SYSTÉMY LINEÁRNÍCH DIF. ROVNIC

- $$\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

resp. $$\underbrace{\vec{y}\,' - A(x)\vec{y}}_{L\vec{y}} = \vec{b}(x)$$

$\vec{y} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$
$A \in C((a,b))^{n \times n}$

$L\vec{y}$ ... lin. dif. operátor

- soubor vektorových fcí $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ je LZ na intervalu I

$$\Leftrightarrow (\exists \underbrace{p_1, \dots, p_n}_{\text{netriv}}) (\forall x \in I) \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{f}_i(x) = \vec{0} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \vec{f}_i = \vec{\theta} \quad \text{na } I$$

- $(\vec{f}_1, \dots \vec{f}_n)$ je LN na I $\Leftrightarrow$ není LZ

- **Wronského determinant:**

$$W_{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n}(x) = \left| \vec{f}_1(x) \dots \vec{f}_n(\vec{x}) \right|$$

- VĚTA: $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ je LZ na I $\Rightarrow$ $W_{\vec{f}_1 \dots \vec{f}_n}(x) = 0 \quad \forall x \in I$

- n LN řešení rovnice (soustavy n rovnic) $L\vec{y} = \vec{0}$ (ozn. $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$) nazýváme FUND. SYSTÉM

- VĚTA: $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ je FS na I $\Rightarrow$ $W_{\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

• VĚTA: Nechť $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ je FS $L\vec{y} = 0$. Pak každé řešení této rovnice má tvar

$$\vec{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{y}_k(x)$$

kde $C_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, n\}$,

SYSTÉMY LINEÁRNÍCH DIF. ROVNIC S KONST. KOEF.

• $L\vec{y} = \vec{b}(x)$ kde $L\vec{y} = \vec{y}\,' - \mathbb{A}\vec{y}$

a $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

• Předp. řešení ve tvaru: $\underline{\vec{y}(x) = \vec{v} e^{\lambda x}}$, $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$

$$L\vec{y} = \vec{y}\,' - \mathbb{A}\vec{y} = \lambda e^{\lambda x} \vec{v} - e^{\lambda x} \mathbb{A}\vec{v} = 0$$
$$e^{\lambda x}(\lambda \vec{v} - \mathbb{A}\vec{v}) = 0$$

tj. $\vec{v}$ je vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ příslušný $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.

tj. $\ell(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$

• $\mathbb{A}$ je diagonaliz. $\Rightarrow$ najdeme n LN řešení daného tvaru $\Rightarrow$ máme FS

VĚTA: Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ má algebraickou násobnost $k = \nu_a(\lambda)$. Potom existuje k LN řešení $L\vec{y} = \vec{0}$ ve tvaru

$$\vec{y}_j(x) = \vec{v}_j(x) e^{\lambda x} \quad \forall j \in \hat{k} = \{1, \dots, k\}$$

kde složky vektoru $\vec{v}_j(x)$ jsou polynomy st. nejvýše $j-1$.

$\Rightarrow$ **METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ**

Nechť $\vec{y} = \vec{v}(x) e^{\lambda x}$ kde $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, $k = \nu_a(\lambda)$ a složky $\vec{v}$ jsou polynomy st. $(k-1)$

potom $\vec{v}(x) = \mathbb{B}\vec{x}$

$\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $\vec{x} = (1\ x\ x^2\ x^3 \dots x^{k-1})^T \in \mathbb{C}^{k \times 1}$

dosadíme do $L\vec{y} = \vec{0}$: $\vec{y}(x) = \mathbb{B}\vec{x}e^{\lambda x}$

$$\mathbb{B}\vec{x}' e^{\lambda x} + \lambda \mathbb{B}\vec{x} e^{\lambda x} - \mathbb{A}\mathbb{B}\vec{x} e^{\lambda x} = \vec{0} \quad \Big| \, e^{-\lambda x}$$

$\vec{x}' = (0\ 1\ 2x\ 3x^2 \dots (k-1)x^{k-2})^T$

$$\mathbb{B}\vec{x}' + (\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{B}\vec{x} = \vec{0} \quad \dots \begin{cases} n \text{ rovnic} \\ \forall \vec{x} \in I \end{cases}$$

zde musí být n nulových polynomů pod sebou

$\Rightarrow$ soustava $k \cdot n$ rovnic pro $k \cdot n$ koeficientů u mocnin.

hodnost soustavy je právě $k(n-1)$, protože existuje k LN řešení.

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Co když $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ell(\lambda)=0$ $\rightarrow$ $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$

K λ příslušné řešení $\vec{y}(x) = \vec{v}(x)\cdot e^{\lambda x}$

$$\bar{\vec{y}}(x) = \bar{\vec{v}}(x)\cdot \overline{e^{\lambda x}} = \bar{\vec{v}}(x)\, e^{\bar{\lambda} x}$$

$$e^{\lambda x} = e^{ax+ibx} = e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))$$
$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{ax-ibx} = e^{ax}(\cos(bx)-i\sin(bx)) = \overline{e^{\lambda x}}$$

a navíc $L\vec{y}=\vec{o}$

$$\Rightarrow \vec{o} = \overline{L\vec{y}} = \overline{(\vec{y}\,' - A\vec{y})} = \bar{\vec{y}}\,' - A\bar{\vec{y}} = L\bar{\vec{y}}$$

$\Rightarrow$ máme: $\mathrm{Re}\,\vec{y}$, $\mathrm{Im}\,\vec{y}$ jsou 2 LN řešení

METODA VARIACE KONSTANT

$(\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n)$ je FS $L\vec{y}=\vec{o}$ $\Rightarrow$ předp., že řešení

rovnice $L\vec{y}=\vec{b}(x)$ je tvaru $\vec{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\,\vec{y}_k(x)$

Dosadíme:

$$L\vec{y} = \vec{y}' - A(x)\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k'\vec{y}_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k\vec{y}_k' - \sum_{k=1}^{n} c_k A\vec{y}_k}_{\sum c_k \underbrace{(\vec{y}_k' - A\vec{y}_k)}_{L\vec{y}_k = \vec{0}}} \overset{!}{=} \vec{b}(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x)\vec{y}_k(x) = \vec{b}(x)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{y}_1 \cdots \vec{y}_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Wronského matice} \\ \text{(regulární)}}} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad \Rightarrow \quad c_k(x) = \int c_k'(x)\,dx + D_k$$

Př

$$\underbrace{y'}_{} = \underbrace{-5y + 2z}_{} + \underbrace{40e^{x}}_{}$$
$$\underbrace{z'}_{\vec{y}'} = \underbrace{y - 6z}_{A\vec{y}} + \underbrace{9e^{-x}}_{\vec{b}}$$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

hledáme FS: $\ell(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 28 \overset{!}{=} 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11\cdot 11 - 4\cdot 28}}{2} = \frac{-11 \pm 3}{2} = \begin{cases} -7 \\ -4 \end{cases}$$

2 různá vl. čísla a $\nu_a(\lambda) = 1$

$\Rightarrow$ nemusíme používat metodu neurč. koef.

- $\lambda_1 = -7$: $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = -4 \quad (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow FS = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x} \right)$$

$\Rightarrow$ rovnice bez p. strany má řeš. $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}$

Řešení s pravou stranou – variace konst

$$\begin{pmatrix} e^{-7x} & 2e^{-4x} \\ -e^{-7x} & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40e^{x} \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}$$

použijeme Cramerovo pravidlo

$$\Delta = W_{\vec{y}_1, \vec{y}_2} = 3e^{-11x}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 40e^{x} & 2e^{-4x} \\ 9e^{-x} & e^{-4x} \end{vmatrix} = 40e^{-3x} - 18e^{-5x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-7x} & 40e^{x} \\ -e^{-7x} & 9e^{-x} \end{vmatrix} = 9e^{-8x} + 40e^{-6x}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{3}e^{8x} - 6e^{6x}, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3e^{3x} + \frac{40}{3}e^{5x}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{5}{3}e^{8x} - e^{6x} + D_1, \quad C_2 = e^{3x} + \frac{8}{3}e^{5x} + D_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{3}e^{8x} - e^{6x} + D_1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x} + \left(e^{3x} + \frac{8}{3}e^{5x} + D_2 \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = D_1 e^{-7x} + 2D_2 e^{-4x} + 7e^{x} + e^{-x}$$

$$z(x) = -D_1 e^{-7x} + D_2 e^{-4x} + e^{x} + 2e^{-x} \qquad I = \mathbb{R}$$

Př

$$\dot{x}(t) = 5x - y - 4z$$
$$\dot{y}(t) = -12x + 5y + 12z$$
$$\dot{z}(t) = 10x - 3y - 9z$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{o}$$

$$\ell(\lambda) = \dots = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = -1$$

- Vlastní vektor k $\lambda_3 = -1$

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -12 & 6 & 12 \\ 10 & \cancel{-3} & -8 \end{pmatrix} \to \vec{o} \sim \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- vlastní vektor(y)? k $\lambda_{1,2} = 1$

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ matice má hodnost 2

$\to \exists 1$ LN vl. vektor.

$\Rightarrow$ použijeme metodu neurč. koef. (pro $\lambda_{1,2} = 1$)

$$\vec{y}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t \Rightarrow \vec{y}_{1,2}' = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} e^t$$

dosadíme: $\vec{y}_{1,2}' - \mathbb{A}\vec{y}_{1,2} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cancel{e^t} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} \cancel{e^t} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix}}_{(\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{y}} \cancel{e^t} = 0 \quad \Big| \cdot e^{-t}$$

rovnice pro koef. u t^0 $\Rightarrow$

rovnice pro koef. u t^1 ve vrch 3 rovnicích

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1. \\ 2.+3\times 1. \\ 2\times 3.-5\times 1. \\ 4. \\ 5.+3\times 4. \\ 2\times 6.-5\times 4. \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LN řešení:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} e^t$$

a z dřívějška:

$$\vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y}(t) = C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{t} + D\begin{pmatrix}1+t\\3\\t\end{pmatrix}e^{t} + E\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}e^{-t}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= Ce^{t} + D(1+t)e^{t} + Ee^{-t}\\ y(t) &= 3De^{t} - 2Ee^{-t}\\ z(t) &= Ce^{t} + Dte^{t} + 2Ee^{-t}\end{aligned}$$

$I = \mathbb{R}$

Př

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -y + z\\ \dot{y} &= z\\ \dot{z} &= -x + z\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\ell(\lambda) = \begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ 0 & -\lambda & 1\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}0 & -\lambda\\ -1 & 0\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

např. rozvoj podle 3. sloupce

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$

3 různá vl. č. $\Rightarrow$ ke každému právě 1 vl. vektor

Vl. vektory:

$$\lambda_1 = 1: \qquad (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

vím, že poslední řádek bude LZ (není nutné ani počítat)

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = i: \quad \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & i-1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -i = \overline{\lambda_2}$: vl. vektor musí vyjít komplexně sdružený: A je reálná, tj:

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \overline{A\vec{v}_2} = A\overline{\vec{v}_2} = \overline{\lambda_2 \vec{v}_2} = \overline{\lambda_2}\,\overline{\vec{v}_2} = \lambda_3 \overline{\vec{v}_2}$$

A reálná

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$*)\ e^{\overline{\lambda t}} = e^{(a-ib)t} = e^{at}e^{-ibt} = e^{at}(\cos(bt) - i\sin(bt)) = \overline{e^{\lambda t}}$$

Podobně jako u LDR n-tého řádu lze nakombinovat:

a platí taky...

$$\vec{y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \quad \vec{y}_3(t) = e^{\lambda_3 t}\vec{v}_3 = e^{\overline{\lambda_2} t}\overline{\vec{v}_2} = \overline{e^{\lambda_2 t}}\,\overline{\vec{v}_2} = \overline{\vec{y}_2}(t)$$

$*)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{y}_2 + \vec{y}_3) = \operatorname{Re}\vec{y}_2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2i}(\vec{y}_2 - \vec{y}_3) = \operatorname{Im}\vec{y}_2$$

jsou též řešeními, a navíc jsou reálná

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i\sin t)$$

$$\Rightarrow \vec{z}_2(t) = \operatorname{Re}\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}_3(t) = \operatorname{Im}\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Reálný FS tvoří $(\vec{y}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3)$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= + D(\cos t - \sin t) + E(\cos t + \sin t) \\ y(t) &= Ce^t + D\cos t + E\sin t \\ z(t) &= Ce^t - D\sin t + E\cos t \end{aligned}$$

Př.–DÚ:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{2x + y - 2z}_{} \;\Big|\; \underbrace{-t + 2}_{} \\ \dot{y} &= -x \;\Big|\; +1 \\ \dot{z} &= x + y - z \;\Big|\; -t + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \vec{b}(t)$$

prý vyjde!

$$\begin{aligned} x &= -Ce^t + D\cos t + E\sin t \\ y &= Ce^t - D\sin t + E\cos t + t \\ z &= D\cos t + E\sin t + 1 \end{aligned}$$