inf=min=2 . 724. sup=max= $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$; inf=0 . 725. sup=max= $\frac{1}{4}$; inf=0 .

726. sup=1 ; inf=min= $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$. 727. V intervalu $(-\infty,0)$ konvexní, v intervalu $(0,+\infty)$ konkávní ; $x=0$ - inflexní bod . 728. V intervalu $(-\infty,1)$ konvexní, v intervalu $(1,+\infty)$ konkávní ; $x=1$ - inflexní bod . 729. V intervalech $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(0,\sqrt{3})$ konkávní, v intervalech $(-\sqrt{3},0)$, $(\sqrt{3},+\infty)$ konvexní ; $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$ - inflexní body . 730. Funkce je konvexní . 731. V intervalech $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ konvexní , v intervalu $(-1,1)$ konkávní ; $x=\pm 1$ - inflexní body .

732. V intervalech $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(3,+\infty)$ konvexní, v intervalu $(1,3)$ konkávní ; $x=3$ - inflexní bod . 733. V intervalech $(2k\pi,(2k+1)\pi)$ konkávní, v intervalech $((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$ konvexní ; $x=k\pi$ - inflexní body $(k\in Z)$.

734. V intervalech $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ konvexní, v intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ konkávní ; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ - inflexní body . 735. V intervalech

$(-\infty,-1),(1,+\infty)$ konkávní, v intervalu $(-1,1)$ konvexní ; $x=\pm 1$ inflexní body.

736. V intervalu $(-\infty,0)$ konkávní, v intervalu $(0,+\infty)$ konvexní ; $x=0$ - inflexní bod. 737. V intervalu $(0,e^{-\frac{5}{6}})$ konkávní, v intervalu $(e^{-\frac{5}{6}},+\infty)$ konvexní ; $x=e^{-\frac{5}{6}}$ - inflexní bod . 738. V intervalech $(e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}})$ konvexní, v intervalech $(e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}},e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi})$ konkávní ; $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ - inflexní body $(k\in Z)$. 752. Dva kořeny : $x_1\in(-\infty,-\frac{1}{5})$, $x_2\in(\frac{8}{5},+\infty)$. 753. Dva kořeny : $x_1\in(-\infty,-1)$, $x_2\in(-1,+\infty)$, je-li $a>-11$; jeden kořen : $x_1=-1$, je-li $a=-11$; rovnice nemá reálné kořeny, je-li $a<-11$. 754. Dva kořeny : $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2\in(3a,+\infty)$, je-li $a\geq 0$; $x_1\in(-\infty,3a)$, $x_2\in(0,+\infty)$, je-li $a<0$.

755. Jeden kořen : $x_1\in(-\infty,0)$, je-li $a<1$; dva kořeny : $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2=1$, je-li $a=1$; tři kořeny : $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2\in(0,a)$, $x_3\in(a,+\infty)$, je-li $a>1$.

756. Jeden kořen : $x_1\in(-\infty,-1)$, je-li $a<-4$, $x_1\in(1,+\infty)$, je-li $a>4$; dva kořeny : $x_1=-1$, $x_2\in(1,+\infty)$, je-li $a=4$, $x_1\in(-\infty,-1)$, $x_2=1$, je-li $a=-4$; tři kořeny : $x_1\in(-\infty,-1)$, $x_2\in(-1,1)$, $x_3\in(1,+\infty)$, je-li $-4<a<4$.

757. Dva kořeny : $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(1,+\infty)$, je-li $a<0$; jeden kořen : $x_1=1$, je-li $a=0$; rovnice nemá reálné kořeny, je-li $a>0$. 758. Dva kořeny : $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2\in(0,+\infty)$, je-li $a<-1$; jeden kořen : $x_1=0$, je-li $a=-1$; rovnice nemá reálné kořeny, je-li $a>-1$. 759. Jeden kořen : $x_1\in(1,+\infty)$, je-li $a>\frac{3}{2}\pi-1$, $x_1\in(-\infty,-1)$, je-li $a<1-\frac{3}{2}\pi$; dva kořeny : $x_1=-1$, $x_2\in(1,+\infty)$, je-li $a=\frac{3}{2}\pi-1$; $x_1\in(-\infty,-1)$, $x_2=1$, je-li $a=1-\frac{3}{2}\pi$; tři kořeny : $x_1\in(-\infty,-1)$, $x_2\in(-1,1)$, $x_3\in(1,+\infty)$, je-li $1-\frac{3}{2}\pi<a<\frac{3}{2}\pi-1$. 760. Jeden kořen : $x_1\in(\frac{1}{e},+\infty)$, je-li $a\geq 0$, $x_1=\frac{1}{e}$, je-li $a=-\frac{1}{e}$; dva kořeny : $x_1\in(0,\frac{1}{e})$, $x_2\in(\frac{1}{e},+\infty)$, je-li $-\frac{1}{e}<a<0$; rovnice nemá reálné kořeny, je-li $a<-\frac{1}{e}$.

761. Jeden kořen : $x_1\in(0,1)$, je-li $a<0$,$x_1=1$, je-li $a=0$, $x_1=e$, je-li $a=\frac{1}{e}$; dva kořeny : $x_1\in(0,\frac{1}{a})$, $x_2\in(\frac{1}{a},+\infty)$, je-li $0<a<\frac{1}{e}$; rovnice nemá reálné kořeny, je-li $a>\frac{1}{e}$. 762. Jeden kořen : $x_1\in(-\infty,0)$, je-li $0<a<\frac{e^2}{4}$; dva kořeny : $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2=2$, je-li $a=\frac{e^2}{4}$; tři kořeny : $x_1\in(-\infty,0)$, $x_2\in(0,2)$, $x_3\in(2,+\infty)$, je-li $a>\frac{e^2}{4}$; rovnice nemá reálné kořeny, je-li $a\leq 0$.

763. a) $0<b<e\ln a$; b) $b\leq 0$ nebo $b=e\ln a$; c) $b>e\ln a$. 764. a) $4p^3+27q^2>0$; b) $4p^3+27q^2<0$. 765. $\frac{14^{10}}{2^{10}}\doteq 1{,}77\ 10^7$. 766. $\frac{1}{200}$.

811. $\frac{a^2}{b^2}$. 812. 1 . 813. $-\frac{e}{2}$. 814. 0 . 815. 0 .

816. 0 . 817. 0 . 818. $+\infty$. 819. $-\frac{2}{\pi}$. 820. 0 .

821. $+\infty$. 822. 0 . 823. $\frac{1}{2}$. 824. 0 . 825. $\frac{2}{3}$. 826. 1 .

827. 1 . 828. e^{-1} . 829. 1 . 830. 1 . 831. e . 832. e^{-1} .

833. 1 . 834. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 835. $e^{\frac{1}{3}}$. 836. $e^{\frac{1}{6}}$. 837. $e^{-\frac{1}{6}}$.

838. $e^{-\frac{1}{2}}$. 839. 0 . 840. $f'(0)=-\frac{1}{12}$. 841. $y=\frac{1}{e}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

842. a) Užití pravidla je přípustné, ale nevede k zjednodušení postupu , limita je rovna 1 ; b) pravidlo nelze použít, limita je rovna 0 ; c) pravidlo nelze použít, limita je rovna 1 ; d) užití pravidla je nepřípustné , limita neexistuje . 843. $p(x)=(x-2)^4+3(x-2)^3-(x-2)^2-7(x-2)$. 844. $T_2(x)=7+11(x-1)+10(x-1)^2$; a) -3 ; b) 0 ; c) 5 . 846. a) $\ln b+\frac{x}{b}-\frac{x^2}{2b^2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{nb^n}$; b) $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+\frac{x-3}{3^3}-\dots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$; c) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. 847. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3$. 848. $1-\frac{x-1}{2}+\frac{3}{8}(x-1)^2-\frac{5}{16}(x-1)^3$. 849. $1+2x+2x^2-2x^4$. 850. $\frac{1}{6}x^2+x^3$. 851. $b+\frac{x^2}{2b}$.

852. $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$. 853. $1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$. 854. $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}$. 855. $x-\frac{x^7}{18}-\frac{x^{13}}{3240}$. 856. $x-\frac{x^3}{3}$. 857. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$.

858. $x+\frac{x^3}{6}$. 859. $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}$. 860. $(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3$.

861. a) $|r|<\frac{3}{(n+1)!}$; b) $|r|\leq\frac{1}{3840}$; c) $|r|<2\cdot 10^{-6}$; d) $|r|<\frac{1}{16}$; e) $|r|<\frac{5}{81}$. 862. a) $|x|<0{,}412$; b) $|x|<0{,}221$; c) $|x|<0{,}067$.

863. $3\frac{2}{405}$, $2\frac{1}{448}$, $2\frac{1}{768}$, $2\frac{3}{5120}$. 864. a) 0,842 ; b) 0,017 ; c) 1,648 ; d) 2,012 ; e) 1,996 ; f) 1,121 ; g) 0,049 . 865. 2,7182818 .

866. 3,14159265 . 867. $\frac{1}{2}$. 868. $-\frac{1}{12}$. 869. $\frac{1}{3}$. 870. $\frac{1}{6}$.

871. $\frac{1}{3}$. 872. $\frac{1}{2}$. 873. $\frac{19}{90}$. 874. $\frac{1}{2}$. 875. $D(f) = R$; funkce lichá ; extrémy : $x=-1$ (min) , $x=1$ (max) ; inflexní bod : $x=0$.

876. $D(f) = R$; extrémy : $x=0$ (max) , $x=2$ (min) ; inflexní bod : $x=1$.

877. $D(f) = R$; extrém : $x=0$ (min) ; inflexní body : $x=1$, $x=3$.

878. $D(f) = R$; funkce lichá ; extrémy : $x=-\sqrt{2}$ (max), $x=-1$ (min), $x=1$ (max) , $x=\sqrt{2}$ (min) ; inflexní body : $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. 879. $D(f) = R-\{0\}$; funkce lichá; asymptoty : $x=0$, $y=x$; extrémy : $x=-1$ (max) , $x=1$ (min) . 880. $D(f) = R-\{0\}$; asymptota : $x=0$; extrém : $x= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (min) ; inflexní bod : $x=-1$. 881. $D(f) = R-\{0\}$; asymptoty : $x=0$, $y=x$; extrém : $x=\sqrt[3]{2}$ (min) . 882. $D(f) = R$; funkce sudá ; asymptota : $y=0$; extrém : $x=0$ (max) ; inflexní body : $x=\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

883. $D(f) = R-\{-1;1\}$; funkce sudá ; asymptoty : $x=-1$, $x=1$, $y=0$; extrém : $x=0$ (min) . 884. $D(f) = R$; funkce lichá ; asymptota : $y=0$; extrémy : $x=-1$ (min) , $x=1$ (max) ; inflexní body : $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$. 885. $D(f) = R$; asymptota : $y=1$; extrémy : $x=-1$ (max) , $x=1$ (min) ; inflexní body : $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$.

886. $D(f) = R-\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; funkce lichá ; asymptoty : $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=0$; inflexní bod : $x=0$. 887. $D(f) = R-\{-1;1\}$; funkce lichá ; asymptoty : $x=-1$, $x=1$, $y=x$; extrémy : $x=-\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (max) , $x=\sqrt{2+\sqrt{5}}$ (min) ; inflexní bod : $x=0$.

888. $D(f) = R-\{-1\}$; asymptoty : $x=-1$, $y=x-3$; extrémy : $x=-4$ (max) , $x=0$ (min) . 889. $D(f) = R-\{1\}$; asymptoty : $x=1$, $y=1$; extrém : $x=-1$ (min) ; inflexní bod : $x=-4$. 890. $D(f) = R-\{-1\}$; asymptoty : $x=-1$, $y=x-3$; extrémy: $x=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ (max) , $x=0$ (max) , $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$ (min) ; inflexní bod : $x=\frac{1}{5}$.

891. $D(f) = R-\{0;1;2\}$; asymptoty : $x=0$, $x=1$, $x=2$, $y=0$; dva inflexní body : $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in (1,2)$. 892. $D(f) = R-\{0;1;2\}$; asymptoty : $x=0$, $x=1$, $x=2$, $y=0$; extrémy : $x=x_1$ (min) , $x=x_2$ (max) , $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in (1,2)$.

893. $D(f) = R-\{0;1\}$; asymptoty : $x=0$, $x=1$; inflexní bod : $x=\frac{1}{2}$.

894. $D(f) = R_{+0}$; extrémy : $x=0$ (max) , $x=1$ (min) . 895. $D(f) = R$; asymptoty : $y=-1$, $y=1$; extrém : $x=-\frac{1}{2}$ (min) ; inflexní body : $x=-\frac{3+\sqrt{41}}{8}$, $x=\frac{\sqrt{41}-3}{8}$. 896. $D(f) = R$; funkce sudá ; asymptoty : $y=-2x$, $y=2x$; extrém : $x=0$ (min) . 897. $D(f) = R$; funkce lichá ; asymptoty : $y=-1$, $y=1$; inflexní bod : $x=0$. 898. $D(f) = R-\{-1;1\}$; funkce lichá ;extrémy : $x=-\sqrt{3}$ (max) , $x=\sqrt{3}$ (min) ; inflexní body : $x=0$, $x=\pm 3$. 899. $D(f) = R$; extrémy : $x=-\frac{2}{11}$ (max) , $x=0$ (min) ; inflexní body : $x=-1$, $x=-\frac{4+\sqrt{27}}{22}$, $x=\frac{\sqrt{27}-4}{22}$.

900. $D(f) = R$; funkce sudá ; extrémy : $x=-1$ (min) , $x=0$ (max) , $x=1$ (min) .

901. $D(f) = R$; funkce lichá ; asymptota : $y=0$; extrémy : $x=-1$ (min) , $x=1$ (max) ; inflexní bod : $x=0$.

902. $D(f) = (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty)$; funkce sudá ; asymptota : $y=0$.

903. $D(f) = (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty)$; funkce sudá ; asymptoty : $y=-\frac{x}{2}$, $y=\frac{x}{2}$.

904. $D(f) = R_+$; asymptoty : $x=0$, $y=x+\frac{3}{2}$; extrém : $x=\frac{1}{2}$ (min) .

905. $D(f) = (-\infty,-3) \cup \langle 0,+\infty)$; asymptoty : $x=-3$, $y=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{5}{2}-2x$; extrémy : $x=-4$ (min) , $x=0$ (max) . 906. $D(f) = R-\{-1\}$; asymptota : $x=-1$; extrémy: $x=-2$ (max) , $x=0$ (min) ; inflexní body : $x=\sqrt{3}-2$, $x=-(\sqrt{3}+2)$. 907. $D(f) = R$; funkce periodická($\ell=\pi$) ; extrémy : $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (max) , $x=k\pi$ (min) ; inflexní body : $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$; $(k\in Z)$. 908. Viz obr. 909. Viz obr. 910. $D(f) = R$; funkce lichá, rostoucí ; inflexní body : $x=k\pi$ $(k\in Z)$. 911. $D(f) = R$; funkce periodická($\ell=2\pi$), lichá ; extrémy : $x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ (min) , $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ (max) ; inflexní body : $x=k\pi$; $(k\in Z)$. 912. Viz obr. 913. Viz obr. 914. Viz obr. 915. Viz obr. 916. Viz obr. 917. Viz obr. 918. Viz obr.

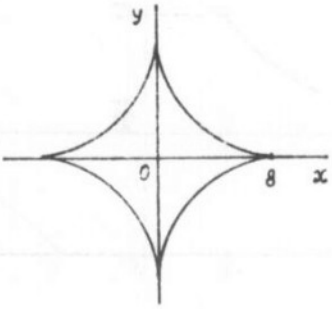
919. Viz obr. 920. Viz obr. 921. Viz obr. 922. Viz obr.

923. Viz obr. 924. $D(f) = R$; funkce lichá ; asymptoty : $y=x-\frac{\pi}{2}$, $y=x+\frac{\pi}{2}$; inflexní bod : $x=0$. 925. $D(f) = R$; funkce sudá ; asymptoty : $y=-\frac{\pi}{2}x-1$, $y=\frac{\pi}{2}x-1$; extrém : $x=0$ (min) . 926. $D(f) = R$; funkce lichá ; asymptota : $y=0$; extrémy : $x=-1$ (min) , $x=1$ (max) ; inflexní bod : $x=0$. 927. $D(f) = R$; funkce sudá ; asymptota : $y=\pi$; extrém : $x=0$ (min) . 928. $D(f) = (-\infty,0\rangle \cup \langle \frac{2}{3},+\infty)$; asymptota : $y=\frac{\pi}{3}$. 929. Viz obr. 930. $D(f) = R$; funkce sudá ; asymptota : $y=0$; extrém : $x=0$ (max) ; inflexní body : $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

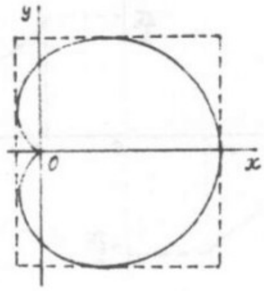
931. $D(f) = R$; funkce sudá ; asymptota : $y=1$; extrém : $x=0$ (min) ; inflexní body : $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. 932. $D(f) = R-\{0\}$; asymptoty : $x=0$; $y=1$; inflexní bod : $x=-\frac{1}{2}$. 933. $D(f) = R$; asymptota : $y=x$; extrém : $x=0$ (min) . 934. $D(f) = R-\{0\}$; asymptoty : $x=0$, $y=x+3$; extrémy : $x=-1$ (max) , $x=2$ (min) ; inflexní bod : $x=-\frac{2}{5}$. 935. $D(f) = R_+$; extrém : $x=\frac{1}{e}$ (min) . 936. $D(f) = R_+$; extrém : $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ (min) ; inflexní bod : $x=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$. 937. $D(f) = R$; funkce lichá ; inflexní bod : $x=0$. 938. $D(f) = (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty)$; funkce sudá ; asymptota : $y=1$. 939. $D(f) = (-1,0) \cup (0,+\infty)$; asymptoty : $x=-1$, $y=1$.

941. Viz obr. 942. Viz obr. 944. Viz obr. 945. Viz obr. **950. – 983. (kromě př. 951 a 955) Viz obr. 964. Viz 952. 966. Viz 953.**

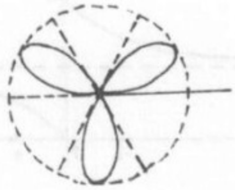
952.



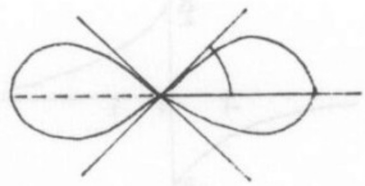
953.



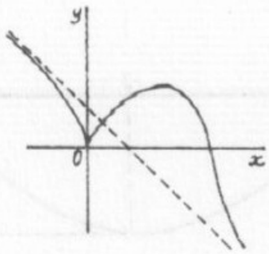
954.



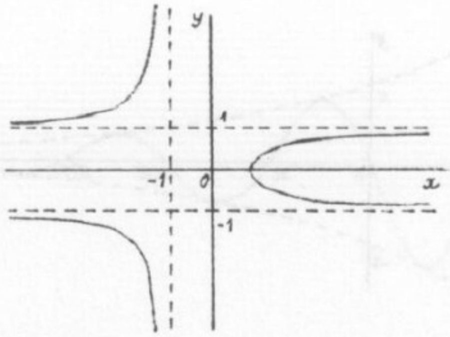
956.



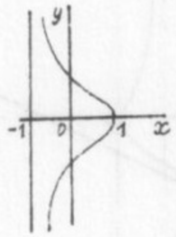
957.



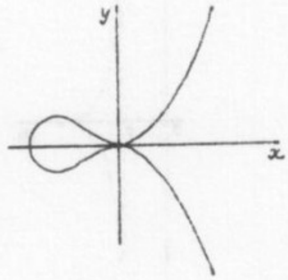
958.



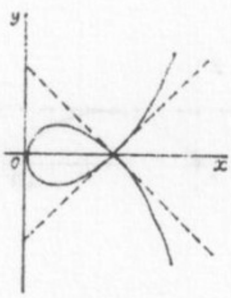
959.



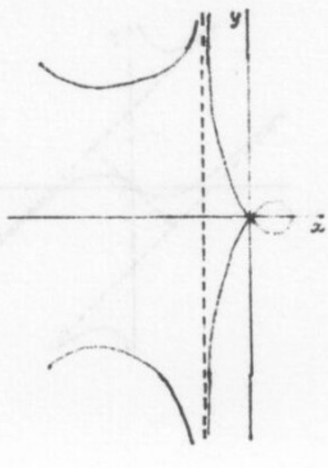
960.



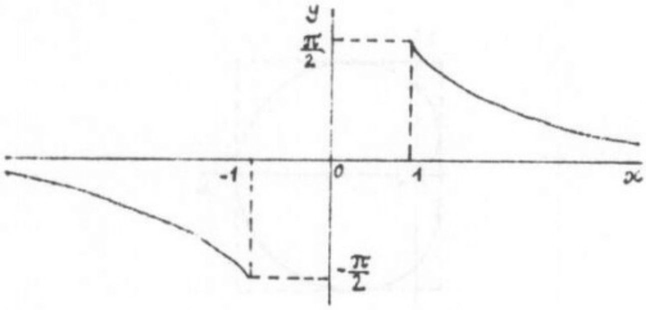
961.



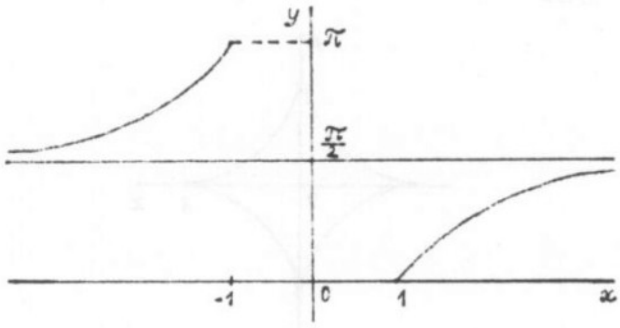
962.



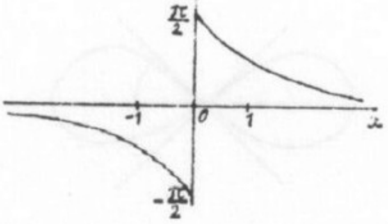
920.



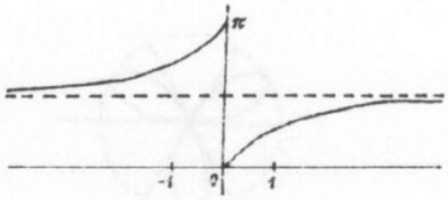
921.



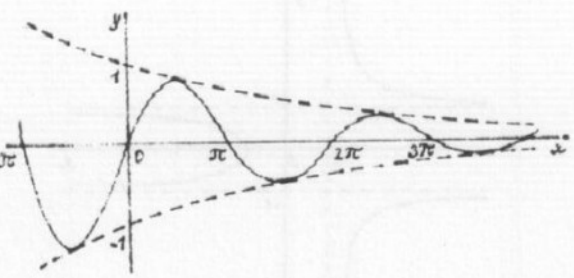
922.



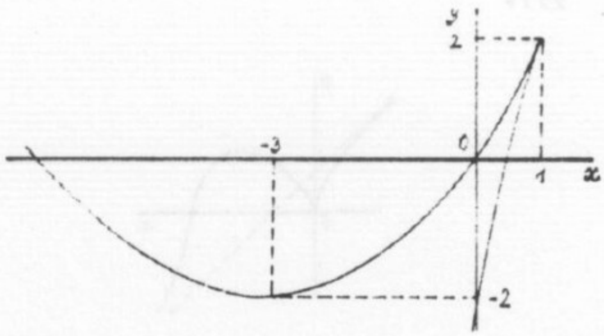
923.



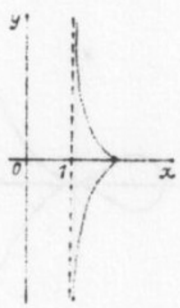
929.



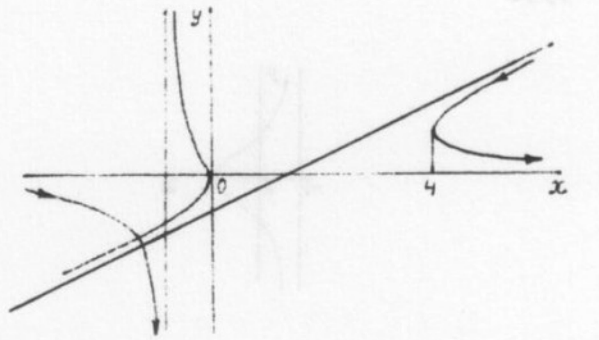
941.



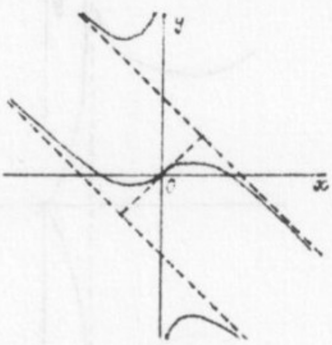
942.



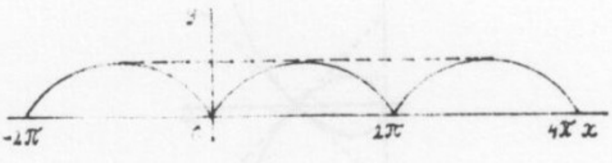
944.



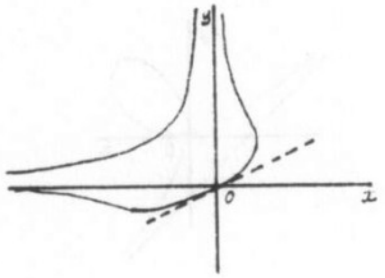
945.



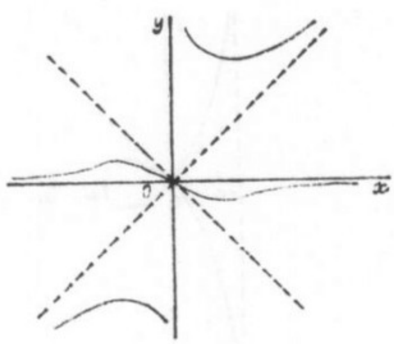
950.



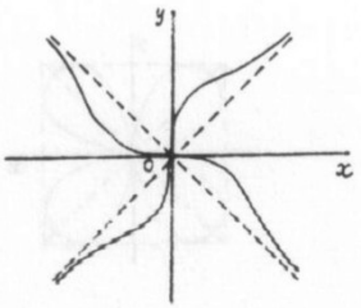
975.



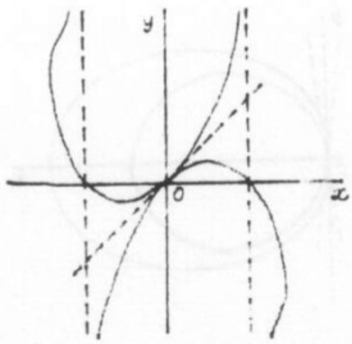
976.



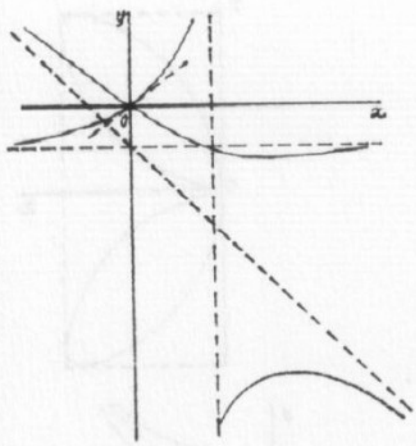
977.



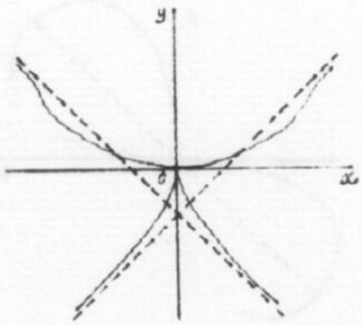
978.



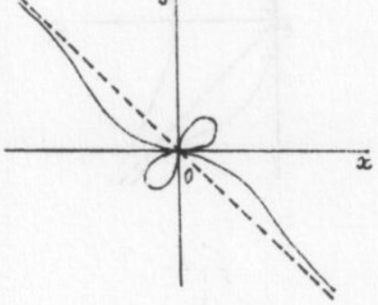
979.



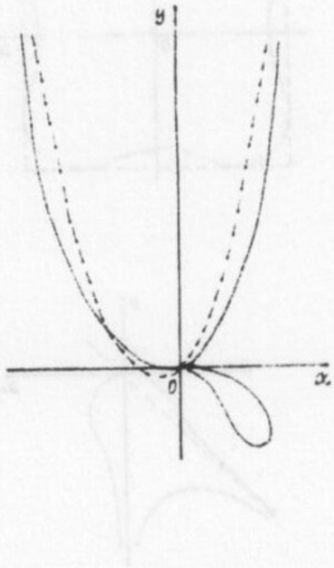
980.



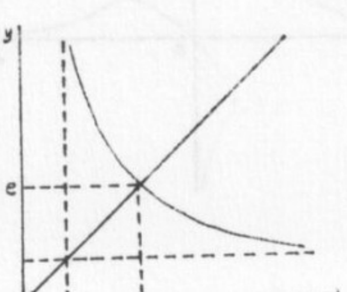
981.



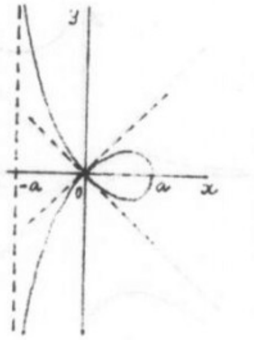
982.



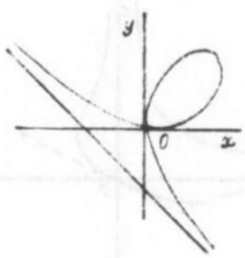
983.



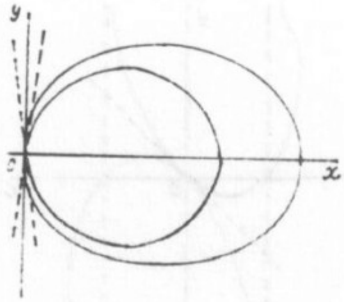
963.



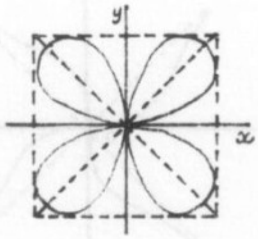
965.



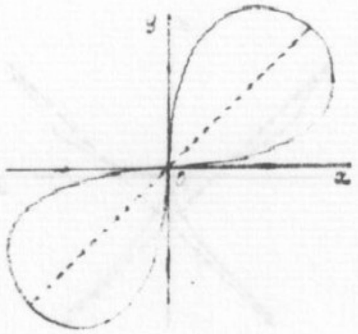
967.



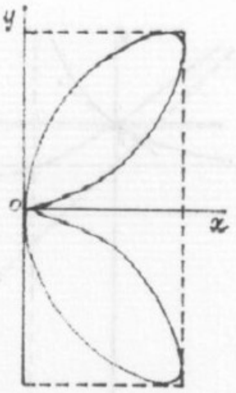
968.



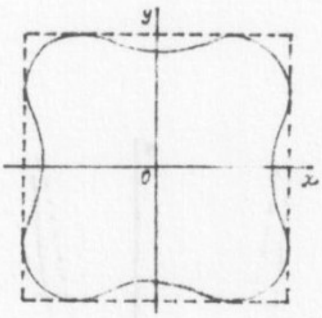
969.



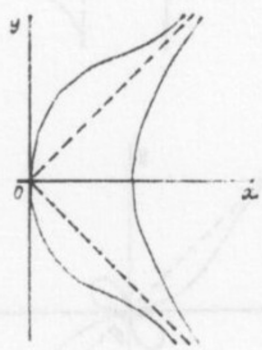
970.



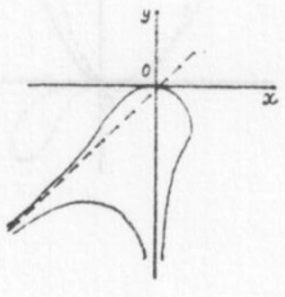
971.



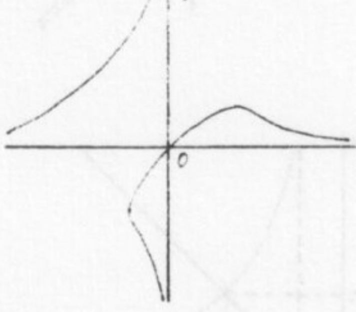
972.



973.



974.



O B S A H