MATICOVÁ VERZE PŘEVODU KVADRATICKÉ FORMY NA (SKORO) NORMÁLNÍ TVAR

PAVEL STRACHOTA

Tato poznámka vznikla jako odpověď na otázku studenta Aleše Kravice v ZS 2017/18.

Uvažujme kvadratickou formu

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{r} a_{ij}x_i x_j.$$

Provádějme Lagrangeův algoritmus převodu q na čtverec (neboli babylonskou redukci) a vytvářejme čtverce tak, abychom postupně vyloučili proměnné v pořadí $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Nechť v n-tém kroku existuje vždy nenulový koeficient u x_n, takže je možné čtverec vytvořit bez nutnosti další transformace proměnných.

Po vytvoření prvního čtverce pak platí

$$q(\boldsymbol{x}) = a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{r}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 + \sum_{i,j=2}^{r}\underbrace{\left(a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}\right)}_{b_{ij}}x_i x_j.$$

Přitom je třeba si uvědomit, že ve dvojité sumě vystupují symetrické členy. Z tohoto tvaru je vidět, že:

(1) Jestliže první řádek matice $\mathbf{A}$ vydělíme a_{11}, tak tento první řádek nám vyjadřuje koeficienty lineární kombinace $x_1, \ldots, x_n$ v prvním čtverci.

(2) Jestliže takto upravený řádek $\mathbf{A}$ vynásobíme koeficientem $a_{1i} = a_{i1}$ a odečteme od i-tého řádku $\forall i \in (2, 3, \ldots, r)$, zbyde v matici na (i, j)-tém místě číslo $a_{ij} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}a_{1j}$, které
   - pro $j = 1$ je rovno $a_{i1} - \frac{a_{1i}}{a_{11}}a_{11} = 0$,
   - pro $j > 1$ je rovno přesně koeficientu u členu $x_i x_j$ v $q(\boldsymbol{x})$ bez prvního čtverce.

Po úpravách tedy máme matici, jejíž první řádek vyjadřuje koeficienty lineární kombinace proměnných v prvním čtverci, první sloupec je až na první prvek nulový a zbytek matice tvoří matici kvadratické formy v proměnných $x_2, \ldots, x_r$, která zbyde z $q(\boldsymbol{x})$ po vytvoření prvního čtverce. Tuto matici lze dále zpracovat stejnými úpravami, které vedou k převodu matice na horní trojúhelníkový tvar. Jde o jakousi obdobu první fáze Gaussovy eliminace, ovšem s řádkovými úpravami omezenými na výše zmíněné operace. Navíc prvky a_{ii}, kterými dělíme jednotlivé řádky, si musíme pamatovat, neboť tyto prvky pak násobí příslušné čtverce ve skoro-normálním tvaru q.

Příklad. Uvažujme formu

$$q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Převodem na čtverec dostáváme

$$q(x_1, x_2) = 2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \left(5 - \frac{9}{2}\right)x_2^2 = 2\left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Matice q je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

s níž provedeme úpravy

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 5 - 3\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 2 \\ \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Čísla a_{ii}, která si musíme pamatovat, si píšeme před každý řádek. Z výsledného tvaru matice ihned můžeme zrekonstruovat převod q na čtverec.