Taylorův rozvoj složené funkce

1. Teorie

Uvažujme spojitou funkci

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) \tag{1}$$

kde $T_n(x)$ je n-tý Taylorův polynom funkce f se středem v bodě 0 a $R_{n+1}(x)$ je příslušný zbytek, pro nějž platí

$$R_{n+1}(x) = x^n \Omega(x)\,; \ \lim_{x\to 0} \Omega(x) = 0. \tag{2}$$

Analogicky uvažujme spojitou funkci

$$g(x) = t_m(x) + r_{m+1}(x)\,, \tag{3}$$

která navíc splňuje $g(0) = 0$ a

$$r_{m+1}(x) = x^m \omega(x)\,; \ \lim_{x\to 0} \omega(x) = 0. \tag{4}$$

Potom platí

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= T_n(g(x)) + R_{n+1}(g(x)) \\ &= T_n(t_m(x) + r_{m+1}(x)) + R_{n+1}(g(x))\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Zvolme $n_0 \leq \min\{m, n\}$. Člen $T_n(t_m(x) + r_{m+1}(x))$ lze zapsat jako

$$T_n(t_m(x) + r_{m+1}(x)) = P(x) + R(x) \tag{6}$$

kde $P(x)$ obsahuje členy tvaru αx^k kde $k \leq n_0$, a $R(x)$ členy tvaru αx^k pro $k > n_0$ a dále součiny tvaru $\alpha x^k r_{m+1}(x)^l = \alpha x^{k+ml} \omega(x)^l$ kde $k \geq 0, l \geq 1$. Z tvaru členů $R(x)$ okamžitě plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^{n_0}} = 0.$$

Dále se zabývejme členem $R_{n+1}(g(x))$. Z předpokladu $g(0) = 0$ má polynom $t_m(x)$ konstantní člen roven 0 a lze tedy zapsat jako $t_m(x) = x\tilde{t}(x)$. Po dosazení do (3) a s využitím (4) dostáváme

$$g(x) = x\tilde{t}(x) + x^m \omega(x)$$

$$R_{n+1}(g(x)) = \left(x\tilde{t}(x) + x^m \omega(x)\right)^n \Omega(g(x))\,.$$

Potom pro $n_0 = 0$ platí zjevně

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{n+1}(g(x))}{x^{n_0}} = \lim_{x\to 0} R_{n+1}(g(x)) = 0$$

a pro $n_0 > 0$ (a tedy i $m, n > 0$) platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{n+1}(g(x))}{x^{n_0}} = \lim_{x\to 0} x^{-n_0} \left(x\tilde{t}(x) + x^m \omega(x)\right)^n \Omega(g(x)) = \lim_{x\to 0} x^{n-n_0} \underbrace{\left(\tilde{t}(x) + x^{m-1}\omega(x)\right)^n}_{\to \tilde{t}(0)^n} \underbrace{\Omega\Bigg(\underbrace{g(x)}_{\to 0}\Bigg)}_{\to 0} = 0.$$

Celkem tedy z (5) a (6) máme

$$f(g(x)) = P(x) + \underbrace{R(x) + R_{n+1}(g(x))}_{=:R_{n_0}(x)} = P(x) + R_{n_0}(x)$$

kde
$$\lim_{x\to 0}\frac{R_{n_0}(x)}{x^{n_0}}=0.$$
Z věty o jednoznačnosti Taylorova rozvoje tedy $P(x)$ musí být n_0-tý Taylorův polynom funkce $f\circ g$.

2. Příklad

Vypočítejme limitu
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{x^3}.$$
Limitu snadno vypočítáme, když najdeme 3. Taylorův polynom čitatele a vyjádříme
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^3\omega(x)}{x^3}=\begin{cases}a_3 & \text{když } a_{0,1,2}=0,\\ \pm\infty \text{ nebo neexistuje} & \text{jinak.}\end{cases}$$
Upravme nejprve
$$x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\ln\left(1+\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\right). \tag{7}$$
Platí
$$\ln(1+y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}y^n=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\cdots, \tag{8}$$
kde pod „$\cdots$“ rozumíme vyšší mocniny y než y^3 a příslušný Taylorův zbytek. Proto
$$\ln\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$
Dále
$$(1+y)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}y^n,$$
a tedy
$$\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1}=-x+\frac{1}{2}x^3+\cdots$$
Nyní dosadíme tento rozvoj do rozvoje logaritmu a budeme uvažovat pouze mocniny do 3. stupně. Získáme
$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)&=\left(-x+\frac{1}{2}x^3+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(-x+\frac{1}{2}x^3+\cdots\right)^2+\frac{1}{3}\left(-x+\frac{1}{2}x^3+\cdots\right)^3+\cdots\\&=-x-\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^3+\cdots\end{aligned}$$
Celkem dostáváme
$$\begin{aligned}x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)&=x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\ln\left(1+\frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\&=x+\frac{1}{2}x^2+\cdots-x-\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^3+\cdots=\frac{1}{6}x^3+\cdots\end{aligned} \tag{9}$$
Taylorovým polynomem funkce $x+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$ je tedy polynom $\frac{1}{6}x^3$. Proto výsledkem zkoumané limity je $a_3=\frac{1}{6}$.

Poznámka. Výpočet lze řešit ještě jiným způsobem: Můžeme přepsat argument logaritmu na levé straně (7) jako

$$\sqrt{1+x^2} - x = 1 + \underbrace{\left(-1 - x + \sqrt{1+x^2}\right)}_{y}$$

a rozvinout

$$-1 - x + \sqrt{1+x^2} = -1 - x + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = -1 - x + 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots = -x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

Po dosazení do rozvoje (8) dostáváme

$$\begin{aligned}
\ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) &= \left(-x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right)^3 + \cdots \\
&= -x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left((-x)^2 + 2x \cdot \frac{1}{2}x^2 + \cdots\right) + \frac{1}{3}\left((-x)^3 + \cdots\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x^3 + \cdots = \frac{1}{6}x^3 + \cdots,
\end{aligned}$$

což je stejný výsledek jako (9).

Poznámka. V tomto konkrétním případě lze dokonce získat celou Maclaurinovu řadu čitatele

$$f(x) = x + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right).$$

Platí totiž

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Na poslední výraz již lze aplikovat zobecněný binomický rozvoj a výslednou řadu poté zintegrovat člen po členu. Ovšem již pro lehce modifikovanou funkci

$$\tilde{f}(x) = x + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{2}\right)$$

tento postup nikam nepovede.