VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

Sbírka příkladů z obyčejných diferenciálních rovnic

(Elektrotechnika, elektronika, komunikační a řídicí technika)

Zdeněk Svoboda

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2015
http://www.umat.feec.vutbr.cz

Obsah

Předmluva

Tento učební text je určen pro posluchače prvního semestru magisterského studia na Fakultě elektrotechniky a komunikačních technologií Vysokého učení technického v Brně. Jeho cílem je poskytnout studentům dostatečný prostor pro procvičování základních postupů při řešení obyčejných diferenciálních rovnic v rozsahu, který odpovídá tematickému zaměření předmětu diferenciální rovnice a jejich použití v elektrotechnice. Jeho předností je, že poskytuje dostatečný počet zadání pro samostatnou práci. Jedná se o sbírku, která je strukturována tak, že jednotlivé tematické celky tvoří jednu kapitolu. V jejím úvodu jsou stručně uvedeny základní pojmy a postupy. Ty jsou konkretizovány v části nazývané řešení typických příkladů. Na závěr každé kapitoly jsou uvedeny příklady pro samostatnou práci. Tyto příklady obsahují ve svém zadání parametry za něž si student dosazuje konkrétní čísla dle pokynů v daném zadání. Cílem je vytvořit dostatečný počet zadání konkrétních příkladů určených k samostatné práci. Pro zkušenější čtenáře je tu navíc možnost provést diskusi řešení těchto příkladů v závislosti na volbě parametru, což je obvykle úloha vyšší náročnosti než pouhá aplikace postupu pro jeden konkrétní parametr.

1 Diferenciální rovnice 1. řádu

1.1 Exaktní rovnice a integrační faktor

Exaktní rovnice souvisí s totálním diferenciálem funkce více proměnných

$$\mathrm{d}\, f(x,y) = f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\,\mathrm{d}y$$

1.1.1 Přehled základních pojmů

Diferenciální rovnice

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1.1}$$

se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**, jestliže výraz na její levé straně je totálním diferenciálem nějaké funkce $f(x,y)$ v nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Funkci $f(x,y)$ nazýváme **kmenovou funkcí**. Výraz $M(x,y)\,\mathrm{d}x+N(x,y)\,\mathrm{d}y$ je totálním diferenciálem nějaké funkce $f(x,y)$ právě tehdy, když v uvedené oblasti platí

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,. \tag{1.2}$$

Potom je řešení této rovnice dáno implicitně rovnicí

$$f(x,y) = C. \tag{1.3}$$

Hledáme funkci $f(x,y)$, pro kterou platí $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$. Integrací funkce $M(x,y)$ podle x můžeme (y přitom považujeme za konstantu) f najít:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y),$$

kde $g(y)$ je funkce závislá pouze na y, která zde hraje roli integrační konstanty. Tuto určíme z rovnosti že derivací f podle y. To znamená, že

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g'(y) = N(x,y).$$

Odtud dostaneme rovnici

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x\,,$$

ze které určíme funkci g integrací podle y a tak je nalezena kmenová funkce f. Celý postup hledání f lze provést i v opačném pořadí. Případně můžeme funkci f určit jako jakési množinové sjednocení integrálů

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}x \cup \int N(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

čímž je míněn součet kde je každá funkce napsaná pouze jednou.

Příklad 1.1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(y^2 + 2x)\,\mathrm{d}x + 2(x+1)y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Ověříme, že zadaná rovnice je exaktní.

$$\frac{\partial\ y^2 + 2x}{\partial y} = 2y = \frac{\partial\ 2(x+1)y}{\partial x}.$$

Existuje proto funkce f, pro niž platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2x \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+1)y.$$

Integrací prvního vztahu podle x dostáváme

$$f(x,y) = xy^2 + x^2 + g(y).$$

Funkci $g(y)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + 2x^2y + g(y)) = 2xy + g'(y) = 2(x+1)y \quad \Rightarrow \quad g'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad g(y) = y^2.$$

Kmenová funkce f je tedy $f(x,y) = xy^2 + x^2 + y^2$ a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $xy^2 + x^2 + y^2 = C$. V tomto případě můžeme řešení vyjádři i v explicitním tvaru

$$y = \pm\sqrt{\frac{C - x^2}{x}}.$$

□

Integračním faktorem nazýváme funkci $\mu(x,y)$, pro kterou je rovnice

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

exaktní, tj. pro kterou platí

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x,y)M(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,y)N(x,y)\right), \tag{1.4}$$

což je obtížnější úloha než původní. V jednodušších příkladech kdy $\mu(x,y) = m(z)$ kde $z = x$, $z = y$, $z = x + y$, $z = xy$, ... je možné neznámou funkci $m(z)$ určit, jestliže po dosazení předpokládaného tvaru do (1.4) se podaří tuto rovnici vyjádřit pouze v proměnné z, tj, ve tvaru $F(m, m'_z, z) = 0$ a integrační faktor můžeme z této rovnice určit.

Příklad 1.2. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(y^4 - 4xy)\,\mathrm{d}x + (2xy^3 - 3x^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Ověříme, že zadaná rovnice je exaktní.

$$\frac{\partial\ y^4 - 4xy}{\partial y} = 4y^3 - 4x \neq 2y^3 - 6x = \frac{\partial\ 2xy^3 - 3x^2}{\partial x}.$$

Pokusíme se nalézt integrační faktor ve tvaru $m(z) = m(xy)$. Tento tvar dosadíme do (1.4):

$$\begin{aligned} &m'(z)x(y^4 - 4xy) + m(z)(4y^3 - 4x) = \\ &\qquad \frac{\partial\ m(xy)(y^4 - 4xy)}{\partial y} = \frac{\partial\ m(xy)(2xy^3 - 3x^2)}{\partial x} = \\ &\qquad\qquad m'(z)y(2xy^3 - 3x^2) + m(z)(2y^3 - 6x) \end{aligned}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} &- m'(z)xy(y^3 + x) = (m'(z)xy(y^3 - 4x - 2y^3 - 3x) = \\ &\qquad m(z)(2y^3 - 6x - 4y^3 + 4x) = -2m(z)(y^3 + x) \end{aligned}$$

Po vykrácení výrazem $-(y^3+x)$ dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými pro funkci $m(z)$

$$m'(z)z = 2m(z) \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\,m}{m} = \int \frac{2\,\mathrm{d}z}{z} \Leftrightarrow m(xy) = m(z) = z^2 \Rightarrow m(xy) = (xy)^2.$$

Po vynásobení rovnice integračním faktorem získáme rovnici

$$(x^2y^6 - 4x^3y^3)\,\mathrm{d}x + (2x^3y^5 - 3x^4y^2)\,\mathrm{d}y = 0,$$

která je exaktní, neboť

$$\frac{\partial\ x^2y^6 - 4x^3y^3}{\partial y} = 6x^2y^5 - 12x^3y^2 = \frac{\partial\ 2x^3y^5 - 3x^4y^2}{\partial y}.$$

Kmenová funkce f je tedy

$$f(x, y) = \int x^2y^6 - 4x^3y^3\,\mathrm{d}x \cup \int 2x^3y^5 - 3x^4y^2\,\mathrm{d}y = \frac{x^3y^6}{3} - x^4y^3$$

a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $x^3y^6 - 3x^4y^3 + C = 0$. I v tomto případě je možné řešení vyjádři i v explicitním tvaru

$$y = \sqrt[3]{\frac{3x}{2} \pm \sqrt{\frac{9x - 4C}{4x^3}}}.$$

□

Na otázku jaký tvar má integrační faktor neexistuje univerzální odpověď. V případě integračních faktorů $m(x)$ resp. $m(y)$ lze stanovit stanovit dostatečnou podmínku jejich existence a jeho tvar:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\alpha(x),\quad \text{potom}\quad m(x)=\exp\left(\int \alpha(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

resp.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\beta(y),\quad \text{potom}\quad m(y)=\exp\left(\int \beta(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

1.1.2 Řešení typických příkladů

Příklad 1.3. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(2-9xy^2)x\,\mathrm{d}x+(4y^2-6x^3)y\,\mathrm{d}y=0.$$

Řešení. Ověříme, že zadaná rovnice je exaktní.

$$\frac{\partial\ 2x-9x^2y^2}{\partial y}=-18x^2y=\frac{\partial\ 4y^3-6x^3y}{\partial x}.$$

Existuje proto funkce $f(x,y)$, pro niž platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-9x^2y^2 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-6x^3y.$$

Integrací prvního vztahu podle x dostáváme

$$f(x,y)=x^2-3x^3y^2+g(y).$$

Funkci $g(y)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle y:

$$\frac{\partial(x^2-3x^3y^2+g(y))}{\partial y}=-6x^3y+g'(y)=4y^3-6x^3y \quad\Rightarrow\quad g'(y)=4y^3 \quad\Rightarrow\quad g(y)=y^4.$$

Kmenová funkce $f(x,y)$ je tedy $f(x,y)=x^2-3x^3y^2+y^4$ a obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $x^2-3x^3y^2+y^4=C$. □

Příklad 1.4. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'=\frac{2x(1+\sqrt{x^2-y})}{\sqrt{x^2-y}} \Leftrightarrow 2x(1+\sqrt{x^2-y})\,\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=0.$$

Řešení. Ověříme, že zadaná rovnice je exaktní.

$$\frac{\partial\ 2x(1+\sqrt{x^2-y})}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}=\frac{\partial\ \sqrt{x^2-y}}{\partial x}.$$

Existuje proto funkce $f(x, y)$, pro niž platí

$$f'_x = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) \quad \text{a} \quad f'_y = -\sqrt{x^2 - y}.$$

Integrací druhého vztahu podle y dostáváme

$$f(x, y) = \frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} + g(x).$$

Funkci $g(x)$ určíme z rovnosti parciálních derivací podle x:

$$\frac{\partial(\frac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2})}{\partial y} = 2x\sqrt{x^2 - y} + g'(x) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) \;\Rightarrow\; g'(x) = 2x \;\Rightarrow\; g(x) = x^2.$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x^2 - y)^2} + x^2 = C$. □

Příklad 1.5. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y^2 \,\mathrm{d}x - (xy + x^3) \,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Zjistíme, zda je zadaná rovnice exaktní.

$$M'_y = \frac{\partial\, y^2}{\partial y} = 2y \neq -y - 3x^2 = \frac{\partial}{\partial x} = N'_x.$$

Tato rovnice není exaktní, ale existuje integrační faktor, který je funkcí proměnné x, neboť platí

$$\frac{M'_x - N'_x}{N} = \frac{2y - (-y - 3x^2)}{xy + x^3} = -\frac{3}{x}.$$

Integračním faktorem je funkce $\exp\left(\int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \exp(-3\ln x) = x^{-3}$. Můžeme snadno ověřit exaktnost rovnice:

$$\frac{y^2}{x^3}\,\mathrm{d}x - \left(\frac{y}{x^2} + 1\right)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Kmenová funkce $f(x, y)$ má tvar:

$$f(x, y) = \int \frac{y^2}{x^3}\,\mathrm{d}x \cup \int -\left(\frac{y}{x^2} + 1\right)\,\mathrm{d}y = -\frac{y^2}{2x^2} - x.$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je $y^2 = x^2(C - x)$. □

Příklad 1.6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x^2 + y^2 + x)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Řešení. Zjistíme, zda je zadaná rovnice exaktní.

$$M'_y = \frac{\partial\ x^2 + y^2 + x}{\partial y} = 2y \neq 0 = \frac{\partial\ y}{\partial x} = N'_x.$$

Rovnice není exaktní, ale i zde existuje integrační faktor, který je funkcí proměnné x, neboť platí

$$\frac{M'_x - N'_x}{N} = \frac{2y}{y} = 2.$$

Integračním faktorem je funkce $\exp(2x)$ a získáme tak exaktní rovnici:

$$\mathrm{e}^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{2x} y\,\mathrm{d}y = 0.$$

Kmenovou funkci $f(x, y)$ budeme hledat integrací podle y:

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{2x} y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2}\mathrm{e}^{2x} + g(x).$$

Funkci $g(x)$ určíme z rovností parciálních derivací podle x:

$$\mathrm{e}^{2x}(x^2 + y^2 + x) = \mathrm{e}^{2x} y^2 + g'(x) \Rightarrow g(x) = \int \mathrm{e}^{2x}(x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}.$$

Kmenová funkce $\exp(2x)(x^2 + y^2)/2$ implicitně zadává řešení rovnice

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x^2 + y^2) = C.$$

□

1.2 Bernouliho a Riccatiho rovnice

Zobecněním známé lineární rovnice prvního řádu je rovnice Bernoulliova. Proto je možné postup řešení lineární rovnice prvního řádu modifikovat na rovnici Bernoulliovu. Riccatiho rovnice souvisí s rovnicí Bernoulliovou tak, že ji přetransformujeme na rovnici Bernoulliho, známe-li jedno její partikulární řešení.

1.2.1 Přehled základních pojmů

Bernouliho diferenciální rovnice má tvar tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{1.5}$$

kde $n \in \mathbb{R}$. Pro n rovno 1 jedná o rovnici se separovanými proměnnými a pro $n = 0$ se jedná o lineární diferenciální rovnici a její řešení už umíme najít. Pro $n > 0$ má rovnice vždy tzv. triviální řešení $y = 0$. Postup řešení je podobný jako u rovnice lineární. Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = a(x)y$. Obecné řešení této rovnice vyjde ve tvaru $y = C \cdot y_0(x)$. Dále předpokládáme řešení rovnice (1.5) ve tvaru $y = C(x) \cdot y_0(x)$. Po dosazení do rovnice (1.5) získáme rovnici se separovanými proměnnými z níž určíme $C(x)$:

$$C'(x) \cdot y_0(x) = +b(x) \cdot C^n(x) \cdot y_0^n(x). \tag{1.6}$$

Postup předvedeme na příkladech. Navíc poznamenejme, že u exaktních diferenciálních rovnic byly obě proměnné x a y ve stejné pozici. Inspirováni touto myšlenkou je možné v některých případech pouhou záměnou závislosti proměnných, tj. místo funkce $y(x)$ hledat funkci $x(y)$ rovnici převést na známý typ.

Diferenciální rovnice tvaru

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{1.7}$$

se nazývá **Riccatiova rovnice**. Známe-li jedno řešení rovnice (1.7) (např. podaří-li se nám je nějak uhodnout), použitím substituce

$$y = y_1 + u,$$

dostaneme pro novou proměnnou u rovnici

$$u' = (Q(x) + 2R(x)y_1)u + R(x)u^2. \tag{1.8}$$

což je Bernoulliova rovnice pro $n = 2$ s neznámou funkcí u.

1.2.2 Řešení typických příkladů

Příklad 1.7. Najděte obecné řešení Bernoulliho rovnice

$$y' = -\frac{y}{x} + x^3y^2$$

Řešení. Nejprve vyřešíme homogenní lineární rovnici $y' = -\dfrac{y}{x}$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln c \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\frac{c}{|x|} \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot \frac{1}{x}.$$

Řešení zadané rovnice budeme hledat jako $y = C(x) \cdot \dfrac{1}{x}$:

$$C' \cdot \frac{1}{x} + C \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{C \cdot \frac{1}{x}}{x} + x^3 \cdot C^2\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C' = C^2x^2.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou nyní vyřešíme.

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = C^2x^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}C}{C^2} = \int x^2\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{C} = \frac{x^3}{3} + k \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{3}{x^3 + K}.$$

Obecné řešení naší rovnice je tedy

$$y = -\frac{1}{x(x^3 + K)}.$$

Navíc má rovnice ještě singulární řešení $y = 0$. Poznamenejme, že použili vztah mezi konstantami $3k = K$. □

Příklad 1.8. Najděte obecné řešení Bernoulliho rovnice

$$y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$$

Řešení. Vyřešíme homogenní lineární rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y \operatorname{tg} x = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln \frac{c}{|\cos x|} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{\cos x}.$$

Řešení zadané rovnice budeme hledat jako $y = \dfrac{C(x)}{\cos x}$:

$$C' \cdot \frac{1}{\cos x} + C \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) - \frac{C}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{C}{\cos x}\right)^4 \cos x \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{C^4}{\cos^2 x}.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, kterou nyní vyřešíme.

$$\frac{\mathrm{d}\,C}{\mathrm{d}x} = \frac{C^4}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}\,C}{C^4} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3C^3} = \operatorname{tg} x + k \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{\sqrt[3]{3(\operatorname{tg} x + k)}}.$$

Obecné řešení naší rovnice je tedy

$$y = -\frac{1}{\cos x \sqrt[3]{3(\operatorname{tg} x + k)}}.$$

Navíc má rovnice ještě singulární řešení $y = 0$. □

V následujícím příkladě vyřešíme rovnici z příkladu 1.6, v němž jsme tuto rovnici řešili pomocí integračního faktoru, jako rovnici Bernoulliho:

Příklad 1.9. Řešte rovnici

$$(x^2 + y^2 + x)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

Řešení. Rovnici upravíme na tvar Bernoulliho rovnice:

$$(x^2 + y^2 + x) = -y\,y' \Leftrightarrow y' = -y - \frac{x^2 + x}{y}.$$

Obecné řešení rovnice homogenní $y' = -y$ má tvar $y = \exp(-x) \cdot C$. Řešení nezkrácené rovnice předpokládáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{-x} C(x)$. Aplikací metody variace konstanty dostáváme

$$-\mathrm{e}^{-x}C + \mathrm{e}^{-x}C' = -\mathrm{e}^{-x}C - \frac{x^2 + x}{\mathrm{e}^{-x}C} \Leftrightarrow C'C = \int \mathrm{e}^{2x}(x^2 + x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow$$

$$\frac{C^2}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}x^2 - \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} 2x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{e}^{2x} x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}x^2 + K \Leftrightarrow C = \pm\sqrt{x^2\mathrm{e}^{2x} + k}.$$

Celkově dostáváme $y = \pm\exp(-x)\sqrt{x^2\mathrm{e}^{2x} + k}$ a toto řešení je možné vyjádřit také v implicitním tvaru

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x^2 + y^2) = C.$$

□

Příklad 1.10. Najděte obecné řešení rovnice

$$(2x^2 y \ln y - x)y' = y$$

Řešení. Tato rovnice není Bernoulliho rovnicí, ale záměnou závislosti proměnných

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{x'},$$

dostáváme z původní rovnice rovnici

$$(2x^2 y \ln y - x) = yx',$$

která je rovnicí Bernoulli, kde $a(y) = -1$, $n = 2$, $b(y) = 2y \ln y$. Obecné řešení rovnice homogenní $x'y = -x$ má tvar

$$x = \frac{C}{y}.$$

Řešení nezkrácené rovnice předpokládáme ve tvaru $x = \dfrac{C(y)}{y}$. Aplikací metody variace konstanty dostáváme

$$2\frac{C^2}{y^2} y \ln y - \frac{C}{y} = y\left(\frac{C'}{y} - \frac{C}{y^2}\right) \Leftrightarrow \int 2\frac{\ln y}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}\,C}{C^2} \Leftrightarrow \ln^2 y + K = -\frac{1}{C}.$$

Celkově je možné získat řešení dané diferenciální rovnice v implicitním tvaru

$$xy(K - \ln y^2) = 1.$$

□

Příklad 1.11. Najděte obecné řešení Riccatiho rovnice

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x} = 0,$$

jestliže řešením této rovnice je funkce $y_1 = 1/x$.

Řešení. Zavedeme substituci

$$y = \frac{1}{x} + u,$$

po které získáme Bernoulliovu rovnici ve tvaru:

$$3\left(-\frac{1}{x^2} + y'\right) + \left(\frac{1}{x} + u\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 3u' + \frac{2}{x}u + u^2 = 0,$$

Vzniklou Bernoulliovu rovnici řešíme tak, že nejdříve určíme obecné řešení lineární homogenní rovnice $3u' = -\dfrac{2}{3x}\,u$:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int -\frac{2}{3x}\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\frac{2}{3}\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{C}{\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Řešení Bernoulliovy rovnice budeme hledat metodou variace konstanty $u = \dfrac{C(x)}{\sqrt[3]{x^2}}$. Zderivováním a dosazením do rovnice dostaneme

$$3\left(\frac{C'}{\sqrt[3]{x^2}} + C\frac{-2/3}{\sqrt[3]{x^5}}\right) + \frac{2}{x}\frac{C}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{C^2}{\sqrt[3]{x^4}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,C}{C^2} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{C} = -3\sqrt[3]{x} + K.$$

C máme ve tvaru $C = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+K}$ a dosazením do předpokládaného tvaru řešení získáme řešení Bernoulliho rovnice:

$$u = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+K}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x + K\sqrt[3]{x^2}}.$$

Dalším řešení Bernoulliovy rovnice je singulární řešení $u = 0$.

Dosazením do transformačního vztahu nalezneme obecné řešení Riccatiho rovnice.

$$y = \frac{1}{x} + u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + K\sqrt[3]{x^2}}.$$

Můžete si všimnout, že ze zadání známé řešení $y_1 = 1/x$ z obecného řešení nedostaneme pro žádné K; toto řešení odpovídá singulárnímu řešení $u = 0$. $\square$

Příklad 1.12. Najděte obecné řešení Riccatiho rovnice

$$x^2y' + xy + x^2y^2 = 4.$$

Řešení. V tomto případě odhadneme partikulární řešení ve tvaru $y = A/x$ a po dosazení do rovnice určíme konstantu A:

$$x^2\frac{-A}{x^2} + x\frac{A}{x} + x^2\frac{A^2}{x^2} = 4 \Leftrightarrow A^2 = 4.$$

Zavedeme substituci

$$y = \frac{2}{x} + u,$$

po které získáme Bernoulliovu rovnici:

$$x^2\left(-\frac{2}{x^2} + u'\right) + x\left(\frac{2}{x} + u\right) + x^2\left(\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}u + u^2\right) = 4,$$

Tuto rovnici upravíme na tvar:

$$u' + \frac{5}{x}u + u^2 = 0$$

Rovnici řešíme tak, že nejdříve určíme obecné řešení zkrácené rovnice

$$u' = -\frac{5}{x}u \Leftrightarrow \frac{u'}{u} = -\frac{5}{x} \Leftrightarrow \ln|u| = -5\ln|x| + c \Leftrightarrow u = \frac{C}{x^5}$$

Aplikujeme metodu variace konstanty a předpokládáme řešení původní rovnice ve tvaru

$$u = \frac{C(x)}{x^5} \Leftrightarrow u' = \frac{C'(x)}{x^5} - 5\frac{C(x)}{x^6}$$

a po dosazení do původní rovnice dostáváme rovnici se separovanými proměnnými

$$\frac{C'}{x^5} - 5\frac{C}{x^6} + 5\frac{C}{x^6} + \frac{C^2}{x^{10}} \Leftrightarrow \frac{C'}{C^2} = -\frac{1}{x^5} \Rightarrow -\frac{1}{C} = \frac{1}{4x^4} + K = \frac{1+4x^4K}{4x^4} \Rightarrow C = \frac{-4x^4}{1+4x^4}$$

Řešení Bernoulliovy rovnice máme ve tvaru $u = \dfrac{-4x^4}{x^5(1+4x^4K)} = \dfrac{x}{x+x^5k}$ Dalším řešení Bernoulliovy rovnice je singulární řešení $u = 0$.

Dosazením do transformačního vztahu nalezneme obecné řešení Riccatiho rovnice.

$$y = \frac{2}{x} + u = \frac{2}{x} - \frac{4}{x+x^5k}$$

Můžete si všimnout, že „uhádnuté“ řešení $y_1 = 2/x$ z obecného řešení nedostaneme pro žádné K; toto řešení odpovídá singulárnímu řešení $u = 0$. □

1.3 Clairautova rovnice

Dosud probírané rovnice bylo možné převést na tzv, explicitní tvar $y' = f(x,y)$. Clairautova rovnice je příkladem diferenciální rovnice nerozřešené vzhledem derivaci y'.

1.3.1 Přehled základních pojmů

Clairautovou rovnicí rozumíme rovnici ve tvaru:

$$y = xy' + f(y'). \tag{1.9}$$

Řešení Clairautovy rovnice je známo a jsou to řešení dvou typů

1. řešeními Clairautovy rovnice jsou všechny přímky tvaru:

   $$y = cx + f(c), \tag{1.10}$$

   kde c je libovolná konstanta.

2. Rovnice (1.9) může mít ještě další řešení, které je vyjádřené parametricky:

   $$x = -f'(t), \quad y = f(t) - tf'(t). \tag{1.11}$$

   Toto řešení je singulární, protože jestliže $f''(t) \neq 0$, proto řešení (1.11) nedostaneme z řešení (1.10) pro žádnou volbu konstanty c. Naopak každá přímka (1.11) má s tímto řešení společný jeden bod, který je proto singulární.

1.3.2 Řešení typických příkladů

Příklad 1.13. Najděte řešení rovnice

$$y = xy' - \ln y' \,.$$

Řešení. V tomto příkladu je $f(y') = \ln y'$ proto je řešením každá přímka:

$$\underline{\underline{y = cx + \ln c}}, \quad c > 0.$$

Parametricky dané řešení (1.11) určíme ze vztahů $f(t) = -\ln t$, je $f'(t) = -1/t$,tedy další řešení zadané rovnice je

$$x = \frac{1}{t}, \quad y = -\ln t - t \cdot \frac{-1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad y = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \ln x + 1.$$

$\square$

1.4 Příklady pro samostatnou práci

Příklad S 1.1. Určete obecná řešení exaktních diferenciálních rovnic:

a) $$(2\,x + 4\,ay + \cos\,(axy)\,ay)\,\mathrm{d}x + a\,(4\,x + 8\,ay + \cos\,(axy)\,x)\,\mathrm{d}y = 0$$

b) $$\left(\frac{1}{x-y} + a^2\right)\mathrm{d}x + \frac{2y^2 - 2xy - 1}{x-y}\mathrm{d}y = 0$$

c) $$\left(\frac{ay}{y^2 + a^2x^2} + 2x\right)\mathrm{d}x + \left(3y^2 - \frac{ax}{y^2 + a^2x^2}\right)\mathrm{d}y = 0$$

d) $$y' = \frac{(y^2 - ax)\sin(x - ay) + a\cos(x - ay)}{(y^2 - ax)a\sin(x - ay) + 2y\cos(x - ay)}$$

e) $y' = \dfrac{2\,a^2x - y^2 - a^2y}{a^2x - 3y^2 + 2yx}$

f) $y' = \dfrac{2\,a^2x - y^2 - a^3y}{a^3x - 3\,ay^2 + 2\,yx}$

Příklad S 1.2. Určete obecná řešení diferenciálních rovnic s integračním faktorem:

a) $y' = \dfrac{2\,ax}{ax^2 - y^2 - y + 1}$

b) $y' = \dfrac{2\,ayx}{4\,y^2 + 3\,ay + 2\,ax^2}$

c) $y' = -\dfrac{y\,(2\,ax + y + 2\,a)}{2(ax + y)}$

d) $y' = \dfrac{3\,ay^2 + 3\,ay + 7\,x^2}{2\,xa\,(2\,y + 1)}$

e) $-\dfrac{y\,dx}{x} + \left(2\,\ln\left(\dfrac{ay}{x}\right) + 1\right)dy$

Příklad S 1.3. Určete obecná řešení Bernouliho diferenciálních rovnic 1. řádu:

a) $xy' = y - 2x^{a-1}y^a$

b) $xy' = ay + y^2$

c) $(x^2 + a^2)^2 y' = 2x(x^2 + a^2)y + 2xy^2$

d) $y' = y \operatorname{tg} x + y^{1-a} \sin x$

e) $y' = \dfrac{y^2 + a^2}{2ay(x^2 + 2x + 1 + (-1)^a a^2)}$

f) $y' = \dfrac{a+1}{a} \dfrac{y\sqrt[a]{y} + 1}{\sqrt[a]{y}\sqrt{(-1)^a(x^2 - a^2)}}$

Příklad S 1.4. Určete obecná řešení Riccatiho diferenciálních rovnic, kde a je přirozené číslo:

a) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = a^2$

b) $xy' - (2ax + 1)y + x^2 a^2 + y^2 = 0$

Příklad S 1.5. Určete obecná řešení Clairotových diferenciálních rovnic, kde a je přirozené číslo:

a) $y = xy' + ay'^2$

b) $y = xy' - (2ax + 1)y + x^2 a^2 + y^2 = 0$

Výsledky

1.1

a) $(x + 2\,ay)^2 + \sin(axy) = c$

b) $\ln(x - y) + a^2 x - y^2 = c$

c) $\operatorname{arctg} \frac{ax}{y} + x^2 + y^3 = c$

d) $(y^2 - ax)\cos(x - ay) = c$

e) $(x - y)(a^2 x - y^2) = c$

f) $(x - ay)(a^2 x - y^2) = c$

1.2

a) K upravené rovnici $2\,ax\mathrm{d}x + (ax^2 - y^2 - y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$ je integrační faktor e^y a řešení je dáno implicitně $(ax^2 - y^2 + y)\,\mathrm{e}^y = C$

b) K upravené rovnici $2\,ayx\mathrm{d}x + (4\,y^2 + 3\,ay + 2\,ax^2)\,\mathrm{d}y = 0$ je integrační faktor y a řešení je dáno implicitně $(ax^2 + y^2 + ay)\,y^2 = C$

c) K upravené rovnici $y\,(2\,ax + y + 2\,a)\mathrm{d}x + 2(ax + y)\mathrm{d}y = 0$ je integrační faktor e^x a řešení je dáno implicitně $e^x\,(2ax + y)\,y = C$

d) K upravené rovnici

$$\left(3\,ay^2 + 3\,ay + 7\,x^2\right)\left(x^2 + ay^2 + ay\right)\mathrm{d}x + 2\,x\left(x^2 + ay^2 + ay\right)a\,(2\,y + 1)\,\mathrm{d}y$$

je integrační faktor x^2 a řešení je dáno implicitně $x^3\left(x^2 + ay^2 + ay\right)^2 = C$

e) Integrační faktor je y a řešení je dáno implicitně $y^2 \ln\left(\frac{ay}{x}\right) = C$

1.3

a) $y = x\,\sqrt[1-a]{C + x^{2(a-1)}}$

b) $y = -\dfrac{ax^a}{C + x^a}$

c) $y = \dfrac{x^2 + a^2}{C - \ln(x^2 + a^2)}$

d) $y = \dfrac{\sqrt[a]{C - \frac{a}{a+1}\cos^{a+1} x}}{\cos x}$

e) řešení se liší podle toho zda je parametr sudý nebo lichý

Pro sudé a $y = \pm\sqrt{C\exp\left(\frac{\arctan\frac{x+1}{a}}{a^2}\right) - a^2}$

Pro liché a $y = \pm\sqrt{C\sqrt[2a^2]{\frac{x+1+a}{x+1-a}} - a^2}$

1.4

a) partikulární řešení je funkce $y = \frac{a}{x}$ po trasformaci dostáváme Bernoulliho rovnici

$$u'(x)\cdot x^2 + u(x)\cdot xx + 2\,au\,(x)\,x + (u\,(x))^2\,x^2 = 0,$$

která má řešení $\frac{-2\,a}{x - 2\,x^{1+2\,a}C\,a}$ a celkově dostáváme řešení Riccatiho rovnice

$$y = \frac{a}{x} - 2\,\frac{a}{x - 2\,x^{1+2\,a}C\,a}$$

b) partikulární řešení je funkce $y = a\,x$ po trasformaci dostáváme Bernoulliho rovnici

$$xu'\,(x) - u\,(x) + (u\,(x))^2 = 0,$$

která má řešení $u\,(x) = \frac{x}{x+C}$ a celkově dostáváme řešení Riccatiho rovnice

$$y = ax + \frac{x}{x+C}$$

1.5

a) řešením je každá přímka

$$y = cx + ac^2$$

Parametricky zadané řešení je dáno rovnicemi

$$x = 2t \quad y = at^2 - t2\,at = -at^2 \quad \Rightarrow \quad y = -a\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

b) řešením je každá přímka

$$y = cx + \sqrt{a^2 + c^2}$$

Parametricky zadané řešení je dáno rovnicemi

$$x = \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} \quad y = \sqrt{a^2+t^2} - t\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{t^2}{a^2+t^2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{a^2x^2}{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2x^2}{1-x^2}}} = a\sqrt{1-x^2}.$$

2 Systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Systémy lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu lze řešit více metodami. Při řešení metodou eliminační nahradíme tuto úlohu řešením lineární rovnice jedné obvykle řádu n. Tyto umíme řešit především jsou-li s konstantními koeficienty. Další možností je řešení pomocí vlastních čísel a vektorů. U charakteristických rovnic s vlastními čísly, které mají větší algebraickou násobnost než geometrickou je třeba používat Weyrovu teorii konstrukce systému zobecněných vlastních vektorů. Dále je možné použít exponenciálu matice.

2.1 Metoda eliminanční

Základem eliminační metody je nahrazení systému n rovnic o n neznámých systémem $n-1$ rovnic o $n-1$ neznámých tak, že si v původním systému zvolíme jednu neznámou a tuto obvykle s využitím jedné rovnice nahradíme zbývajícími proměnnými. Toto vyjádření dosadíme do zbývajících rovnic. Obvykle tak nahradíme původní úlohu řešením lineární rovnice jedné obvykle řádu n. Poznamenejme, že tuto metodu je vhodné užívat na „menší“ systémy (2 – 3 rovnice).

2.1.1 Přehled základních pojmů

Postup při aplikaci této metody je možné provádět mnoha způsoby. Lze však jednoznačně algoritmizovat nalezení jedné rovnice vyššího řádu pro předem zvolenou proměnnou. Tento postup lze popsat slovy:

- Vybereme si rovnici na jejíž levé straně je první derivace hledané složky řešení a tuto derivujeme. Do pravé strany derivované rovnice dosadíme pravé strany odpovídajících derivací v původním systému. Získáme tak rovnici na jejíž levé straně stojí druhá derivace hledané složky řešení a na pravé straně lineární kombinace nederivovaných složek řešení.

- Tento postup ještě $n-1$ krát opakujeme a získáme tak systém rovnic na jejichž jedné straně stojí pouze derivace vybrané složky řešení a na druhé lineární kombinace nederivovaných složek řešení.

- Takto získaný systém, který je vzhledem nederivovaným složkám řešení systémem lineárních (algebraických) rovnic vyřešíme a toto řešení má pro zvolenou složku řešení tvar hledané lineární diferenciální rovnice nejvýše n řádu.

2.1.2 Řešení typických příkladů

Příklad 2.1. Nalezněte obecné řešení nehomogenního systému

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + 1 - 2t + e^t \\ x_2'(t) &= 4x_1(t) - 3x_2(t) - 4t + e^t. \end{aligned}$$

Řešení. Z první rovnice určíme funkci $x_2(t)$

$$x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 1 - 2t + e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = -x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^t \tag{2.1}$$

a dosadíme ji do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} -x_1''(t) + 2x_1'(t) - 2 + e^t &= 4x_1(t) - 3(-x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^{-t}) - 4t + e^t \\ x_1''(t) + x_1'(t) - 2x_1(t) &= 1 - 2t + 3e^{-t}. \end{aligned}$$

Nejdříve stanovíme obecné řešení rovnice homogenní pomocí charakteristické rovnice:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

a obecné řešení homogenní rovnice je $y(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t}$. Partikulární řešení pomocí principu superpozice předpovíme ve tvaru:

$$X_1(t) = A + Bt + Cte^t \Rightarrow X_1'(t) = B + Ce^t(t+1) \Rightarrow X_1''(t) = Ce^t(t+2).$$

Dosadíme do rovnice a z rovnosti určíme zatím neznámé konstanty:

$$\begin{aligned} Ce^t(t+2) + B + Ce^t(t+1) - 2+ &= 1 - 2t - 3e^t \\ B - 2A - 2Bt + 3Ce^t &= 1 - 2t + 3e^t. \end{aligned}$$

Konstanty $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ dosadíme do předpovězeného tvaru partikulárního řešení a dostáváme obecné řešení:

$$x_1(t) = C_1e^t + c_2e^{-2t} + t(e^t + 1).$$

Toto řešení dosadíme do (2.1) a získáme i druhou složku řešení původního systému:

$$\begin{aligned} &x_2(t) = -x_1'(t) + 2x_1(t) + 1 - 2t + e^t = \\ &-(C_1e^t - 2C_2e^{-2t} + e^t(t+1) + 1) + 2(C_1e^t + C_2e^{-2t} + t(e^t+1)) + 1 - 2t + e^t = C_1e^t + 4C_2e^{-2t} + te^t. \end{aligned}$$

Obě složky tvoří řešení systému a můžeme je zapsat pomocí maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} t(e^t+1) \\ te^t \end{pmatrix}.$$

□

Dále budeme řešit systém 3 rovnic. Aby byl postup přehlednější omezíme se na systém homogenní.

Příklad 2.2. Pomocí eliminační metody řešte systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & 3x(t) & -y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & +y(t) & +z(t) \\ z'(t) & = & 4x(t) & -y(t) & +4z(t) \end{array}$$

Řešení. Pro zjednodušení zápisu vynecháme zápis nezávisle proměnné t . Budeme postupovat tak, že z první rovnice vyjádříme proměnou z:

$$z = x' - 3x + y \quad \Rightarrow \quad z' = x'' - 3x' + y'.$$

Po dosazení do zbylých dvou rovnic (druhé a třetí) dostáváme:

$$\begin{array}{rcrrrrr} y' & = & x & +y & +x' & -3x & +y \\ x'' - 3x' + y & = & -4x & -y & +4x' & -12x & 3y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} -x' + y' & = & -2x + 2y \\ x'' - 7x' - y' & = & -8x + 3y \end{array}$$

Odečtením první rovnice od druhé nalezneme vyjádření proměnné y na x:

$$x'' - 6x' = -6x + y \quad \Rightarrow \quad y = x'' - 6x' + 6x \quad \Rightarrow \quad y' = x''' - 6x'' + 6x'.$$

Tento substituční vztah je nezávislý na obou rovnicích zvolíme si pro dosazení tu jednodušší z obou:

$$-x' + x''' - 6x'' + 6x' = -2x + 2(x'' - 6x' + 6x) \quad \Rightarrow \quad x''' - 8x'' + 17x' - 10x = 0.$$

Tato rovnice má charakteristickou rovnici $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0$. Čtenář si snadno ověří, že má tři různé reálné kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, proto obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{5t} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x''(t) = C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 25C_3 e^{5t}.$$

Postupným dosazením určíme další složky řešení

$$\begin{aligned} y(t) &= x''(t) - 6x'(t) + 6x(t) \\ &= C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} + 25C_3 e^{5t} - 6(C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{5t}) + 6(C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}) = \\ &= C_1 e^t 2 - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= x'(t) - 3x(t) + y(t) = \\ &= C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{5t} - 3(C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 5C_3 e^{5t}) + C_1 e^t 2 - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t} = \\ &= -C_1 e^t 2 - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t} \end{aligned}$$

$\square$

V dalším příkladě ukážeme postup kdy nám eliminační metodou vznikne rovnice nižšího řádu než n–tého.

Příklad 2.3. Pomocí eliminační metody řešte systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & -2x(t) & +y(t) & -2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & -2y(t) & +2z(t) \\ z'(t) & = & 3x(t) & -3y(t) & +5z(t) \end{array}$$

Řešení. I nyní vynecháme zápis nezávisle proměnné t . Budeme postupovat tak, že z první rovnice vyjádříme proměnou y:

$$y = x' + 2x + 2z \quad \Rightarrow \quad y' = x'' + 2x' + 2z'.$$

Po dosazení do zbylých dvou rovnic (druhé a třetí) dostáváme:

$$\begin{array}{rcrrr} x'' + 2x' + 2z' & = & x & -2(x' + 2x + 2z) & +2z \\ z' & = & 3x & -3(x' + 2x + 2z) & +5z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x'' + 2x' + 2z' & = & -3x - 2z \\ 3x' + z' & = & -3x - z \end{array}$$

Odečtením dvojnásobku druhé rovnice od první rovnice dostaneme rovnici druhého řádu pro proměnou x:

$$x'' - 2x' - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1,$$

proto obecné řešení této rovnice je

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \quad \Rightarrow \quad x'(t) = C_1\, 3\, \mathrm{e}^{3t} - C_2 \mathrm{e}^{-t}$$

Po dosazení do druhé rovnice získáme pro neznámou $z(t)$ diferenciální rovnici prvního řádu, kterou vyřešíme:

$$3(C_1\, 3\, \mathrm{e}^{3t} - C_2 \mathrm{e}^{-t}) + z'(t) = -3(C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 \mathrm{e}^{5t}) - z(t) \quad \Rightarrow \quad z'(t) + z(t) = -12\, C_1 \mathrm{e}^{3t}.$$

Jedná se lineární diferenciální rovnici 1. řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Konstantu v obecném řešení označíme C_3. Rovnice má řešení:

$$z(t) = C_3 \mathrm{e}^{-t} - 3C_1 \mathrm{e}^{3t}.$$

Neznámou $y(t)$ získáme dosazením proměnných $x(t)$ a $z(t)$ do substitučního vztahu:

$$\begin{aligned} y(t) &= x'(t) + 2x(t) + 2z(t) = \\ &\quad C_1\, 3\, \mathrm{e}^{3t} - C_2 \mathrm{e}^{-t} + 2(C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t}) 2(C_3 \mathrm{e}^{-t} - 3C_1 \mathrm{e}^{3t}) = -C_1 \mathrm{e}^{3t} + (C_2 + 2C_3) \mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

□

2.2 Homogenní systémy lineárních rovnic – metoda vlastních čísel a vektorů

Tato metoda je založena na řešení charakteristické rovnice, která je maticová a je analogií známého postupu pro hledání obecného řešení lineární diferenciální rovnice n–tého řádu s konstantními koeficienty.

2.2.1 Přehled základních pojmů

Charakteristickou rovnicí ke čtvercové matici A řádu n rozumíme $\det(A - \lambda E_n) = 0$, kde E_n je jednotková matice stejného řádu. Na levé straně charakteristické rovnice je vzhledem k λ polynom řádu n, jeho kořeny se nazývají vlastní čísla matice A. Ke každému vlastnímu číslu existuje alespoň jeden vlastní vektor (nenulový, sloupcový) v, pro který platí $Av = \lambda v$. Násobnost kořene λ charakterického polynomu se nazývá algebraickou násobností vlastního čísla a počet vlastních vektorů přiřazených tomuto vlastnímu číslu se nazývá geometrická násobnost vlastního čísla. Je-li v vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ matice A, potom vektor $y(t) = v\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ je řešením systému lineárních diferenciálních rovnic $y' = Ay$. V případě komplexních vlastních čísel existují tyto ve dvojicích komplexně sdružených vlastních čísel a k nim odpovídající vektory jsou také komplexně sdružené. Řešeními dané soustavy jsou reálná a imaginární část komplexního vektoru, který je podobně jako v reálném případě součinem vlastního vektoru s exponenciálou součinu vlastního čísla s nezávisle proměnnou. V případě vlastních čísel, které mají stejnou algebraickou a geometrickou násobnost tak získáme n–tici lineárně nezávislých funkcí a obecné řešení je ve tvaru jejich lineární kombinace.

2.2.2 Řešení typických příkladů

Nejdříve vyřešíme systémy řádu 3, které jsme vyřešili eliminační metodou.

Příklad 2.4. Pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů řešte systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & 3x(t) & -y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & +y(t) & +z(t) \\ z'(t) & = & 4x(t) & -y(t) & +4z(t) \end{array}$$

Řešení. Z matice soustavy určíme charakteristickou rovnici a vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\,\lambda^2 + 17\,\lambda - 10 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5) = 0.$$

Hledání vlastního vektoru spočívá v nalezení nenulového řešení $(v_1, v_2, v_3)^T$ homogenního systému lineárních rovnic. Určíme vlastní vektor k číslu $\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad v_1 = -p,\ v_2 = -p,\ v_3 = p.$$

Toto řešení jsme získali vynecháním poslední rovnice, která je lineárně závislá , neboť je součtem rovnice první s dvojnásobkem rovnice druhé. Z té je parné, že při parametrizaci proměnné $v_3 = p$ dostáváme hodnotu $v_1 = -p$ a dosazením do rovnice první určíme hodnotu $v_2 = -p$. Podobně určíme i další vlastní čísla a vektory. Pro $\lambda = 2$ dostáváme:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \qquad v_1 = -p,\ v_2 = 2p,\ v_3 = 3p.$$

V tomto případě jsou dva řádky stejné, proto jsme jej vynechali a od třetího jsme odečetli jeho čtyřnásobek. Pro $\lambda = 5$ dostáváme:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad v_1 = p,\ v_2 = p,\ v_3 = 3p.$$

Třetí rovnici jsme přičetli k první a druhé. Vzniklé rovnice jsou lineárně závislé, neboť jsou vzájemným násobkem. Parametrizujeme první proměnnou.

Dostáváme tak trojici lineárně nezávislých vektorových funkcí a obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} =$$
$$\begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{2t} + c_3\mathrm{e}^{5t} \\ C_1\mathrm{e}^t - 2C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{5t} \\ -C_1\mathrm{e}^t - 3C_2\mathrm{e}^{2t} + 3C_3\mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 2.5. Pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů řešte systém lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & -2x(t) & +y(t) & -2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & -2y(t) & +2z(t) \\ z'(t) & = & 3x(t) & -3y(t) & +5z(t) \end{array}$$

Řešení. I nyní vynecháme zápis nezávisle proměnné t . Z matice soustavy určíme charakteristickou rovnici a vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\,\lambda^2 + 17\,\lambda - 10 = (\lambda-3)(\lambda+1)^2 = 0.$$

Pro $\lambda = 3$ dostáváme:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -24 & 8 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -4 & 0 \end{array}\right] \qquad v_1 = -p,\ v_2 = p,\ v_3 = 3p.$$

Pro $\lambda = -1$ dostáváme:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{lll} v_1 = p, & v_2 = p, & v_3 = 0, \\ u_1 = 0 & u_2 = 2p & u_3 = p \end{array}$$

Protože hodnost matice $A + E$ je 2, bylo možné nalézt dva lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu -1. Protože geometrická násobnost vlastní čísel je stejná jako algebraická získali jsme trojici lineárně nezávislých vektorových funkcí a jejich lineární kombinace tvoří obecné řešení

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{-t} \\ -C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + 2C_3\mathrm{e}^{-t} \\ -3C_1\mathrm{e}^{3t} + C_3\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

□

Případ komplexních kořenů charakteristické rovnice řeší další příklad

Příklad 2.6. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= -x_1 + 2x_2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Řešení. Soustava má matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Určíme její vlastní čísla z charakteristické rovnice

$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

Hledaná vlastní čísla jsou komplexní: $\lambda_1 = 2 + i$ a $\lambda_2 = 2 - i$, což dvojice komplexně sdružených vlastních čísel. Určíme nyní vlastní vektory, odpovídající prvnímu vlastnímu číslu. Vlastní vektor $v_1 = (v_{11}, v_{12})^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 2 + i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$o = (A - \lambda_1 E)v_1 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot v_1 = o..$$

První řádek je i-násobkem druhého, proto se soustava redukuje na jediný vztah

$$-iv_{11} + v_{12} = 0$$

a jedno nenulové řešení můžeme volit např. $v_1 = (1, i)^T$. Řešení soustavy (2.2) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{(2+i)t} = (1, i)^T \cdot \mathrm{e}^{2t}(\cos t + i \sin t) = \mathrm{e}^2 t \cdot \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení, tj. reálný fundamentální systém $y_1(t)$, $y_1(t)$ soustavy (2.2):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + \overline{x}(t)) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \\ x_2(t) &= \operatorname{Im} x(t) = \frac{1}{2i}(x(t) - \overline{x}(t)) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obecné řešení $x(t)$ soustavy (2.2) je dáno lineární kombinaci

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \cdot \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1 a C_2. □

V následujícím příkladě si ukážeme, že při hledání řešení systému, který nemá násobná vlastní čísla, budeme oba postupy kombinovat. Postup již nebudeme detailně rozepisovat.

Příklad 2.7. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & -2x_1 & + & 5x_2, & - & 5x_3 \\ x_2' & = & & - & x_2 & + & 2x_3, \\ x_3' & = & x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3. \end{array} \tag{2.3}$$

Řešení. Soustava (2.3)má matici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Určíme vlastní čísla matice A z charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & -5 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Hledané kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ a $\lambda_3 = -i$ jsou tři nenásobná a různá vlastní čísla. Jedno reálné a dvě komplexně sdružená.
Hledejme vlastní vektory, odpovídající vlastním číslům. První vlastní vektor

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^T,$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda_1 E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o.$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, je-li první proměnná nulová a druhá rovna třetí. Jedno takové nenulové řešení je například $v_1 = (0, 1, 1)^T$. Řešení soustavy (2.3) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t), x_{13}(t)) = (0, 1, 1)^T \cdot \mathrm{e}^t.$$

Druhý vlastní vektor $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = i$ je libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$o = (A - \lambda E)v = \begin{pmatrix} -2-i & 5 & -5 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o..$$

Přičteme-li k prvnímu řádku třetí řádek vynásobený číslem $2+i$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} 0 & -1-3i & 4+2i \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o.$$

Dále přičtěme k prvnímu řádku -(2+i) násobek druhého řádku a získáme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 1 & -3 & 4-i \end{pmatrix} \cdot v = o.$$

Nyní snadno určíme jedno nenulové řešení. Je jím například vektor $v_2 = (1-3i, 2, 1+i)^T$. Řešení soustavy (2.3) odpovídající tomuto vlastnímu vektoru a vlastnímu číslu je

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1-3i, 2, 1+i)^T \cdot (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t + i(\sin t - 3\cos t) \\ 2\cos + 2i \sin t \\ \cos t - \sin t + i(\sin t + \cos t) \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme dvojici lineárně nezávislých reálných řešení $x_2(t)$, $x_3(t)$ soustavy (2.3), odpovídajících komplexnímu řešení $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \operatorname{Re} x(t) = \frac{1}{2}(x(t) + \overline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ y_3(t) &= \operatorname{Im} x_2(t) = \frac{1}{2i}(x(t) - \overline{x}(t)) = \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení soustavy (2.3) je tvořen trojicí lineárně nezávislých řešení

$$\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}.$$

Její obecné řešení $x(t)$ je dáno lineární kombinací

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t - 3\cos t \\ 2\sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. □

2.3 Zobecněné vlastní vektory, Weyrova metoda

Zobecněné vlastní vektory doplňují metodu vlastních čísel a vektorů a řeší případ kdy vlastní čísla matice mají větší algebraickou než geometrickou násobnost. Umožňuje tak nalézt n-tici lineárně nezávislých řešení i v tomto případě.

2.3.1 Přehled základních pojmů

Vektor v nazýváme **zobecněným vlastním vektorem hodnosti** r, odpovídající vlastnímu číslu λ, jestliže platí

$$(A-\lambda E)^r v = o \tag{2.4}$$

a

$$(A-\lambda E)^{r-1} v \neq o. \tag{2.5}$$

Je-li dán zobecněný vlastní vektor v hodnosti r, odpovídající vlastnímu číslu λ, pak k němu definujeme odpovídající **řetězec zobecněných vlastních vektorů** $v_1, v_2, \dots, v_r$ **délky** r takto:

$$\begin{cases} v_r &= v, \\ v_{r-1} &= (A-\lambda E)v_r &= (A-\lambda E)v, \\ v_{r-2} &= (A-\lambda E)v_{r-1} &= (A-\lambda E)^2 v, \\ \dots \\ v_1 &= (A-\lambda E)v_2 &= (A-\lambda E)^{r-1} v. \end{cases} \tag{2.6}$$

Poznamenejme, že z uvedené podmínky (2.4) okamžitě vyplývá, že vektor v_1 je vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu λ, neboť dle (2.5) a (2.6) je $v_1 \neq o$ a dle (2.4) je $(A-\lambda E)v_1 = o$. Jednomu vlastnímu číslu může odpovídat několik různých řetězců, které mohou mít různé délky. K řetězci zobecněných vlastních vektorů splňujících 2.6 definujeme r-tici nezávislých vektorových funkcí, které jsou řešeními zadaného systému:

$$y_1 := v_1 \mathrm{e}^{\lambda t} \quad y_2 := (v_1 t + v_2)\mathrm{e}^{\lambda t} \quad y_3 := \left(v_1 \cdot \frac{t^2}{2} + v_2 t + v_3\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + \dots$$
$$\dots y_r := \left(v_1 \cdot \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + v_2 \cdot \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} v_{r-1} t + v_r\right)\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Při hledání vektoru v_r postupujeme tak, že ve vektorovém prostoru řešení algebraické rovnice $A-\lambda E = 0$ hledáme ta řešení, pro která existují nejdelší řetězce. Počet a délku jednotlivých řetězců stanovíme z maticových charakteristik. Nechť je λ k-násobným $(2 \leq \leq k \leq n)$ kořenem charakteristické rovnice. Utvoříme posloupnost matic

$$\begin{aligned} &(A-\lambda E)^0 = E, \\ &(A-\lambda E)^1 = A-\lambda E, \\ &(A-\lambda E)^2, \\ &(A-\lambda E)^3, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$(A - \lambda E)^m, \tag{2.7}$$

kde číslo m určíme tak, aby matice $(A - \lambda E)^m$ měla hodnost $n - k$. Přiřaďme jim posloupnost jejich hodností

$$h_0, h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m.$$

V této posloupnosti je $n = h_0$. Lze dokázat, že pro tyto hodnosti platí

$$h_0 > h_1 > h_2 > h_3 > \cdots > h_m = n - k$$

a že pro posloupnost nulit uvedených matic, což je rozdíl rozměr matice mínus její hodnost, platí:

$$0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots < \nu_m = k.$$

Počet matic v posloupnosti (2.7) je $m + 1$. Definujme dále čísla

$$\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0, \sigma_2 = \nu_2 - \nu_1, \ldots, \sigma_m = \nu_m - \nu_{m-1},$$

která se nazývají **charakteristiky matice** A (odpovídající vlastnímu číslu λ). Platí pro ně vztahy:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_m$$

a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m = k. \tag{2.8}$$

Charakteristiky matice A určují rozmístění řetězců zobecněných vlastních vektorů v_{js}, $j = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, \sigma_j$, odpovídajících zobecněných vlastním vektorům

$$v_{m1}, \ldots, v_{m\sigma_m}, v_{m-1,\sigma_m+1}, \ldots, v_{m-1,\sigma_{m-1}}, \ldots, v_{2\sigma_2}, \ldots, v_{1\sigma_1}, \tag{2.9}$$

které jsou rozmístěny v tabulce, která má m řádků a σ_1 sloupců:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
v_{11} & v_{12} & \vdots & v_{1\sigma_m} & v_{1,\sigma_m+1} & \vdots & v_{1,\sigma_{m-1}} & \vdots & v_{1\sigma_2} & \vdots & v_{1\sigma_1} \\
\hline
v_{21} & v_{22} & \vdots & v_{2\sigma_m} & v_{2,\sigma_m+1} & \vdots & v_{2,\sigma_{m-1}} & \vdots & v_{2\sigma_2} \\
\cline{1-9}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cline{1-8}
v_{m-1,1} & v_{m-1,2} & \vdots & v_{m-1,\sigma_m} & v_{m-1,\sigma_m+1} & \vdots & v_{m-1,\sigma_{m-1}} \\
\cline{1-7}
v_{m1} & v_{m2} & \vdots & v_{m\sigma_m} \\
\cline{1-4}
\end{array} . \tag{2.10}$$

Počet vektorů v každém řádku je určen příslušnou charakteristikou. Je-li například $\sigma_2 = 4$, znamená to, že ve druhém řádku (určeném indexem charakteristiky) tabulky (2.10) jsou čtyři (lineárně nezávislé) vektory. Obecně je v j-tém řádku tabulky celkem σ_j vektorů. Protože je součet všech charakteristik roven k (viz vztah (2.8)), počet všech vektorů v tabulce je také roven číslu k, tj. násobnosti vlastního čísla λ. Každý vektor v tabulce (2.10) je nenulový.

2.3.2 Řešení typických příkladů

Příklad 2.8. Určete obecné řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 2x_3. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Řešení. Soustava má matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A jako řešení charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

tj. rovnice

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \text{(po úpravě)} \ = -(\lambda - 1)^3 = 0.$$

Vlastní číslo je jen jedno: $\lambda = \lambda_{1,2,3} = 1$ a je trojnásobné.
Hledejme odpovídající vlastní vektor

$$v_1 = (v_1^1, v_1^2, v_1^3)^T.$$

Bude jím libovolný nenulový vektor, splňující vztah

$$(A - \lambda E)v_1 = o.$$

Jeho rozepsáním dostáváme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot v_1 = o. \tag{2.12}$$

Snadno lze ověřit, že matice soustavy (2.12) má hodnost $h = 1$ a nulitu $\nu = 3 - 1 = 2$. Vlastnímu číslu tedy budou odpovídat dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Jsou jimi například vektory $v_{1a} = (-1, 0, 1)^T$ a $v_{1b} = (0, 1, -1)^T$. Jeden z vlastních vektorů však musí být zobecněným vlastním vektorem délky 2. Bude to takový vektor, pro který existuje netriviální řešení v_{21} jedné ze soustav

$$(A - \lambda E)v_{21} = v_{1a}, \quad \text{resp.} \quad (A - \lambda E)v_{21} = v_{1b}. \tag{2.13}$$

Snadno ověříme, že každá soustava (2.13) má pouze triviální řešení $v_{21} = (0, 0, 0)$. Výběr vlastních vektorů v_{1a}, v_{1b} tedy neumožňuje najít nenulový vektor v_{21}, přestože takový vektor musí existovat, je-li pravá strana vhodně zvolena.

Pokusíme se vybrat pravou stranu v soustavě (2.13) tak, aby nenulový vektor v_{21} existoval. Libovolná lineární kombinace

$$\alpha v_{1a} + \beta v_{1b}$$

je opět vlastním vektorem. Pokusíme se určit parametry α a β tak, aby soustava

$$(A - \lambda E)v_2 \;=\; \alpha v_{1a} + \beta v_{1b} \tag{2.14}$$

měla nenulové řešení. Aplikací Frobeniovy věty (hodnost matice soustavy se rovná hodnosti matice rozšířené) ihned dospíváme $\alpha = \beta/2$. Volíme například $\beta = 2$, $\alpha = 1$ a místo původní dvojice vlastních vektorů v_{1^a}, v_{1^b} definujme novou dvojici

$$v_{11} = v_{1a} + 2v_{1b} = (-1, 2, -1)^T, \quad v_{12} = v_{1a}.$$

Soustava

$$(A - \lambda E)v_{21} \;=\; v_{11} \tag{2.15}$$

má netriviální řešení $v_{21} = (-1, 1, -1)$. Fundamentální systém řešení soustavy (2.11) je tvořen trojicí vektorů

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t, \quad \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] \cdot \mathrm{e}^t.$$

Obecné řešení je dáno lineární kombinaci

$$\begin{array}{rcrcr} x_1(t) & = & -(C_1 + C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t & - & C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\ x_2(t) & = & (2C_2 + C_3) \cdot \mathrm{e}^t & + & 2C_3 t \cdot \mathrm{e}^t, \\ x_3(t) & = & (C_1 - C_2 - C_3) \cdot \mathrm{e}^t & - & C_3 t \cdot \mathrm{e}^t. \end{array} \tag{2.16}$$

s libovolnými konstantami C_1, C_2 a C_3. □

Abychom ukázali užití maticových charakteristik při stanovování zobecněného systému vektorů budeme toto demonstrovat na maticích čtvrtého řádu. Pro úspornost zápisu nebudou dílčí kroky detailně rozepisovány.

Příklad 2.9. Pomocí zobecněných vlastních vektorů nalezněte obecné řešení systém lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & 8x_2(t) & + & 3x_3(t) & - & 10x_4(t) \\ x_2'(t) & = & & & 2x_2(t) & & & - & x_4(t) \\ x_3'(t) & = & x_1(t) & - & x_2(t) & - & 2x_3(t) & + & 5x_4(t) \\ x_4'(t) & = & x_1(t) & - & 2x_2(t) & - & 2x_3(t) & + & 5x_4(t) \end{array}$$

Řešení. Systém ma matici soustavy $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ Charakteristická rovnice matice soustavy je

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 8 & 3 & -10 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda & 5 \\ 1 & -2 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda-1)^4.$$

Hledáme vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 1$, tj. řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 8 & 3 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 8 & 3 & -10 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Při úpravách jsme postupovali tak, že nejdříve jsme vyměnili třetí řádek s prvním, potom jsme pomocí tohoto prvního řádku vytvořili nuly pod diagonálou v prvním sloupci tak, že jsme dvojnásobek prvního řádku přičetli ke třetímu a první řádek jsme odečetli od čtvrtého. V dalším kroku jsme pomocí druhého řádku vytvořili nuly pod diagonálou ve druhém sloupci tak, že jsme šestinásobek druhého řádku odečetli od třetího řádku a druhý řádek jsme přičetli ke čtvrtému řádku. Protože poslední dva řádky jsou lineárně závislé úpravy jsou u konce.

Protože hodnost charakteristické matice $A - E$ je 3 existuje (až na násobek) jeden charakteristický vektor $v_1 = (2, 1, 2, 1)$ a systém zobecněných vektorů je tvořen jedním řetězcem délky 4. Abychom určili zbývající vektory budeme třikrát řešit systém lineárních rovnic se stejnou maticí soustavy a pouze jinou pravou stranou. Zápis zkrátíme tak, že současně budeme zapisovat tři sloupce pravých stran:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -2 & 8 & 3 & -10 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 3 & -10 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & -3 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Pro první sloupec dostáváme: $v_{21}^3 - 2v_{21}^4 = 0,\ v_{21}^2 - v_{21}^4 = 1,\ v_{21}^1 - v_{21}^2 - 3v_{21}^3 + 5v_{21}^4 = 2$. Volbou $v_{21}^4 = 0$ dostáváme vektor $v_{21} = (3,1,0,0)^T$, který je uveden ve druhém sloupci. Pro druhý sloupec dostáváme: $v_{31}^3 - 2v_{31}^4 = 1,\ v_{31}^2 - v_3^4 = 1,\ v_{31}^1 - v_{31}^2 - 3v_{31}^3 + 5v_{31}^4 = 0$. Volbou $v_{31}^4 = -1$ dostáváme vektor $v_{31} = (2,0,-1,-1)^T$, jenž je s opačnými znaménky uveden ve třetím sloupci. Pro třetí sloupec nalezneme řešení ve tvaru $v_{41} = (-1,0,0,0)^T$. Nyní sestavíme čtyři lineárně nezávislé vektorové funkce

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \mathrm{e}^t,\quad \left[\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} t\right] \mathrm{e}^t,\quad \left[\begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \frac{t^2}{2}\right] \mathrm{e}^t,$$
$$\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix} \frac{t^3}{6}\right] \mathrm{e}^t,$$

Tedy obecné řešení systému 2.16 je dáno vektorovou funkcí:

$$\begin{pmatrix} \left(2C_1 + 3C_2 + 4C_3 - C_4 + t(2C_2 + 3C_3 + 4C_4) + \frac{t^2}{2}(2C_3 + 3C_4) + \frac{t^3}{3}C_4\right) \mathrm{e}^t \\ \left(C_1 + C_2 + C_3 + t(C_2 + C_3 + C_4) + \frac{t^2}{2}(C_3 + C_4) + \frac{t^3}{6}C_4\right) \mathrm{e}^t \\ \left(2\,C_1 + C_3 + t(2\,C_2 + C_4) + t^2 C_3 + \frac{t^3}{3}\,C_4\right) \mathrm{e}^t \\ \left(C_1 + C_2\,t - C_3 + \frac{t^2}{2}\,C_3 - C_4\,t + \frac{t^3}{6}\,C_4\right) \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

□

Příklad 2.10. Pomocí zobecněných vlastních vektorů nalezněte obecné řešení systém lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) &=& 2x_1(t) &+& 5x_2(t) &+& x_3(t) &-& 5x_4(t) \\ x_2'(t) &=& & & 4x_2(t) & & &-& x_4(t) \\ x_3'(t) &=& -x_1(t) &+& 5x_2(t) &+& 4x_3(t) &-& 5x_4(t) \\ x_4'(t) &=& & & x_2(t) & & &+& 2x_4(t) \end{array} \tag{2.17}$$

Řešení. Systém ma matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Charakteristická rovnice matice soustavy je

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 4-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 12\,\lambda^3 + 54\,\lambda^2 - 108\,\lambda + 81 = (\lambda-3)^4.$$

Charakteristická matice soustavy odpovídající jedinému vlastnímu číslu $\lambda = 3$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

má zřejmě hodnost 2, neboť třetí řádek je stejný jako první a čtvrtý řádek je stejný jako druhý. To znamená, že matice A má dva charakteristické vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 3$. Navíc druhá mocnina C^2 je nulová matice, která má hodnost 0, proto posloupnost nulit je $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 4 - 2$, $\nu_2 = 2 - 0$ a tomu odpovídající charakteristiky matice A jsou $\sigma_1 = \nu_1 - \nu_0 = 2$, $\sigma_2 = \nu_2 - \nu_1 = 2$. Tedy existují dva řetězce zobecněných vlastních vektorů délky 2. Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 3$, tvoří vektorový prostor řešení dimenze 2 a jsou to řešení soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Bázi tohoto prostoru řešení můžeme volit $v_{11} = (1, 0, 1, 0)^T$, $v_{12} = (0, 1, 0, 1)^T$. Nyní nalezneme vektory v_{21} a v_{22}, které jsou určeny vztahy $Cv_{21} = v_{11}$ a $Cv_{22} = v_{12}$. To znamená, že řešíme dvě soustavy rovnic:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{a} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Z těchto soustav určíme například vektory $v_{21} = (-1, 1, 0, 1)^T$, $v_{22} = (5, 2, 0, 1)^T$

Nyní sestavíme čtyři lineárně nezávislé vektorové funkce

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^3 t, \ \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t\right] \mathrm{e}^{3t}, \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}, \ \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t\right] \mathrm{e}^{3t}.$$

Tedy obecné řešení systému 2.17 je dáno vektorovou funkcí:

$$\begin{pmatrix} (C_1 - C_2 + 5\,C_4 + tC_2)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (C_2 + C_3 + 2\,C_4 + tC_4)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (C_1 + t\,C_2)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (C_2 + C_3 + C_4 + tC_4)\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

□

V posledních dvou příkladech jsme neměli problém s určením zobecněných vektorů jako v předchozím příkladu. Tyto problémy se mohou vyskytnout až v dalším příkladě.

Příklad 2.11. Pomocí zobecněných vlastních vektorů nalezněte obecné řešení systém lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1'(t) & = & & & 6x_2(t) & + & 3x_3(t) & - & 8x_4(t) \\ x_2'(t) & = & & & 2x_2(t) & & & & \\ x_3'(t) & = & x_1(t) & - & 3x_2(t) & - & 3x_3(t) & + & 7x_4(t) \\ x_4'(t) & = & x_1(t) & - & 3x_2(t) & - & 2x_3(t) & + & 5x_4(t) \end{array} \tag{2.18}$$

Řešení. Systém ma matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ Charakteristická rovnice matice soustavy je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1-\lambda & 7 \\ 1 & -3 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16 = (\lambda-2)^4.$$

Charakteristická matice soustavy odpovídající jedinému vlastnímu číslu $\lambda = 2$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

má zřejmě hodnost 2. To znamená, že matice A má dva charakteristické vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 2$. Nyní vypočteme mocniny charakteristické matice a jejich hodnosti:

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posloupnost hodností mocnin charakteristické matice je $h_0 = 4$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0$, tomu odpovídající posloupnost nulit je $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3$, $\nu_4 = 0$. Charakteristiky matice jsou $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$. To znamená, že máme jeden vlastní vektor a jeden řetězec zobecněných vlastních vektorů délky 3. I v tomto případě je třeba určit správný vektor v_{11} takový, aby byl koncovým vektorem řetězce zobecněných vektorů délky 3. Nejdříve určíme dva vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 2$. Řešíme soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -2 & 6 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -3 & 7 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Za bázi prostoru vlastních vektorů můžeme zvolit $v_{1a} = (2, 1, 2, 1)$ a $v_{1b} = (3, 1, 0, 0)$. Nyní budeme hledat koeficienty lineární kombinace $\alpha v_{1a} + \beta v_{1b}$ takové, že existují nenulové vektory v_{31}, v_{21} splňující

$$Cv_{21} = \alpha v_{1a} + \beta v_{1b} \quad \text{a} \quad Cv_{31} = v_{21} \quad \Rightarrow \quad C^2 v_{31} = \alpha v_{1a} + \beta v_{1b}.$$

To znamená, že následující systém rovnic má řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -3 & 2\alpha + 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \\ 2 & -6 & -2 & 6 & 2\alpha \\ 1 & -3 & -1 & 3 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 1 & -3 & 2\alpha + 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha + \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha + 6\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\alpha + 3\beta \end{array}\right).$$

Upravený systém má řešení právě, když $\alpha = -\beta$, např. $\alpha = 1$ a $\beta = -1$, což dává vektor $v_{11} = (-1, 0, 2, 1)^T$. K tomuto vektoru postupně určíme v_{21} a v_{31} jako řešení systémů se stejnou maticí soustavy různým sloupcem pravých stran. Zápis řešení provedeme současně:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -2 & 6 & 3 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & -3 & -3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Volbou $v_{21}^4 = 1$ a $v_{21}^2 = 0$ získáme vektor $v_{21} = (-2, 0, 1, 1)^T$, což je druhý sloupec volbou $v_{31}^4 = 1$ a $v_{31}^2 = 0$ získáme vektor $v_{31} = (2, 0, 2, 1)^T$.

Nyní sestavíme čtyři lineárně nezávislé vektorové funkce

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^2 t, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}, \quad \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t\right] \mathrm{e}^{2t}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2}\right] \mathrm{e}^{2t}.$$

Tedy obecné řešení systému 2.17 je dáno vektorovou funkcí:

$$\begin{pmatrix} \left((2C_1 - C_2 - 2C_3 - t(C_3 + 2C_4) - \frac{t^2}{2} C_4\right) \mathrm{e}^{2t} \\ C_1 \mathrm{e}^{2t} \\ (2\,C_1 + 2\,C_2 + C_3 + 2\,C_4 + t(2\,C_3 + C_4) + t^2\,C_4)\,\mathrm{e}^{2t} \\ \left(C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + t(2\,C_3 + C_4) + \frac{t^2}{2}\,C_4\right) \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

□

2.4 Exponenciála matice

Tato metoda má poměrně jednoduchý algoritmus nalezení obecného řešení systému lineárních rovnic s konstantními koeficienty. To je ovšem kompenzováno relativní pracností.

2.4.1 Přehled základních pojmů

Tato metoda využívá méně častou definici *charakteristického polynomu* k matici soustavy:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Charakteristický polynom $p(\lambda)$ zapsat ve schématickém tvaru skutečného polynomu:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

kde koeficienty $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ jsou jednoznačně určeny determinantem. Často bývá charakteristický polynom definován jako determinant $\det(A - \lambda E) = 0$, který lze pomocí původního polynomu vyjádřit ve tvaru $(-1)^n p(\lambda)$. Tento znaménkový rozdíl nemá vliv na tvar a řešení tzv. *charakteristické rovnici* matice A, která má tvar $p(\lambda) = 0$.

Věta 2.12. *Předpokládejme, že A je konstantní $n \times n$ matice, jejíž charakteristický polynom má tvar*

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Předpokládejme dále, že $y(t)$ je řešení počáteční úlohy pro lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu se stejnými koeficienty:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{2.19}$$

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)} = 0,\ y^{(n-1)}(0) = 1. \tag{2.20}$$

Označme

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Pak pro exponenciálu matice platí vztah:

$$\mathrm{e}^{At} = z_1(t)I + z_2(t)A + \dots + z_n(t)A^{n-1}.$$

2.4.2 Řešení typických příkladů

Příklad 2.13. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 3\,\lambda - 4$ a vlastní čísla $\lambda_1 = -$ $-1,\ \lambda_2 = 4$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y'' - 3y' - 4 = 0$ má obecné řešení $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}$.

Z podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 0 = y(0) = & & C_1 & + & C_2 \\ 1 = y'(0) = & & -C_1 & + & 4C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} C_1 = -\frac{1}{5} \\ C_2 = \frac{1}{5} \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = \frac{1}{5}(-e^{-t} + e^{4t}$, $y'(t) = \frac{1}{5}(e^{-t} + 4e^{4t}$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -e^{-t} + e^{4t} \\ e^{-t} + 4e^{4t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{-t} + e^{4t} \\ -e^{-t} + e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{4e^{-t} + e^{4t}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-e^{-t} + e^{4t}}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + 2e^{4t} & -2e^{-t} + 2e^{4t} \\ 3e^{-t} + 3e^{4t} & 2e^{-t} + 3e^{4t} \end{pmatrix}$$

□

Příklad 2.14. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 4$ a vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2j$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 4 = 0$ má obecné řešení $y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$.
Z podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 0 = y(0) = & & C_1 & & \\ 1 = y'(0) = & & C_1 & + & 2C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = \frac{1}{2}e^t \sin 2t$, $y'(t) = \frac{1}{2}e^t(2\cos 2t + \sin 2t)$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t(2\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t(2\cos 2t - \sin 2t) \\ e^t \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{e^t}{2}(2\cos 2t - \sin t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \sin 2t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 2.15. Nalezněte exponenciálu matice matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Řešení. Nejdříve určíme charakteristický polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4$ a vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 2$. Odpovídající pomocná diferenciální rovnice $y'' - 4y' + 4 = 0$ má obecné řešení $y = e^{2t}(C_1 + C_2 t)$.
Z podmínek $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ určíme konstanty C_1, C_2:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 0 = y(0) = & & C_1 & & \\ 1 = y'(0) = & & 2C_1 & + & C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{array}$$

Dostáváme tak $y(t) = e^{2t}t$, $y'(t) = e^{2t}(2t + 1)$. Dále určíme funkce $z_1(t)$, $z_2(t)$:

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t}t \\ e^{2t}(2t + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1 - 2t) \\ e^{2t}t \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^{2t}(1-2t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{2t}t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

□

Příklad 2.16. Nalezněte obecné řešení systému lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} y_1' & = & y_1 & + & 2y_2 & + & 2 & - & 5t \\ y_2' & = & 3y_1 & + & 2y_2 & + & 5 & - & 7t \end{array}$$

Řešení. Matice soustavy je konstantní $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} 2-5\,t \\ 5-7\,t \end{bmatrix} = b(t)$ je pravá strana soustavy.
V příkladě 2.13 jsme určili exponenciálu matice A ve tvaru

$$e^{tA} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3\,e^{-t}+2\,e^{4\,t} & 2\,e^{4\,t}-2\,e^{-t} \\ 3\,e^{4\,t}-3\,e^{-t} & 2\,e^{-t}+3\,e^{4\,t} \end{bmatrix}.$$

Nyní určíme integrál ze vzorce

$$y(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}s,$$

kde volíme $t_0 = 0$:

$$\int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\mathrm{d}\,s = \frac{1}{5}\int_0^t \begin{bmatrix} -4\,e^{-t+s} - 1\,e^{-t+s}s + 14\,e^{4\,t-4\,s} - 24\,e^{4\,t-4\,s}s \\ 21\,e^{4\,t-4\,s} - 36\,e^{4\,t-4\,s}s + 4\,e^{-t+s} + e^{-t+s}s \end{bmatrix} ds =$$

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \int_0^t -4\,e^{-t+s} - 1\,e^{-t+s}s + 14\,e^{4\,t-4\,s} - 24\,e^{4\,t-4\,s}s\;ds \\ \int_0^t 21\,e^{4\,t-4\,s} - 36\,e^{4\,t-4\,s}s + 4\,e^{-t+s} + e^{-t+s}s\;ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{-t} + \frac{2}{5}\,e^{4\,t} + t - 1 \\ \frac{3}{5}\,e^{4\,t} - \frac{3}{5}\,e^{-t} + 2\,t \end{bmatrix}$$

Nyní dosadíme za vektor počátečních hodnot vektor $C = [C_1, C_2]$ a celkově dostáváme řešení:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{C_1}{5}\begin{bmatrix} 3\,e^{-t}+2\,e^{4\,t} \\ 3\,e^{4\,t}-3\,e^{-t} \end{bmatrix} + \frac{C_2}{5}\begin{bmatrix} 2\,e^{4\,t}-2\,e^{-t} \\ 2\,e^{-t}+3\,e^{4\,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\,e^{-t} + \frac{2}{5}\,e^{4\,t} + t - 1 \\ \frac{3}{5}\,e^{4\,t} - \frac{3}{5}\,e^{-t} + 2\,t \end{bmatrix}.$$

□

2.5 Příklady pro samostatnou práci

Příklad S 2.1. Určete obecná řešení sytému dvou diferenciálních rovnic 1. řádu, kde a je přirozené číslo:

a) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & (2-a)x_1(t) & + & x_2(t) & + & \cos(t) + (a-2)\sin(t) \\ x_2'(t) & = & a(a-1)x_1(t) & - & (a+3)x_2(t) & + & (a+1)\sin(t) \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & (a+2)\,x_1(t) & - & a^2x_2(t) & - & \mathrm{e}^{2t}a(a-1) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & (2-a)x_2(t) & - & \mathrm{e}^{2t}(a-1) \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & (a-2)\,x_1(t) & + & 4x_2(t) & - & \mathrm{e}^{t}(a-7) \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) & + & (a+2)x_2(t) & + & \mathrm{e}^{t}(a+2) \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & (a^2+1)\,x_1(t) & - & (a^2+a)\,x_2(t) & - & \mathrm{e}^{t}(a^2+a) \\ x_2'(t) & = & (a^2-a)\,x_1(t) & - & (a^2-2)x_2(t) & - & \mathrm{e}^{t}(a^2-1) \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & (a+2)\,x_1(t) & + & 5\,x_2(t) & + & 1-t(a-3) \\ x_2'(t) & = & -\,x_1(t) & + & (a-2)x_2(t) & - & 1+t(a^2-1) \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rcrcrcl} x_1'(t) & = & 4a\,x_1(t) & + & 10a\,x_2(t) & + & \mathrm{e}^{t}(6a+1) \\ x_2'(t) & = & -a\,x_1(t) & - & 2a\,x_2(t) & - & \mathrm{e}^{t}(a+1) \end{array}$$

Příklad S 2.2. Určete obecná řešení homogenního sytému tří diferenciálních rovnic 1. řádu, kde a je přirozené číslo:

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 4\,x_1(t) & + & (a-2)\,x_2(t) & - & a\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & (4-a)x_1(t) & + & (2a+2)x_2(t) & - & a\,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & x_1(t) & + & (a-2)\,x_2(t) & - & (a-3)\,x_3(t) \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & (a+3)\,x_1(t) & - & x_2(t) & - & a\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & (a+2)x_1(t) & + & & - & a\,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & a\,x_1(t) & - & x_2(t) & - & (a-3)\,x_3(t) \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 7\,x_1(t) & + & (a-4)x_2(t) & - & (a+1)\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & (10-a)x_1(t) & + & (2a-5)\,x_2(t) & - & (a+3)\,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & (5-a)\,x_1(t) & + & (a-3)x_2(t) & & \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & (13-6a)\,x_1(t) & + & (2a-8)x_2(t) & - & (6a-8)\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & -5ax_1(t) & + & (1+2a)\,x_2(t) & - & 5a\,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & (12-4a)\,x_1(t) & + & (a-8)x_2(t) & + & (4a-7)\,x_3(t) \end{array}$$

e) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3a\,x_1(t) & + & (a-4)x_2(t) & - & (3a-4)\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & ax_1(t) & + & x_2(t) & + & (1-a)\,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & (3a-1)\,x_1(t) & + & (a-3)x_2(t) & + & (5-3a)\,x_3(t) \end{array}$$

f) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & -a\,x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & a\,x_3(t) \\ x_2'(t) & = & -(a+4)x_1(t) & + & 5x_2(t) & + & (a+1)\,x_3(t) \\ x_3'(t) & = & -(a+3)\,x_1(t) & + & 2x_2(t) & + & (a+3)\,x_3(t) \end{array}$$

Příklad S 2.3. Určete obecná řešení homogenního sytému čtyř diferenciálních rovnic 1. řádu, kde a je přirozené číslo:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1'(t) &=& (a+1)\,x_1(t) &+& (a+2)\,x_2(t) &+& x_3(t) &-& (a+1)\,x_4(t)\\
x_2'(t) &=& (a-1)\,x_1(t) &+& (a+1)x_2(t) &-& x_3(t) &-& a\,x_4(t)\\
x_3'(t) &=& (a-1)\,x_1(t) &+& (a+1)\,x_2(t) &+& 2\,x_3(t) &-& a\,x_4(t)\\
x_4'(t) &=& (2a-1)\,x_1(t) &+& 2(a+1)\,x_2(t) &+& 2\,x_3(t) &-& 2a\,x_4(t)
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1'(t) &=& (2a-1)\,x_1(t) &+& 2\,x_2(t) &-& x_3(t) &-& (1-2a)\,x_4(t)\\
x_2'(t) &=& 3(a-1)\,x_1(t) &+& x_2(t) &-& (2a-1)x_3(t) &-& (a-1)\,x_4(t)\\
x_3'(t) &=& (2a-3)\,x_1(t) &+& 2\,x_2(t) &-& x_3(t) &-& (2a-3)\,x_4(t)\\
x_4'(t) &=& (2a+1\,x_1(t) &+& 2\,x_2(t) &-& 3\,x_3(t) &-& (2a-1)\,x_4(t)
\end{array}$$

Příklad S 2.4. Určete exponenciálu čtvercové matice řádu 2, kde a je přirozené číslo:

a) $\begin{pmatrix} 2-a & a \\ -a-1 & a+3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a+2+a^2 & -a^2 \\ a^2+2\,a+1 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a+5 & -4 \\ 6 & a-5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ -1 & a+1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2-a & a^2+1 \\ -1 & a+2 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} -7\,a & 5\,a \\ -10\,a & 7\,a \end{pmatrix}$

Příklad S 2.5. Určete exponenciálu čtvercové matice řádu 3, kde a je přirozené číslo:

a) $\begin{pmatrix} -4\,a-1 & 4\,a & -4\,a+6 \\ -7\,a-7 & 7\,a+3 & -7\,a+11 \\ -3\,a-3 & 3\,a & -3\,a+8 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -3\,a-1 & 3\,a & -3\,a+6 \\ -6\,a-6 & 6\,a+2 & -6\,a+12 \\ -3\,a-3 & 3\,a & -3\,a+8 \end{pmatrix}$

Výsledky

2.1

a) Řešení má tvar:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2\,t}C_1 + \mathrm{e}^{3\,t}C_2 + \sin(t) \quad x_2(t) = a\mathrm{e}^{2\,t}C_1 + \mathrm{e}^{3\,t}C_2\ (a+1)$$

b) Řešení má tvar:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2\,t}(C_1 a + (at+1)C_2 - a + 1) \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}(C_1 + C_2\,t)$$

c) Řešení má tvar:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{a\,t}(C_1(2t-1) + 2C_2) + \mathrm{e}^t \quad x_2(t) = \mathrm{e}^{a\,t}\,(C_1\,t + C_2) - \mathrm{e}^t$$

d) Řešení má tvar:

$$x_1(t) = (a+1)\,\mathrm{e}^t C_1 + a\,\mathrm{e}^{2t} C_2 \qquad x_2(t) = a\,\mathrm{e}^t C_1 + (a-1)\,\mathrm{e}^{2\,t} C_2 2 - \mathrm{e}^t$$

e) Řešení má tvar:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 5\,C_1\,\mathrm{e}^{t\,a}\cos t - 5\,C_2\,\mathrm{e}^{t\,a}\sin t + t \\ x_2(t) &= -C_1\,\mathrm{e}^{t\,a}\,(2\,\cos t) + \sin t) - C_2\,\mathrm{e}^{t\,a}\,(-2\,\sin t + \cos t) - t \end{aligned}$$

f) Řešení má tvar:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{a\,t}(C_1\,(-3\cos(a\,t) + \sin(a\,t)) - C_2\,(\cos(a\,t) + 3\sin(a\,t))) + \mathrm{e}^t \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{a\,t}(C_1\,\cos(a\,t) + C_2\sin(a\,t)) - \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

2.2 Řešení může mít tvar:

a)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + C_2\mathrm{e}^{a\,t} + a\,C_3\mathrm{e}^{3\,t} \\ x_2(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + 2\,C_2\mathrm{e}^{a\,t} + a\,C_3\mathrm{e}^{3\,t} \\ x_3(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + C_2\mathrm{e}^{a\,t} + (a-1)\,C_3\mathrm{e}^{3\,t} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\mathrm{e}^{3\,t} + C_2\mathrm{e}^{2\,t} + a\,C_3\mathrm{e}^{t} \\ x_2(t) &= 2\,C_1\mathrm{e}^{3\,t} + 2\,C_2\mathrm{e}^{2\,t} + a\,C_3\mathrm{e}^{t} \\ x_3(t) &= C_1\mathrm{e}^{3\,t} + C_2\mathrm{e}^{2\,t} + (a-1)\,C_3\mathrm{e}^{t} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + C_2\mathrm{e}^{a\,t}(3\cos t - \sin t) - C_3\mathrm{e}^{a\,t}(\cos t + 3\sin t) \\ x_2(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + C_2\mathrm{e}^{a\,t}(5\cos t - \sin t) - C_3\mathrm{e}^{a\,t}(\cos t + 5\sin t) \\ x_3(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + C_2\mathrm{e}^{a\,t}2\cos t - 2\,C_3\mathrm{e}^{a\,t}\sin t \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\mathrm{e}^{5\,t} + C_2\mathrm{e}^{t}(6\cos a\,t - 2\sin a\,t) - C_3\mathrm{e}^{t}(2\cos a\,t + 6\sin a\,t) \\ x_2(t) &= C_2\mathrm{e}^{t}5\cos a\,t - C_3\mathrm{e}^{t}\sin a\,t \\ x_3(t) &= C_1\mathrm{e}^{5\,t} + C_2\mathrm{e}^{t}2(4\cos a\,t - 3\sin a\,t - 2\,C_3\mathrm{e}^{t}(3\cos a\,t + 4\sin a\,t) \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^{2\,t}(C_1\,2a(a+1) + C_2\,2(a(a+1)t - a^2 + a + 2) + \\ &\quad C_3(t^2a(a+1) + t\,2(-a^2 + a - 2) - 2)) \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^{2\,t}(C_1\,2(a+1) + C_2\,2t(a+1) + C_3(t^2a - 2a) \\ x_3(t) &= \mathrm{e}^{2\,t}(C_1\,2(a+1)^2 + C_2(a+1)(t(a+1) + 1 - a) + \\ &\quad C_3\,(a+1)(t^2(a+1) + 2\,t(1-a))) \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + 4\,C_2\,\mathrm{e}^{3\,t} + 4C_3t\mathrm{e}^{3\,t} \\ x_2(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + 6\,C_2\,\mathrm{e}^{3\,t} + C_3\,(6t + 2 - a)\mathrm{e}^{3\,t} \\ x_3(t) &= C_1\mathrm{e}^{2\,t} + 4\,C_2\,\mathrm{e}^{3\,t} + 2\,C_3(2t+1)\mathrm{e}^{3\,t} \end{aligned}$$

2.3 Řešení může mít tvar:

a)
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^t C_1(t^3 - 6t + 6 - 6a) + C_2\,2(t^2 - 1) + C_3t + C_4 \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^t C_1 3\,(t^2 - 2t + 2) + 6\,C_2\,2 + C_3 \\ x_3(t) &= \mathrm{e}^t C_1 t^3 + C_2t^2 + C_3t + C_4 \\ x_4(t) &= \mathrm{e}^t C_1(t^3 + 3t^2 - 12t - 6a - 18) + C_2(t^2 + 2t - 4) + C_3(t+1) + C_4 \end{aligned}$$

b)
$$
\begin{array}{rclcl}
x_1(t) & = & C_1 \cos t & + & C_2\, 2 \sin t \\
 & & C_3 (\,5 \cos 2t - 3\, \sin 2t) & + & C_4 (5\, \sin 2t + 3\, \cos 2t \\
x_2(t) & = & C_1 (\cos t - \sin t) & + & C_2 (\cos t + \sin t) \\
 & & C_3 (3a-2)(\,4 \cos 2t + \sin 2t) & + & C_4 (3a-2)(\,4 \sin 2t - \cos 2t) \\
x_3(t) & = & C_1 2\, \cos t & + & C_2 2\, \sin t \\
 & & C_3 (2 \cos 2t + 9 \sin 2t) & + & C_4 (2\, \sin 2t + \cos 2t) \\
x_4(t) & = & C_1 \cos t & + & C_2 2\, \sin t \\
 & & C_3 17\, \cos 2t & + & C_4 17\, \sin 2t
\end{array}
$$

2.4 Exponenciála má tvar

a) $\begin{pmatrix} (a+1)\,\mathrm{e}^{2\,t} - a\mathrm{e}^{3\,t} & -a\,(-\mathrm{e}^{3\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) \\ (a+1)\,(-\mathrm{e}^{3\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & (a+1)\mathrm{e}^{3\,t} - a\mathrm{e}^{2\,t} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,t}\,(1 + ta^2 + ta) & -t\mathrm{e}^{2\,t}a^2 \\ t\mathrm{e}^{2\,t}\,(a+1)^2 & -\mathrm{e}^{2\,t}\,(-1 + ta^2 + ta) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{(a-1)t} + 3\,\mathrm{e}^{(a+1)t} & -2\,\mathrm{e}^{(a+1)t} + 2\,\mathrm{e}^{(a-1)t} \\ 3\,\mathrm{e}^{(a+1)t} - 3\,\mathrm{e}^{(a-1)t} & 3\,\mathrm{e}^{(a-1)t} - 2\,\mathrm{e}^{(a+1)t} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{ta}\,(-1+t) & t\mathrm{e}^{ta} \\ -t\mathrm{e}^{ta} & \mathrm{e}^{ta}\,(1+t) \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,t}\,(\cos(t) - a \sin(t)) & \mathrm{e}^{2\,t} \sin(t)\,(a^2+1) \\ -\mathrm{e}^{2\,t} \sin(t) & \mathrm{e}^{2\,t}\,(\cos(t) + a \sin(t)) \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \cos(ta) - 7\, \sin(ta) & 5\, \sin(ta) \\ -10\, \sin(ta) & \cos(ta) + 7\, \sin(ta) \end{pmatrix}$

2.5 Exponenciála má tvar

a)
$$\begin{pmatrix} (2\,a+2)\mathrm{e}^{2\,t} - (a+1)\,\mathrm{e}^{5\,t} - a\mathrm{e}^{3\,t} & -a\,(-\mathrm{e}^{5\,t} - \mathrm{e}^{3\,t} + 2\,\mathrm{e}^{2\,t}) & (2\,a-2)\mathrm{e}^{2\,t} - a\mathrm{e}^{3\,t} - (a-2)\mathrm{e}^{5\,t} \\ (a+1)\,(-\mathrm{e}^{3\,t} - 2\,\mathrm{e}^{5\,t} + 3\,\mathrm{e}^{2\,t}) & 2\,a\mathrm{e}^{5\,t} + (a+1)\mathrm{e}^{3\,t} - 3\,a\mathrm{e}^{2\,t} & (3\,a-3)\mathrm{e}^{2\,t} - (a+1)\mathrm{e}^{3\,t} - (2\,a-4)\mathrm{e}^{5\,t} \\ (a+1)\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & -a\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & -a\mathrm{e}^{5\,t} + a\mathrm{e}^{2\,t} - \mathrm{e}^{2\,t} + 2\,\mathrm{e}^{5\,t} \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{2\,t} - \mathrm{e}^{5\,t} - a\mathrm{e}^{5\,t} + a\mathrm{e}^{2\,t} & -a\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & (a-2)\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) \\ 2\,\,(a+1)\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & \mathrm{e}^{2\,t} + 2\,a\mathrm{e}^{5\,t} - 2\,a\mathrm{e}^{2\,t} & 2\,\,(a-2)\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) \\ (a+1)\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & -a\,(-\mathrm{e}^{5\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}) & -a\mathrm{e}^{5\,t} + a\mathrm{e}^{2\,t} - \mathrm{e}^{2\,t} + 2\,\mathrm{e}^{5\,t} \end{pmatrix}$

3 Stabilita lineární rovnic a jejich systémů

Nechť má matice soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s komplexními koeficienty charakteristická čísla, které mají záporné reálné části, pak triviální řešení daného systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Existuje-li charakteristické číslo této matice s kladnou reálnou částí, pak triviální řešení je nestabilní. Protože charakteristická čísla matice jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n\,,$$

budou nás zajímat polynomy, jejichž všechny nulové body mají záporné reálné části. Takové polynomy se nazývají **hurwitzovské polynomy** a příslušné kritérium **Hurwitzovo kritérium**.

3.1 Hurwitzovo kritérium

Nechť je dán polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n\,, \quad n \geq 1,\ a_0 > 0,\ a_n \neq 0 \tag{3.1}$$

s reálnými koeficienty. **Hurwitzovou maticí** polynomu (3.1) nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

kde klademe $a_s = 0$ pro $s < 0$ a $s > n$. Platí toto tvrzení:

Všechny nulové body polynomu (3.1) mají záporné reálné části právě tehdy, když determinanty $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ jsou kladné, přičemž

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & \cdots & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Mají-li všechny nulové body polynomu (3.1) záporné reálné části, musí být všechny jeho koeficienty a_j, $j = 0, \dots, n$, kladné. Pro kvadratický polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ platí, že je hurwitzovský právě tehdy, když $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Pro polynomy vyšších stupňů je tato podmínka pouze nutná.

3.1.1 Řešení typických příkladů

Příklad 3.1. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = z^4 + 3z^3 + 7z^2 + 2z + 3$$

je hurwitzovský.

Řešení. Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 7,\ a_3 = 3,\ a_4 = 1$, tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1 = 2 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 5 > 0 \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0 \\
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \Delta_3 = 11 > 0\,.
\end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny, takže polynom je hurwitzovský. □

Příklad 3.2. Zjistěte, zda polynom

$$f(z) = 100z^4 + 580z^3 + 1281z^2 + 2206z + 4010$$

je hurwitzovský.

Řešení. Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 4010,\ a_1 = 2206,\ a_2 = 1281,\ a_3 = 580,\ a_4 = 100$, tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1 = 2206 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2206 & 4010 \\ 580 & 1281 \end{vmatrix} = 1633862194 > 0 \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2206 & 4010 & 0 \\ 580 & 1281 & 2 \\ 0 & 100 & 580 \end{vmatrix} = -19659372000 < 0
\end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria nejsou splněny, takže polynom není hurwitzovský. □

Příklad 3.3. Zjistěte pro jaká α je polynom

$$f(z) = z^4 + 8z^3 + 27z^2 + \alpha z + 50$$

hurwitzovský.

Řešení. Všechny koeficienty polynomu f jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 50,\ a_1 = \alpha,\ a_2 = 27,\ a_3 = 8,\ a_4 = 1$, tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_1 = \alpha > 0,\\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 50 \\ 8 & 27 \end{vmatrix} = 27\alpha - 400 > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{400}{27} \doteq 14.81481481\\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} \alpha & 50 & 0 \\ 8 & 27 & \alpha \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 2216\alpha - \alpha^2 - 3200 = -(\alpha-16)(\alpha-200) > 0
\end{aligned}$$

Podmínky Hurwitzova kritéria jsou splněny pro $\alpha \in (16, 200)$, pro něž je polynom hurwitzovský. □

Příklad 3.4. Rozhodněte o stabilitě systému lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty $x'(t) = Ax(t)$ kde je

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 18 & 41 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -12 & 16 & 21 & 52 \\ 4 & -6 & -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Nejdříve spočteme charakteristický polynom:

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & 9 & 18 & 41 \\ -1 & 2-\lambda & -2 & 1 \\ -12 & 16 & 21-\lambda & 52 \\ 4 & -6 & -6 & -17-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\,\lambda^3 + 14\,\lambda^2 + 58\,\lambda + 85.$$

Všechny koeficienty charakteristického polynomu jsou kladné, takže tento polynom může být hurwitzovský. Použijeme Hurwitzovo kritérium:

$a_0 = 85,\ a_1 = 58,\ a_2 = 14,\ a_3 = 2,\ a_4 = 1$, tedy

$$\Delta_1 = a_1 = 58 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 58 & 85 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 642$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 58 & 85 & 0 \\ 2 & 14 & 58 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2080 < 0$$

Podmínky Hurwitzova kritéria nejsou splněny a polynom není hurwitzovský, systém je asymptoticky nestabilní. □

3.1.2 Michajlovovo kritérium

Uvažujme polynom,který nemá kořeny ležící na imaginární ose, zapsán ve tvaru:

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)\,. \tag{3.3}$$

Po dosazení $z = j\omega$ do (3.3) dostáváme

$$P(j\omega) = a_n(j\omega)^n + \cdots + a_i(j\omega)^+ \cdots + a_0 = u(\omega) + j\,v(\omega)\,,$$

kde jsou polynomy $u(\omega)$ a $v(j\omega)$ definovány:

$$u(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots \qquad v(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \cdots\,.$$

Hodograf komplexní křivky $w = P(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$ skalárního argumentu ω se nazývá Michajlovova křivka.

Michajlovovo kritérium. Polynom (3.3) je Hurwitzův, jestliže Michajlovova křivka pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ neprochází počátkem a platí $\varphi = n \cdot \frac{\pi}{2}$.

Úhel φ obvykle stanovíme z orientačního průběhu křivky, který stanovíme pomocí průsečíků této křivky se souřadnými osami u, v v rovině uv a stanovíme tak kolika kvadranty křivka prochází. To předpokládá nalezení kořenů polynomů $u(\omega)$, $v(\omega)$. To jsou ovšem polynomy, které po vhodné substituci $\omega^2 = t$ přejdou v polynomy s polovičním stupněm jako polynom původní. Na obrázku 3.1 jsou zobrazeny typické Michajlovovy křivky pro polynomy stupňů $n = 1, 2, 3, 4, 5$ v případě, že všechny kořeny mají zápornou reálnou část.

Příklad 3.5. Michajlovovým kritériem rozhodněte zda je zadaný polynom Hurwitzovský:

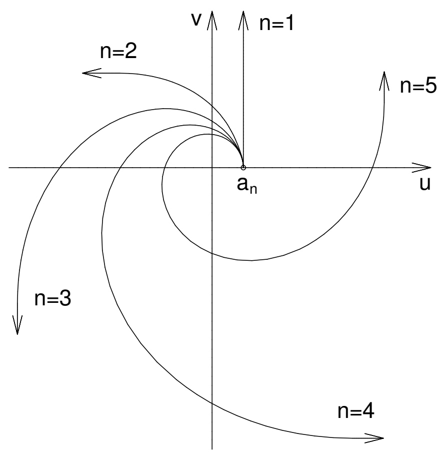
$$P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Řešení. Po dosazeni $x = j\omega$ do daného platí:

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \omega^4 - 2j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 1\,, \\ u(\omega) &= \omega^4 - 3\omega^2 + 1 \\ v(\omega) &= -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1-\omega^2) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega)\,. \end{aligned}$$

Pro kladné ω mají polynomy $u(\omega$ a $v(\omega)$ kořeny:

$$\begin{aligned} u(\omega) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \omega^4 - 3\omega^2 + 1 = 0 \;&\Rightarrow\; \omega_1 = \sqrt{\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\,, \omega_2 = \sqrt{\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ v(\omega) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 2\omega(1-\omega)(1+\omega) = 0 \;&\Rightarrow\; \omega_3 = 0\,, \omega_4 = 1\,. \end{aligned}$$



Obr. 3.1: Michajlovovy křivky pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Sestavme tabulku hodnot $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ pro vypočtené hodnoty parametru ω, a to vzestupně vzhledem k ω:

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	∞
u	1	0	-1	0	$+$
v	0	$+$	0	$-$	$-$

K průběhu Michajlovovy křivky nám stačí určit pouze znaménka funkčních hodnot včetně případu, kdy $\omega \to \infty$. Jelikož $\lim\limits_{\omega\to\infty} \frac{v}{u} = 0$, průběh Michajlovovy křivky lze znázornit následovně:

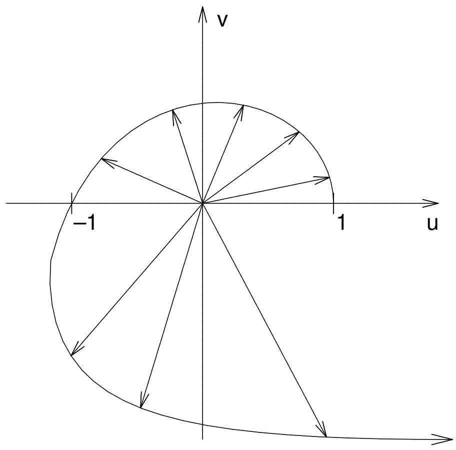
Tedy pro $\omega \in \langle 0, \infty)$ se vektor $P(j\omega)$ otočí o úhel $\varphi = 2\pi$. Aby polynom $P(\lambda)$ byl dle Michajlovova kritéria hurwitzovský, musí v našem případě platit $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$, což je splněno. Odtud plyne, že vyšetřovaný systém je asymptoticky stabilní. □

Příklad 3.6. Michajlovovým kritériem rozhodněte o stabilitě systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \,. \end{aligned}$$

Řešení. Nejdříve určíme charakteristickou rovnici z matice soustavy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -\lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$



Obr. 3.2: Michajlovova křivka k příkladu 3.6

Tento polynom je studován v předchozím příkladu, kde bylo ukázáno, že polynom je Hurwitzovký, dostáváme závěr, že zadaný systém je asymptoticky stabilní. □

3.2 Příklady pro samostatnou práci

Příklad S 3.1. Rozhodněte, které polynomy jsou Hurwitzovské, kde a je přirozené číslo:

$$a)\quad p(x) = 2\,a^2 + 8 + \left(2\,a^2 + 8 + 4\,a\right)x + \left(a^2 + 6 + 4\,a\right)x^2 + (2\,a + 2)\,x^3 + x^4 a$$

$$b)\quad p(x) = a^2 + 9\,a^3 + 4 + 36\,a + \left(16\,a^2 + 2\,a - 8\right)x + \left(a^2 + 5 + 5\,a\right)x^2 + (2\,a - 2)\,x^3 + x^4 n$$

$$c)\quad p(x) = 2\,a^2 + 2 + \left(4\,a + 2\,a^2 + 2\right)x + \left(4\,a + 3 + a^2\right)x^2 + (2\,a + 2)\,x^3 + x^4 a$$

$$d)\quad p(x) = 2\,a^2 + 8 + \left(4\,a^2 + 16 + 4\,a\right)x + \left(4\,a^2 + 18 + 8\,a\right)x^2 + (8\,a + 4)\,x^3 + 4\,x^4 a$$

$$e)\quad p(x) = \left(a^2 + 4\right)(1 + 16\,a) + \left(\left(a^2 + 4\right)(1 + 16\,a) - 2\,a^2 - 8 + 2\,a\,(1 + 16\,a)\right)x$$
$$+ \left(-a^2 - 3 + 2\,a\,(1 + 16\,a) + 12\,a\right)x^2 + \left(a^2 + 3 + 14\,a\right)x^3 + (2\,a - 1)\,x^4 + x^5 n$$

$$f)\quad p(x) = \left(a^2 + 4\right)(1 + 16\,a) + \left(\left(a^2 + 4\right)(1 + 16\,a) + 2\,a^2 + 8 + 2\,a\,(1 + 16\,a)\right)x$$
$$+ \left(3\,a^2 + 13 + 2\,a\,(1 + 16\,a) + 20\,a\right)x^2 + \left(a^2 + 7 + 22\,a\right)x^3 + (2\,a + 3)\,x^4 + x^5 a$$

Příklad S 3.2. Rozhodněte o stabilitě systému lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu $x' = Ax$ s maticí A , kde a je přirozené číslo:

a) $A = \begin{pmatrix} 3-5\,a & 30\,a & -6+90\,a \\ -3-5\,a & 1-25\,a & 9-50\,a \\ 1 & 10\,a & 25\,a-2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -30+10\,a & 15+15\,a & 105+15\,a \\ 30-15\,a & -20-15\,a & -120 \\ -10+5\,a & 5+5\,a & 35 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -3\,a & 2\,a & 5\,a-1 & 10\,a-2 \\ a+1 & -1-2\,a & -5\,a-1 & -10\,a-2 \\ 2-4\,a & 4\,a-2 & 4\,a-5 & 10\,a-10 \\ a-1 & -a+1 & 2 & -a+4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -3\,a-2 & 2\,a+5 & 5\,a+8 & 10\,a+21 \\ a-3 & -2\,a+6 & -5\,a+8 & -10\,a+21 \\ -4\,a-4 & 4\,a+8 & 4\,a+13 & 10\,a+32 \\ a+2 & -a-4 & -6 & -a-15 \end{pmatrix}$

Příklad S 3.3. Rozhodněte, pro které hodnoty parametru p je daný polynom Hurwitzoský, kde a je přirozené číslo:

$$17\,a^2 + 17 + p\,x + \left(4\,a + 18 + a^2\right) x^2 + (2\,a + 2)\,x^3 + x^4$$

Výsledky

3.1

a) je Hurwitzovský **b**) není Hurwitzovský

c) je Hurwitzovský **d**) je Hurwitzovský

a) není Hurwitzovský **b**) je Hurwitzovský

3.2

a) charakteristický polynom

$$5\,a + 125\,a^3 + \left(1 + 25\,a^2 - 10\,a\right)\lambda + (-2 + 5\,a)\,\lambda^2 + \lambda^3$$

není Hurwitzovský, proto je systém asymptoticky nestabilní.

b) charakteristický polynom

$$250\,a + (75\,a + 50)\,\lambda + (5\,a + 15)\,\lambda^2 + \lambda^3$$

je Hurwitzovský, proto je systém asymptoticky stabilní.
c) charakteristický polynom

$$a^2 + 4\,a^4 + \left(2\,a + 8\,a^3 + 2\,a^2\right)\lambda + \left(4\,a + 5\,a^2 + 1\right)\lambda^2 + (2\,a + 2)\,\lambda^3 + \lambda^4$$

je Hurwitzovský, proto je systém asymptoticky stabilní.
d) charakteristický polynom

$$51 + 5\,a^2 + 4\,a^4 + \left(2\,a + 8\,a^3 - 2\,a^2 - 2\right)\lambda + \left(-4\,a + 5\,a^2 + 2\right)\lambda^2 + (2\,a - 2)\,\lambda^3 + \lambda^4$$

není Hurwitzovský, proto je systém asymptoticky nestabilní.
3.3
Polynom je Hurwitzovský pro

$$\left(a^2 + 4\,a + 18 - \sqrt{a^4 + 8\,a^3 + 52\,a^2 + 144\,a + 256}\right)(a+1) < p < \left(a^2 + 4\,a + 18 + \sqrt{a^4 + 8\,a^3 + 52\,a^2 + 144\,a + 256}\right)(a+1)$$

Literatura

[1] G. Birkhoff, S. MacLane: *Algebra,* Alfa,Bratislava 1973.

[2] J. Diblík, J., O. Přibyl: *Obyčejné diferenciálne rovnice,* FAST VUT, Akademické vydavatelství CERM, s. r. o. Brno, 2004. (skriptum)

[3] J. Diblík, M. Růžičková, *Obyčajné diferenciálne rovnice,* Edis - vydavatelstvo ŽU, Žilina, 2008.

[4] M. Greguš, M. Švec, V. Šeda: *Obyčajné diferenciálne rovnice,* Alfa, Bratislava, SNTL, Praha, 1985.

[5] J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice,* MU Brno, PřF, 2001.

[6] J. Kuben:*Obyčejné diferenciální rovnice,* VA Brno 2000.

[7] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice,* SNTL Praha, 1978.

[8] J. Nagy: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic,* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1978.

[9] J. Nagy: *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic,* MVŠT XV, SNTL, Praha, 1980.

[10] J. Nagy: *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic,* MVŠT IX, SNTL, Praha, 1980.

[11] M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic,* MU Brno, PřF, 1998.

[12] K. Rektorys a kol.: *Přehled užité matematiky,* SNTL Praha.

[13] K. Rektorys: *Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami,* ČVUT Praha, 2001, ISBN 80-01-01611-0. (skriptum)