22.3.2021

# RICCATIHO DR

**Def:** Nechť $a_0, a_1, a_2 \in C(I)$, $I=(a,b)$. Riccatiho DR rozumíme rovnici tvaru

$$\underbrace{y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2}_{y'=f(x,y)} \qquad (*)$$

**POZN:** $a_0 \equiv 0 \Rightarrow$ jde o Bernoulliho DR pro $\alpha = 2$ $\quad y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$

$a_2 \equiv 0 \Rightarrow$ jde o LDR $\quad y' + p(x)y = q(x)$

**POZN:** Z existenční teorie plyne, že $(*)$ s poč. podm. $y(x_0)=y_0$ $(x_0 \in I)$ má jednoznačné řešení (na $I_0 \subset I$)

**POZN:** Původ Riccatiho DR je v celé řadě fyz. úloh. Často řešení skončí ve tvaru

$$y(x) = \int \ldots dx$$

---

## POKUS O ŘEŠENÍ TRANSFORMACÍ NEZÁVISLÉ PROM.

Subst. $x = \varphi(t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix} \Rightarrow J_\phi = \begin{vmatrix} \dot\varphi(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot\varphi(t) \overset{!}{\neq} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = y(x) = y(\varphi(t))} \qquad \text{základní funkční identita}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}(t) = y'(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t) \neq 0$$

dosadíme do (*)

$$\dot{u}(t) = \underbrace{a_0(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)}_{A_0(t)} + \underbrace{a_1(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}(t)}_{A_1(t)}\,u(t) + \underbrace{a_2(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)}_{A_2(t)}\,u^2(t)$$

## POKUS O ŘEŠENÍ SUBST. ZÁVISLÉ PROMĚNNÉ

Subst.

$$y = \frac{\alpha(x)u + \beta(x)}{\gamma(x)u + \delta(x)} \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in C(I)$$

tj. jde o transformaci souřadnic

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \dfrac{\alpha(t)u + \beta(t)}{\gamma(t)u + \delta(t)} \end{pmatrix}$$

Jacobián transformace je $J_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u}(\dots) \end{vmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\alpha(t)u + \beta(t)}{\gamma(t)u + \delta(t)}\right)$

$$= \frac{\alpha(t)(\gamma(t)u + \delta(t)) - (\alpha(t)u + \beta(t))\cdot\gamma(t)}{(\gamma(t)u + \delta(t))^2} = \frac{1}{(\dots)^2}\cdot(\alpha\delta - \beta\gamma)\,\Big|_t \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ dosadíme do (*) : na levé straně :

$$y' = \frac{(\alpha' u + \alpha u' + \beta')(\gamma u + \delta) - (\alpha u + \beta)(\gamma' u + \gamma u' + \delta')}{(\gamma u + \delta)^2}$$

do dosazujeme $y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$

na pravé straně: $\left(a_0 + a_1 y + a_2 y^2\right)$

$$\frac{1}{(\gamma u + \delta)^2}\left(a_0(\gamma u + \delta)^2 + a_1(\alpha u + \beta)(\gamma u + \delta) + a_2(\alpha u + \beta)^2\right)$$

položíme $L = P$, vynásobíme $(\gamma u + \delta)^2$

po vydělení

$$\underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{\neq 0} u' = \underbrace{-\beta'\delta + \beta\delta'}_{\text{zleva}} + a_0\delta^2 + a_1\beta\delta + a_2\beta^2 \quad \Big\}\ A_0$$

$$+ \Big(\underbrace{-\alpha'\delta - \beta'\gamma + \alpha\delta' + \beta\gamma'}_{\text{zleva}} + 2a_0\gamma\delta + a_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2a_2\alpha\beta\Big) u \quad \Big\}\ A_1 u$$

$$+ \Big(\underbrace{-\alpha'\gamma + \alpha\gamma'}_{\text{zleva}} + a_0\gamma^2 + a_1\alpha\gamma + a_2\alpha^2\Big) u^2 \quad \Big\}\ A_2 u^2$$

$\Rightarrow$ obecně je to opět Riccatiho DR ve tvaru

$$u' = A_0(x) + A_1(x) u + A_2(x) u^2$$

Otázka: nelze vhodnou volbou $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zařídit, aby
$A_0 \equiv 0$ nebo $A_2 \equiv 0$ ?

$$A_0 = 0 \Rightarrow \quad -\beta'\delta + \beta\delta' + a_0\delta^2 + a_1\beta\delta + a_2\beta^2 = 0 \quad \forall x$$

protože $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$ nebo $\delta \neq 0$

BÚNO nechť $\beta \neq 0 \Rightarrow$ vydělíme $\beta^2$ a získáme

$$\underbrace{\frac{\beta\delta' - \beta'\delta}{\beta^2}}_{\left(\frac{\delta}{\beta}\right)'} + a_0\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2 + a_1\left(\frac{\delta}{\beta}\right) + a_2 = 0$$

Riccatiho DR pro $\frac{\delta}{\beta}$

- pokud $\delta \neq 0$ $\Rightarrow$ vydělíme $\delta^2 \ldots \Rightarrow$ Ricc. DR pro $\frac{\beta}{\delta}$

- pokus o vynulování $A_2$ (když víme, že $\alpha \neq 0$ nebo $\gamma \neq 0$) analogicky vede na Ricc. DR pro $\frac{\gamma}{\alpha}$, resp. $\frac{\alpha}{\gamma}$

---

## KANONICKÝ TVAR RICC. DR

Def: Rovnice $(*)$ je v kanonickém tvaru $\Leftrightarrow$ $|a_2| \equiv 1 \wedge a_1 \equiv 0$

tj. jde o rovnici $y' = a_0(x) \pm y^2$

- Převod $(*)$ na kanonický tvar za předp.

$$a_2 \in C^2(I) \wedge (\forall x \in I)(a_2(x) \neq 0)$$

1) subst. $\underset{w(x) \neq 0 \;\; \forall x \in I}{y(x) = w(x)u(x)}$ ($w(x)$ dosud neznáme)

dosadíme do $(*)$ $\quad w'u + wu' = a_0 + a_1 wu + a_2 w^2 u^2$

$$\Rightarrow u' = \frac{a_0}{w} + \left(a_1 - \frac{w'}{w}\right)u + \underbrace{a_2 w}_{\overset{!}{=} \pm 1} u^2$$

$\Rightarrow$ víme, že stačí $w = \pm \dfrac{1}{a_2(x)}$

$\Rightarrow$ rovnice přejde na tvar $u' = A_0 + A_1 u \pm u^2$ $\quad (**)$

2) subst. $u(x) = z(x) + \alpha(x)$ ($\alpha(x)$ je dosud neznámé)

dosadíme do (**)

$$z' + \alpha' = A_0 + A_1(z+\alpha) \pm (z+\alpha)^2$$

$$z' = \left(A_0 - \alpha' + A_1\alpha \pm \alpha^2\right) + \underbrace{(A_1 \pm 2\alpha)}_{!=0} z \pm \underline{z^2}$$

chceme jen $\pm z^2$

$$\Rightarrow \alpha = \mp \frac{1}{2} A_1$$

---

## NALEZENÍ VŠECH ŘEŠENÍ R.DR PŘI ZNALOSTI JEDNOHO

Nechť $v = v(x)$ splňuje (*), tj.: $v' = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 \; \forall x \in I$

Zvolme bod $x_0 \in I$. Potom bodem $[x_0, v(x_0)]$ prochází právě jedna integrální křivka (*), a to právě funkce $v$.

Když zvolíme $y_0 \neq v(x_0)$, pak $\exists_1$ řešení (*) procházející bodem $[x_0, y_0]$ a existuje $I_0 = (c,d) \subset I$ tak, že $x_0 \in I_0$ takový, že $(\forall x \in I_0)(y(x) \neq v(x))$

označme ho $y(x)$

$$\Rightarrow \text{Na } I_0 \text{ lze definovat } z(x) = \frac{1}{\underbrace{y(x) - v(x)}_{\neq 0}}$$

tj. transf. souřadnic $\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{y-v} \end{pmatrix}$

$$J_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y-v}\right) \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y-v}\right) = -\frac{1}{(y-v)^2} \neq 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad y = v + \frac{1}{z}$$

$$y' = v' - \frac{1}{z^2} z'$$

dosadíme do (*)

$$v' - \frac{1}{z^2} z' = a_0 + a_1 \left( v + \frac{1}{z} \right) + a_2 \left( v + \frac{1}{z} \right)^2$$

$$\cancel{v'} - \frac{1}{z^2} z' = \cancel{a_0 + a_1 v + a_2 v^2} + a_1 \cdot \frac{1}{z} + 2a_2 v \cdot \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} \quad \Big| \cdot z^2$$

$$-z' = (a_1 + 2a_2 v) z + a_2$$

(***) $\quad z' + (a_1 + 2a_2 v) z = -a_2 \quad$ LDR s koef. spojitými na celém $I$

$\Rightarrow \quad \exists_1$ řeš. $z$ (***) procházející bodem $\left[ x_0,\ z_0 = \frac{1}{y_0 - v(x_0)} \right]$

na celém $I$

Přesto $z \neq 0$ nemusí být splněna na $I$

(přes bod $z = 0$ nelze prodloužit to řešení $y = v + \frac{1}{z}$)

$\downarrow$

náš výsledek formulujeme jako věta

$(6.1) = (*) \quad (6.2) = (**)$

*Nechť $v = v(x)$ je řešením (6.1) na intervalu $I_0 \subset I$. Potom platí:*

1. *Je-li $y$ řešením (6.1) takovým, že $(\forall x \in I_0)(y(x) \neq v(x))$, pak funkce*

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - v(x)}$$

*řeší rovnici (6.2) na intervalu $I_0$.*

2. *Je-li $z$ řešením (6.2) na $I_0$ a navíc $(\forall x \in I_0)(z(x) \neq 0)$, pak funkce*

$$y(x) = v(x) + \frac{1}{z(x)}$$

*je řešením rovnice (6.1) na $I_0$.*

## VZTAH R. DR A LDR 2. ŘÁDU

Pozn.: LDR 2. ŘÁDU JE R.

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

kde $p_0, p_1, q \in C(I)$, $I = (a,b)$

Nechť $y$ řeší $(*)$ $\quad y' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$

na jistém $I_0 \subset I$ a navíc $a_2 \in C^1(I_0)$

Def. $\quad w(x) = \exp\left(-\int a_2(x) y(x)\, dx\right)$

$\Rightarrow w(x) > 0 \quad \forall x$. Nyní vyjádříme $y, y'$

$$u' = \underbrace{\exp\left(-\int a_2(x)y(x)dx\right)}_{u}\left(-a_2(x)y(x)\right) = \underbrace{-ua_2y}_{\text{součin tří fcí } \in C^1(I_0)}$$

$\Rightarrow$ na $I_0$ $\exists u''$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{u'}{u a_2} \qquad \text{pro } a_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_0 \ ! \ \wedge \ u \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-u'' u a_2 + u'(u' a_2 + u a_2')}{(u a_2)^2}$$

Nyní dosadíme do (*)

$$\frac{-u'' u a_2 + u'(\cancel{u' a_2} + u a_2')}{(u a_2)^2} = a_0 - a_1 \frac{u'}{u a_2} + \cancel{a_2 \frac{(u')^2}{(u a_2)^2}} \quad \Big| \cdot (u a_2)$$

$$u'' - \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right) u' + a_0 a_2 u = 0$$

což je LDR 2. řádu s nulovou pravou stranou na $I_0$.

*Nechť $a_0, a_1, a_2$ jsou spojité na $I$. Nechť navíc pro $I_0 \subset I$ platí $a_2 \in C^1(I_0)$, $(\forall x \in I_0)(a_2(x) \neq 0)$. Potom platí:*

1. *Je-li funkce $y$ řešením (6.1), pak funkce*

$$u = \exp\left(-\int a_2 y \, dx\right)$$

*je řešením LDR 2. řádu*

$$u'' - \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right) u' + a_0 a_2 u = 0 \tag{6.3}$$

*na intervalu $I_0$.*

2. *Naopak, nechť $u$ je řešením (6.3) na $I_0$ takové, že $(\forall x \in I_0)(u(x) \neq 0)$. Potom funkce*

$$y = -\frac{u'}{u a_2}$$

*řeší (6.1) na $I_0$.*

Nechť $v$ řeší (*):

POZN: $z = \frac{1}{y-v} \iff y = v + \frac{1}{z} \Rightarrow z$ ŘDR dostaneme LDR 1. řádu

alternativně: $y = v + z$

$$y' = \cancel{v'} + z' = a_0 + a_1(v+z) + a_2(v+z)^2$$
$$= a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_1 z + 2a_2 vz + a_2 z^2$$

$$\Rightarrow \quad z' = (a_1 + 2av)z + a_2 z^2$$

$$z' - (a_1 + 2av)z = a_2 z^2 \quad \ldots \text{ Bernoulliho DR s } \alpha = 2$$

vynásobíme $(1-2)z^{-2}$

subst. $u = z^{1-2} = \frac{1}{z}$ $\downarrow$ $y = v + \frac{1}{u}$

$\downarrow$

LDR 1. řádu

---

DÚ

$$u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u = q(x)$$

DOKÁZAT: a "uhodneme" 1 konkrétní řešení $w(x)$, potom subst. $u(x) = w(x)\underline{z(x)}$ vede na LDR 1. řádu

jak se to stane?

"metoda snížení řádu LDR"

obecněji: $Lu = q \qquad Lu = u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k u^{(k)}$ lin. dif. op. pro LDR $n$-tého řádu

$\Rightarrow$ subst. vede na LDR řádu $(n-1)$

29.3.2021

## SPECIÁLNÍ RICCATIHO ROVNICE ("SRDR")

Rovnice (*) $y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$ je ve spec. tvaru

$\iff$ $y' = bx^{\omega} - ay^2$ hde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a $\underbrace{\omega \in \mathbb{R}}_{\text{konstanty}}$

! def (**) alternativně: $\boxed{y' + ay^2 = bx^{\omega}}$

Cílem je najít $\omega \in \mathbb{R}$ tak, aby (**) byla řešitelná (alespoň kvadraturami, tj. $y = \int \cdots dx$)

---

POZN: $a \neq 0 \Rightarrow$ subst. $z = ay \iff y = \frac{1}{a} z$ $\quad y' = \frac{1}{a} z'$

↳ dosazíme: $\boxed{z' = abx^{\omega} - z^2}$ kanonický tvar s funkcí $a_0(x) = \underbrace{ab}_{\tilde{b} \neq 0} x^{\omega}$

---

- pro $\omega = 0$ $\quad y' + ay^2 = b$ .... rovnice se separovanými proměnnými
- pro $\omega = -2$ lze provést subst. $y = \frac{1}{u}$, tj. $y' = -\frac{1}{u^2} u'$

a po dosazení:

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{a}{u^2} = \frac{b}{x^2}$$

$$\frac{u'}{u^2} + \left(\frac{b}{x^2} - \frac{a}{u^2}\right) = 0$$

$g(x,u)u' + f(x,u) = 0$ hde $f, g$ jsou homog. fce st. $-2$

$\Rightarrow$ převedli jsme na homog. rovnici

Další postup spočívá v transformaci proměnných
$(x,y) \to (t,z)$ tak, abychom dostali
v $(t,z)$ rovnici tvaru
$$\dot{z} + \tilde{a} z^2 = \tilde{b} t^{\tilde{\omega}}$$
tj. speciální Riccatiho rovnici s exponentem $\tilde{\omega} \neq \omega$

Předpokládejme $\tilde{\omega} = f(\omega)$

- pokud umím řešit SRDR s exponentem $\omega_0$, pak umím řešit i SRDR s exponentem $\omega$ takovým, že $f(\omega) = \omega_0$
  tj. $\omega = f^{-1}(\omega_0)$ ... udělám transf. $\phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\z\end{pmatrix}$

- pokud umím řešit SRDR s exp. $\omega_0$, pak umím řešit SRDR s exponentem $\omega = f(\omega_0)$ ... udělám transf. $\phi^{-1}\begin{pmatrix}t\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

SRDR s $\omega_0$ je řeš. $\Rightarrow$ SRDR s $\omega \in \{ f^k(\omega_0) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ je řeš.

$\omega_k$

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-krát}} \quad \text{pro } k > 0$$

$$f^k = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \dots \circ f^{-1}}_{-k\text{-krát}} \quad \text{pro } k < 0$$

V dalším výkladu budeme zkoumat tvar $\phi$

1) subst. $y = \alpha(x) u(x) + \beta(x)$ (spec. případ $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 1$ )

dosadíme do (**) $\Rightarrow$ $\alpha' u + \alpha u' + \beta' + a(\alpha u + \beta)^2 = b x^\omega$ | roznásobíme a vydělíme $\alpha$

$$\Rightarrow \quad u' + \frac{1}{\alpha}(\beta' + a\beta^2) + \frac{1}{\alpha}(\alpha' + 2a\alpha\beta) u + a\alpha u^2 = \frac{b}{\alpha} x^\omega \qquad \text{def (***)}$$

aby tento výraz byl SRDR, muselo by:

- $\frac{1}{\alpha}(\alpha' + 2a\alpha\beta) \overset{!}{=} 0$
- $\frac{1}{\alpha}(\beta' + a\beta^2) \overset{!}{=} 0$ nebo $\beta' + a\beta^2 = \text{konst.}\; x^{\omega}$

spor

- $\alpha a = \text{konst.} \Rightarrow \alpha = \text{konst}$ ← na tuto podmínku rezignujeme
- $\alpha = cx^{\nu}$ $(c \neq 0)$ a $\nu \neq 0$ $\Rightarrow \frac{b}{\alpha} x^{\omega} = \frac{b}{c} x^{\omega-\nu}$ $\neq \omega$

Vyřešíme $\beta' + a\beta^2 = 0 \iff \frac{\beta'}{\beta^2} = -a$

$$\frac{1}{\beta} = ax + K \iff \beta = \frac{1}{ax+K}, \quad K \in \mathbb{R}$$

toto a $\alpha = cx^{\nu}$ dosadíme do $\alpha' + 2a\alpha\beta = 0$

$$c\nu x^{\nu-1} + 2acx^{\nu}\frac{1}{ax+K} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big| \cdot \frac{1}{cx^{\nu-1}}$$

$$\nu + 2ax\frac{1}{ax+K} = 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow K = 0 \wedge \nu = -2 \wedge c$ libovolné $(\Rightarrow$ zvolíme $c = 1)$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = x^{-2} \wedge \beta = \frac{1}{ax} \Rightarrow y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax} \; (= \alpha u + \beta)}$$

dohromady dá $\binom{t}{z} = \phi\binom{x}{y}$

Dosadíme zpět do $\cancel{(\ast\ast\ast)}$ $\Rightarrow u' + \frac{a}{x^2}u^2 = bx^{\omega+2}$ | jen pro $x \neq 0$

- Další krok $\boxed{\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\omega+3} \\ \frac{1}{u} \end{pmatrix}}$

regularita! $\det J_{\phi} = \begin{vmatrix} (\omega+3)x^{\omega+2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u^2}x^{\omega+2}(\omega+3) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 0 \wedge \omega \neq -3$

$$u(x) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{z(x^{w+3})}$$

dosadíme $\quad u' = \frac{-1}{z^2}\dot z\,(w+3)\,x^{w+2} + \frac{a}{x^2 z^2} = b\,x^{w+2} \quad \Big| \cdot \frac{z^2}{x^{w+2}}$

$$-\dot z\,(w+3) + \frac{a}{x^{w+4}} = b z^2$$

$$\dot z + \frac{b}{w+3} z^2 = \frac{a}{w+3} x^{-(w+4)} \qquad t = x^{w+3}$$

$$\boxed{\dot z + \underbrace{\frac{b}{w+3}}_{\tilde a \neq 0} z^2 = \underbrace{\frac{a}{w+3}}_{\tilde b \neq 0} t^{-\frac{w+4}{w+3}}} \qquad -\frac{w+4}{w+3} = \tilde w$$

SRDR s $\tilde w \neq w$

$$\Rightarrow f(w) = \tilde w = -\frac{w+4}{w+3}$$

tj. jestliže $w_0$ je "řešitelný" exp. a $w_k = f^k(w_0)$, pak

$$w_k + 2 = -\frac{w_{k-1}+4}{w_{k-1}+3} + 2$$

TRIK :-)

$$= \frac{-(w_{k-1}+4) + 2(w_{k-1}+3)}{w_{k-1}+3} = \frac{w_{k-1}+2}{w_{k-1}+3}$$

$w_0 \in \{0, -2\}$

pro $w_{k-1} = -2$ dostáváme $w_k = -2$

ale naštěstí! $w_0 = 0$ už nevede na konst. posl. $w_k$

$$\frac{1}{w_k+2} = \frac{w_{k-1}+3}{w_{k-1}+2} = 1 + \frac{1}{w_{k-1}+2}$$

$$\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{w_0+2} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}$$

resp.

$$\frac{1}{w_{k-1}+2} = \frac{1}{w_k+2} - 1$$

$$\frac{1}{w_{-k}+2} = \frac{1}{w_0+2} - k \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{w_0+2} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{Z}}$$

pro $w_0 = 0$

$$\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

$$w_k + 2 = \frac{2}{2k+1}$$

$$w_k = \frac{2}{2k+1} - 2 = -\frac{4k}{2k+1} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

POZN: Lze dokázat, že tyto hodnoty jsou jediné hodnoty $\omega$, pro které má SRDR řešení (v kvadraturách)

POZN: Vzhledem ke vztahu mezi RDR a LDR 2. řádu je vidět, že "naprostá většina" LDR 2. řádu s nekonst. koef. vůbec nejde analyticky vyřešit.

(Př)

$$y' = \frac{1}{x^4}e^x + y + 2e^{-x}y^2$$

Riccatiho DR v obecném tvaru

Nápověda: převod do kanon. tvaru: zbavit se $2e^{-x}$ u $y^2$

zkusit subst. $y = e^x u$, $y' = e^x(u+u')$

$$\underbrace{e^x(u+u')}_{\text{odečte se}} = \frac{1}{x^4}e^x + \underbrace{e^x u}_{} + 2e^x u^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{e^x}$$

bude konst.

$$u' - \underbrace{2}_{a}u^2 = \underbrace{x^{-4}}_{b}$$

SRDR s $w = -4$

$$\boxed{w_k = -\frac{4k}{2k+1}}$$

$$-4 = -\frac{4k}{2k+1}$$

$$8k + 4 = 4k$$

$$k = -1 \quad \Rightarrow \quad w = w_{-1} = f^{-1}(w_0) = f^{-1}(0)$$

$\Rightarrow$ „naše" rovnice vznikla z řešitelné SRDR (s $w = 0$)

$1\times$ provedením $\Phi^{-1}$

$\Rightarrow$ provedením $1\times$ $\Phi$ dostaneme „zpět" řešitelnou SRDR

$y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{w+3} \\ \frac{1}{u} \end{pmatrix}}$$

nejprve:

$$u = \frac{v}{x^2} - \frac{1}{2x}$$

$$u' = \frac{v'}{x^2} - \frac{2v}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$$

$u' + \frac{a}{x^2}u^2 = bx^{w+2}$

po dosazení

$$v' - \frac{2}{x^2}v^2 = x^{-4+2} = \frac{1}{x^2}$$

subst. $t = x^{w+3} = \frac{1}{x}$

$z = \frac{1}{v}$ ... $v = \frac{1}{z}$ $\quad v' = -\frac{1}{z^2}\cdot \dot z\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2 z^2}\cdot \dot z$

$$\frac{1}{x^2 z^2}\cdot \dot{z} - \frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} \quad \Big|\cdot x^2 z^2$$

$$\dot{z} - 2 = z^2$$ rovnice se sep. prom.

$$\frac{\dot{z}}{z^2+2} = 1$$ (SRDR s $w=0$ .. tj. je tam $t^0$)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = t + C$$

$$\underline{z = \sqrt{2}\,\operatorname{tg}\left(\sqrt{2}(t+C)\right)}$$

$$\Rightarrow\ v = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}\left(\sqrt{2}(t+C)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \tilde{C}\right) \qquad \tilde{C} = \sqrt{2}C$$

$$\Rightarrow\ w = \frac{1}{\sqrt{2}x^2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \tilde{C}\right) - \frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow\ y = e^x\cdot u = e^x\left[\frac{1}{\sqrt{2}x^2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\tilde{C}\right) - \frac{1}{2x}\right]$$

**POZN:** $v' - \frac{2}{x^2}v^2 = \frac{1}{x^2}$ je už také separovatelná rovnice

$$v'x^2 - 2v^2 = 1$$

$$\frac{v'}{1+2v^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}v\right) = -\frac{1}{x} + D$$

$$\Rightarrow\ \underline{v = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{x} + \tilde{D}\right)} \qquad \text{kde } \tilde{D} = \sqrt{2}D$$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x} + \tilde{C}\right) \qquad \operatorname{tg}(-\alpha+\tilde{D}) = \operatorname{cotg}(\alpha+\tilde{C})$$

DÚ jaký je vztah mezi $\tilde{D}$ a $\tilde{C}$?

12.4.2021 1. část cv. – dokončení Riccatiho DR

## RICCATIHO ROVNICE – PŘÍKLADY

Př $y' = y^2 - xy - x$

Nápověda: $v(x) = ax+b \qquad v'(x) = a$

dosadíme $a = (ax+b)^2 - x(ax+b) - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^0: \ a = b^2$

$x^1: \ 2ab - b - 1 = 0 \qquad \Leftarrow \ a=b=0$ není řeš.

$x^2: \ 0 = a^2 - a = a(a-1) \qquad a=b=1$ je řeš.

$\Rightarrow v(x) = x+1 \quad \Rightarrow \quad y = v(x) + \frac{1}{z(x)} \qquad y' = 1 - \frac{1}{z^2}z'$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{z^2}z' = \left(x+1+\frac{1}{z}\right)^2 - x\left(x+1+\frac{1}{z}\right) - x$$

$$\frac{1}{z^2}z' = 2(x+1)\frac{1}{z} - x\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad \Big| \cdot z^2$$

$$z' = (x+2)z + 1$$

$z' - (x+2)z = 1$ Metoda IF: $p(x) = -(x+2)$

$P(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$

$IF = e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}$

$$\left(z e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}\right)' = e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = e^{\frac{1}{2}(x+2)^2} \int e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}\,dx \qquad \Rightarrow \quad y = x+1+\frac{1}{z}$$

---

Př $y' = 2x + x^3 y - xy^2$ využít znalost řešení $v(x) = x^2$

Subst. $y = x^2 + \frac{1}{z}$ ... DÚ dosadit ... vyjde LDR 1. ř.

kuchařka $z(x) = \frac{1}{y(x) - v(x)}$

vyjde ... $y = x^2 + \left(e^{\frac{x^4}{4}} \int x e^{-\frac{x^4}{4}}\,dx\right)^{-1}$

Př $y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0 \iff y' = 2x + x^3y - xy^2$

Nápověda: využijte subst. $z = x^2 - y \iff y = x^2 - z$

$\Rightarrow$ nedostaneme LDR, ale Bernoulliho DR

$\Rightarrow$ DÚ