# LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU

LDR n-tého řádu $\Big\}$ $Ly(x) = q(x)$ kde $q \in C((a,b))$ a $p_k \in C((a,b))$ $k=0,..,n-1$

$$(Ly)(x) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

$L : C^{(n)}((a,b)) \to C((a,b))$ $\qquad Ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k y^{(k)}$ L... lineární diferenciální operátor n-tého řádu

$f,g \in C^{(n)}((a,b))$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

alternativně $\tilde{L}y = \sum_{k=0}^{n} \tilde{p}_k y^{(k)}$ kde $\tilde{p}_n(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

LDR zapsané jako rovnost funkcí -

$Ly = q$

pak $p_k(x) = \dfrac{\tilde{p}_k(x)}{\tilde{p}_n(x)}$ $\forall k = 0,1,..,n-1$

POZN: LDR s konstantními koeficienty

$$\tilde{L}y = \tilde{q} \quad \text{kde} \quad \tilde{p}_k(x) = a_k \quad \text{a} \quad a_n \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \tilde{q}$$

## Vlastnosti LDR:

- $L$ je lin. operátor: $\quad L \in \mathcal{L}\left(C^{(n)}((a,b)), C((a,b))\right)$

  tj. $L(\alpha y + z) = \alpha Ly + Lz$

- $Ly = \theta$ ($\theta(x) = 0 \ \forall x$) nazýváme LDR n-tého řádu BEZ PRAVÉ STRANY

  $Ly = q$ —— " —— S PRAVOU STR.

• $y, z$ řeší $Ly = 0$, tj. $Ly = 0 \wedge Lz = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{L(\alpha y + z) = \alpha Ly + Lz = \alpha 0 + 0 = 0}$

$\Rightarrow$ množina řešení rovnice $Ly = 0$ je uzavřená vůči sčítání a násobení konst. $\Rightarrow$ je to vekt. prostor

Ozn. $\underline{\mathcal{L}_0}$

• $\dim \mathcal{L}_0 = n$

$\Leftrightarrow$ v $\mathcal{L}_0$ existuje $n$-členná báze funkcí:

$\mathcal{L}_0 = [y_1, \dots, y_n]_\lambda$ kde $(y_1, \dots, y_n)$ jsou LN funkce

$\hookrightarrow$ $(y_1, \dots y_n)$ jsou LZ $\Leftrightarrow$ $\left( \exists (\alpha_1 \dots, \alpha_n)_{\text{netriv}} \right) \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \theta \right)}$

je LZ soubor fcí

tj: $(\forall x \in (a,b))\left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) = 0 \right)$

$\hookrightarrow$ $(y_1, \dots, y_n)$ jsou LN $\Leftrightarrow$ soubor $(y_1, \dots y_n)$ není LZ

• $(y_1, \dots, y_n)$ LN a takový, že $\mathcal{L}_0 = [y_1, \dots, y_n]_\lambda$ se nazývá <u>FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM</u> rovnice $Ly = 0$

• Předp. že $\underline{y_p}$ řeší $Ly = q$ (tj. platí $Ly_p = q$)

tzv. partikulární řešení

Nechť $z \in \mathcal{L}_q$ .... $\mathcal{L}_q = \{ y \in C^{(n)}((a,b)) \mid Ly = q \}$

množina všech řeš. $Ly = \underline{q}$

$$\left. \begin{array}{l} Ly_p = q \\ Lz = q \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Ly_p - Lz = \theta \\ L(y_p - z) = \theta \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y_p - z \in \mathcal{L}_0 \\ z - y_p \in \mathcal{L}_0 \end{array}$$

$\Rightarrow \quad z = y_p + y_0 \quad$ kde $y_0 \in \mathcal{L}_0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_q$ je lineární varieta

$$\mathcal{L}_q = \underbrace{y_p}_{\text{zaměření}} + \underbrace{\mathcal{L}_0}_{\text{jádro}} = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{L}_0 \}$$

---

**Př** (metoda snížení řádu)

Mějme rovnici tvaru $\quad y'' + p_1(x) y' + p_0(x) y = q(x)$

tj. ve funkcionálním tvaru $\quad y'' + p_1 y' + p_0 y = q$

Nechť $v$ řeší LDR s nulovou pravou stranou, tj. $\underbrace{v'' + p_1 v' + p_0 v}_{Lv} = \theta$

Subst. $\quad y = uv \qquad u = u(x), \; v = v(x)$

Pak $\quad y' = u'v + uv'$

$\quad\quad y'' = u''v + 2u'v' + uv'' \qquad \Rightarrow$ dosadíme do $y'' + p_1 y' + p_0 y = q$

(Leibniz)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$u''v + 2u'v' + uv'' + p_1(u'v + uv') + p_0 uv = q$$

$$u\underbrace{(v'' + p_1 v' + p_0 v)}_{Lv = 0} + u'(\ldots) + u''(\ldots) = q$$

subst. $\; z = u' \quad \Rightarrow$ dostaneme $z(\ldots) + z'(\ldots) = q$

tj. LDR 1. řádu

**Pozn**: $\quad L$ .. lin. dif. op. $n$-tého řádu a $Lv = 0$

$\Rightarrow$ subst. $\; y = uv \;$ dostaneme $\; \underbrace{L(uv)}_{\text{neobsahuje } u}$

(Dú .. dokázat)

$\Rightarrow$ subst. $z = u'$ vede na LDR řádu (max.) $n-1$

Př

musí $x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$, ... pak máme LDR 2. ř.

$$x^2y'' - 5xy' + 8y = 16 \iff \tilde{L}y = \tilde{q} \;\Big|\; \frac{1}{x^2} \;..\; Ly = q$$

přitom víme, že $v(x) = x^2$ řeší $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$

Subst. $y(x) = x^2 \cdot u(x)$

$$y'(x) = x^2u'(x) + 2xu(x)$$

$$y''(x) = x^2u''(x) + 4xu'(x) + 2u(x)$$

$\Rightarrow$ to co je modré dosadíme:

$$x^2\left(x^2u'' + 4xu'\right) - 5x\left(x^2u'\right) = 16$$

$$x^4u'' - x^3u' = 16 \quad \Big| \text{ subst. } z = u' \text{ a vydělíme } x^4$$

$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{16}{x^4}$$

$p(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad P(x) = -\ln|x|$ $\quad$ IF $= e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} \approx \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x}z\right)' = \frac{16}{x^5}$$

$$\frac{1}{x}z = -\frac{4}{x^4} + \tilde{C}$$

$$u' = z = -\frac{4}{x^3} + \tilde{C}x$$

$$u = \int -\frac{4}{x^3} + \tilde{C}x\,dx = \frac{2}{x^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{C}}_{C}x^2 + D$$

$$y = x^2u = 2 + Cx^4 + Dx^2$$

$y_p(x) = 2$ $\quad y_1(x) = x^4$ $\quad y_2(x) = x^2$

$$y \in y_p + \underbrace{[y_1, y_2]_\lambda}_{\mathcal{S}_0}$$

$I = \mathbb{R}$

(pro LDR ve $Ly = q$ $\;I_1 = (-\infty, 0) \cup I_2 = (0, +\infty)$)

## LDR n-tého řádu s konst. koeficienty

$$\tilde{L}y = \tilde{q} \quad \text{kde} \quad \tilde{p}_k(x) = a_k \quad \text{a} \quad a_n \neq 0$$

$$\tilde{L}y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \tilde{q} \qquad \text{kde } a_n \neq 0$$

? Jak se najde FS rovnice $\tilde{L}y = \theta$ ?

**Def.** Charakteristickým polynomem rovnice $\tilde{L}y = \theta$ rozumíme polynom

$$\ell(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

**POZN:** Nechť $y(x) = e^{\lambda x}$ je řešením $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$

tj. platí $\left( \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) e^{\lambda x} = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Leftrightarrow \quad \ell(\lambda) = 0$

**VĚTA:** Nechť $\lambda$ je $m$-násobným kořenem $\ell(\lambda)$. Potom

$$(y_{\lambda,0}, \dots, y_{\lambda,m-1}) \quad \text{kde} \quad y_{\lambda,j}(x) = x^j e^{\lambda x}$$

je LN souborem (o $m$ členech) řešení rovnice $\tilde{L}y = \theta$.

- $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ jsou všechny navzájem různé kořeny $\ell(\lambda)$ s násobnostmi $m_1, \dots, m_M$, pak soubor

1) $\left(y_{\lambda_1,0}, \dots, y_{\lambda_1,m_1}, y_{\lambda_2,0}, \dots, y_{\lambda_2,m_2}, \dots, y_{\lambda_M,1}, \dots, y_{\lambda_M,m_M}\right)$

je LN a <u>má právě n členů</u> $\Rightarrow$ jde o FS rovnice $\tilde{L}y = \theta$

↖ zákl. věta algebry ↙

2) $\lambda_j$ mohou být i <u>komplexní</u>

3) Protože $\ell(\lambda)$ má reálné koef
$\Rightarrow$ jeho kořeny jsou buď reálné, nebo jsou po dvou komplexně sdružené.
Kompl. sdr. kořeny mají stejnou násobnost.

<u>POZN</u>: Pro $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

def. $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$

tak potom $(e^z)' = e^z$

$\Rightarrow \tilde{L}y = \theta$ má řešení $y_{\lambda_j,k}$ i v $\mathbb{C}$!

$$\ell(\lambda) = \prod_j \underbrace{(\lambda - \lambda_j)^{m_j}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \prod_j \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)^{m_j}}_{\text{nemá kořeny v } \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ Předp. kořen $\lambda = \alpha + i\beta$ s násobností $m$. Potom $\ell(\lambda)$ má i kořen $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ s násobností $m$

Ke kořenu $\lambda$ existuje $m$ LN řešení ve tvaru

$$y_{\lambda,j}(x) = x^j e^{\lambda x} = x^j e^{(\alpha + i\beta)x} = x^j e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} =$$

$$= x^j e^{\alpha x} \left( \cos(\beta x) + i \sin(\beta x) \right)$$

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

Stejně k $\bar{\lambda}$ ex. $m$ LN řeš. $\quad y_{\bar{\lambda},j} = x^j e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$

$$\forall j \in \{0,1,\dots,m-1\}$$

Sestavíme funkce

$$\left.\begin{aligned} y_{\lambda,1,j}(x) &= \frac{y_{\lambda,j}(x) + y_{\bar{\lambda},j}(x)}{2} = x^j e^{\alpha x}\cos(\beta x) \\ y_{\lambda,2,j}(x) &= \frac{y_{\lambda,j}(x) - y_{\bar{\lambda},j}(x)}{2i} = x^j e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R} \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ nahrazením $y_{\lambda,j}$ a $y_{\bar{\lambda},j}$ funkcemi $y_{\lambda,1,j}$ a $y_{\lambda,2,j}$

v souboru $\left(y_{\lambda_1,0}, \dots, y_{\lambda_1,m_1}, y_{\lambda_2,0}, \dots, y_{\lambda_2,m_2}, \dots, y_{\lambda_M,1}, \dots, y_{\lambda_M,m_M}\right)$

dostáváme <u>**REÁLNÝ FS**</u> rovnice $\tilde{L}_y = \theta$.

<u>POZN</u>: $\quad y_{\lambda,j} = y_{\lambda,1,j} + i\, y_{\lambda,2,j}$ $\qquad$ (rovnost funkcí)

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ 0 = L(y_{\lambda,j}) &= L(y_{\lambda,1,j}) + iL(y_{\lambda,2,j}) \\ 0 = L(y_{\bar{\lambda},j}) &= L(y_{\lambda,1,j}) - iL(y_{\lambda,2,j}) \end{aligned}\right\} \text{ soustava 2 lin. rovnic}$$

$$\Downarrow$$

$$L(y_{\lambda,1,j}) = 0$$
$$L(y_{\lambda,2,j}) = 0$$

**Př**

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 = (\lambda+1)(\lambda+2) \Rightarrow \lambda_1 = -1,\quad \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow FS = (y_1, y_2) \quad \text{kde } y_1(x) = e^{-x},\quad y_2(x) = e^{-2x}$$

formálně nesprávné

$$FS = (e^{-x}, e^{-2x})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_0 = [y_1, y_2]_\lambda = \underbrace{[e^{-x}, e^{-2x}]_\lambda}_{\text{nesprávné}}$$

$$\Leftrightarrow \left( y \in \mathcal{L}_0 \Leftrightarrow y = C y_1 + D y_2 \quad \text{kde } C, D \in \mathbb{R} \right)$$

$$\Leftrightarrow y(x) \text{ řeší } Ly = 0 \Leftrightarrow y(x) = Ce^{-x} + De^{-2x}$$

$$I = \mathbb{R}$$

---

**Př**

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \quad \dots \text{ 2-nás. reálný kořen } \lambda_{1,2} = 2 \quad (m=2)$$

$$\Rightarrow FS = (e^{2x}, xe^{2x})$$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$$

---

**Př**

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \qquad \lambda_{3,4} = \pm i$$

$\lambda = \alpha + i\beta$ $\qquad \alpha = 0, \beta = 2$ $\qquad \alpha = 0, \beta = 1$

$$FS_{\mathbb{C}} = \left(\underbrace{e^{2ix}, e^{-2ix}}, \underbrace{e^{ix}, e^{-ix}}\right)$$

$$FS_{\mathbb{R}} = \left(\overbrace{\cos(2x), \sin(2x)}, \overbrace{\cos(x), \sin(x)}\right)$$

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x) \qquad I = \mathbb{R}$$

---

Př

$$y''' - 2y'' + 5y' = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i = \alpha \pm \beta i$$

$$\Rightarrow FS_{\mathbb{C}} = \left(1, e^{(1+2i)x}, e^{(1-2i)x}\right)$$

$y_{\lambda_1}$ kde $y_{\lambda_1}(x) = e^{0 \cdot x} = 1$

$$\Rightarrow FS_{\mathbb{R}} = \left(1, e^x\cos(2x), e^x\sin(2x)\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = C + De^x\cos(2x) + Ee^x\sin(2x) \qquad I = \mathbb{R}$$

---

Př

$$y''' - 8y = 0$$

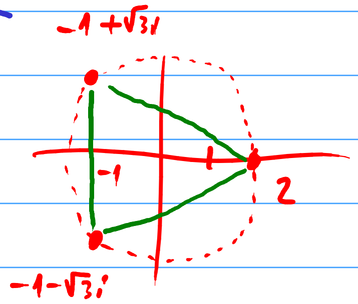
$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

hned vidíme $\lambda_1 = 2$

$$(\lambda^3 - 8) : (\lambda - 2) = \lambda^2 + 2\lambda + 4$$

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \hline 2\lambda^2 - 8 \\ -(2\lambda^2 - 4\lambda) \\ \hline 4\lambda - 8 \end{array}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\, i$$




POZN: $\lambda^3 = 8$ je binom. rovnice $\lambda^n = w$

$$FS_{\mathbb{C}} = \left(e^{2x}, e^{(-1+\sqrt{3}i)x}, e^{(-1-\sqrt{3}i)x}\right)$$

$$FS_{\mathbb{R}} = \left(e^{2x}, e^{-x}\cos(\sqrt{3}x), e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)\right)$$

$$y(x) = \ldots\ldots \quad (\text{DÚ}) \qquad I = \mathbb{R}$$

---

DÚ $\quad y^{(4)} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 42\lambda^2 - 104\lambda + 169 = (\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2$$

odpověda

---

Př $\quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ uhodneme $\lambda_1 = 2$

$+$ vydělíme $\ell(\lambda) : (\lambda - 2)$

$\Rightarrow$

$$\ell(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

školní příklad:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0 \qquad a_k \in \mathbb{Z}$$

předp. $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\lambda_0}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_0^{k-1}}_{\in \mathbb{Z}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_0^k = 0$$

$\Rightarrow \lambda_0$ musí být dělitelem $a_0$

$\lambda_1 = 2$ je 3-nás. kořen

$\Rightarrow FS = \left(e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\right)$

$\Rightarrow y(x) = \dots$ $\qquad I = \mathbb{R}$

---

## Řešení LDR n-tého řádu s PRAVOU STRANOU (METODA VARIACE KONSTANT)

- Wronského determinant funkcí $f_1, \dots, f_n \in C^{(n-1)}((a,b))$

$$\underbrace{W_{f_1,\dots,f_n}}_{\text{wronskián}}(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{\text{Wronského matice}}$$

- jestliže $f_1, \dots, f_n$ jsou LZ na $I$ $\Rightarrow W_{f_1\dots f_n}(x) = 0 \;\; \forall x \in I$

  tj. $\left(\exists x_0 \in I\right)\left(W_{f_1\dots f_n}(x_0) \neq 0\right) \Rightarrow f_1 \dots f_n$ jsou LN na $\underline{I}$.

- (VĚTA) $n$ LN řešení $Ly = 0$ $(y_1, \dots, y_n)$ je FS $\underline{\text{na } I}$

  $\Rightarrow \left(\forall x \in I\right)\left(W_{y_1\dots y_n}(x) \neq 0\right)$ tj. Wronského matice je regulární

## METODA VARIACE KONST

- $Ly = q$ není "n" $\qquad Ly = \underline{y^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k y^{(k)}$

- známe FS : $(y_1, \dots, y_n)$

- víme, že $Ly = 0$ má řeš. ve tvar $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$

- předpokládejme existenci řešení $Ly = \underline{q}$

ve tvar $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\underline{(x)} y_k(x)$

### dosadíme do $Ly = q$

1. $$y' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k}_{\overset{!}{=} 0} \quad \Rightarrow$$

2. $$\Rightarrow \quad y'' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k'' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k'}_{\overset{!}{=} 0} \quad \Rightarrow \quad \dots$$

$\vdots$

(n-1). $$\dots \Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-2)}}_{\overset{!}{=} 0} \quad \Rightarrow$$

n. $$\Rightarrow \quad y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)}}_{\overset{!}{=} q}$$

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} p_j y^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + q + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k \underbrace{\left( y_k^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} p_j y_k^{(j)} \right)}_{Ly_k = \theta} + q = q$$

Maticový zápis podmínek na $C_1', \dots, C_n'$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\text{regulární Wronského matice}} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$ vše v bodě x

$\Rightarrow \exists$ jednoznačné řešení $C_1'(x) = \dots$ $C_n'(x) = \dots$

a pak dostaneme $C_k(x) = \underbrace{\int C_k'(x)\,dx}_{\text{prim. fce k } C_k' = \tilde{C}_k(x)} + D_k$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} D_k y_k(x)}_{\in \Omega_0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k(x) y_k(x)}_{= y_p(x)}$$

Př:

$$1.\quad y'' + 4y = \underbrace{\frac{1}{\cos(2x)}}_{=q(x)}$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 4 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \quad \Rightarrow \quad FS = \big(\underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)}, \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}\big)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(2x)} \end{pmatrix}$$

řešení Cramerovým pravidlem: $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$

$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ kde $\Delta = \det \mathbb{A}$

$\Delta_k = \det$ matice, která vznikla z $\mathbb{A}$ nahrazením $k$-tého sl. pravou stranou $\vec{b}$

$$\Delta = W_{y_1,y_2}(x) = 2 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(2x) \\ \frac{1}{\cos(2x)} & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -\mathrm{tg}(2x)$$

$$\Rightarrow \quad C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2}\mathrm{tg}(2x)$$

$$\Rightarrow \quad C_1(x) = \int -\frac{1}{2}\mathrm{tg}(2x)\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos(2x)| + D_1$$

$t = \cos(2x)$

$dt = -2\sin(2x)\,dx$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sin(2x) & \frac{1}{\cos(2x)} \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2}x + D_2$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{D_1 \cos(2x) + D_2 \sin(2x)}_{\in S_0} + \underbrace{\frac{1}{4}\ln|\cos(2x)| \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x)}_{y_p(x)}$$

$$I_k = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

---

Př

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$$

není ve tvaru $Ly = g$ (je to $\tilde{L}y = \tilde{g}$)

víme $FS = (x, e^x)$

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1 \qquad g(x)\,!$$

přitom $x \neq 1$ (alespoň zatím)

$$y(x) = C_1(x)x + C_2(x)e^x$$

a řešíme
$$\begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = W_{y_1, y_2}(x) = (x-1)e^x$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ x-1 & e^x \end{vmatrix} = (1-x)e^x \;..\; C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1 \;..\; C_1 = -x + D_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1) \;\ldots\; C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = xe^{-x} \;\ldots\; C_2 = -(1+x)e^{-x} + D_2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \underbrace{D_1 x + D_2 e^x}_{\in \Omega_0} \underbrace{- (x^2 + 1 + x)}_{y_p(x)} = \overset{!}{\tilde{D}_1} x + D_2 e^x \underbrace{- x^2 - 1}_{\tilde{y}_p(x)}$$

$\tilde{D}_1 = D_1 + 1$

$I = \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ přitom původní (nevydělené) rovnice má toto řeš. i pro $x=1$!

**Př**

$$x y'' + 2y' + xy = x \quad \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad y'' + \frac{2}{x} y' + y = \underset{q(x)\,!!}{1}$$

1) hledáme FS

subst. $y(x) = \underbrace{u(x)}_{\text{nová prom}} v(x)$ kde $v$ nechodneme

$$x(u''v + 2u'v' + uv'') + 2(u'v + uv') + xuv = 0$$

$$\underbrace{xv \cdot u''}_{\overset{!}{=}0 \text{ nemá smysl} \Leftrightarrow y(x)=0} + \underbrace{(2xv' + 2v)}_{\text{co kdyby } \overset{!}{=}0} u' + \underbrace{(xv'' + 2v' + xv)}_{\tilde{L}v \overset{!}{=} 0 \text{ neumím (snížení řádu)}} u = 0 \quad (*)$$

$$\downarrow$$

$$2xv' + 2v = 0$$

$$xv' + v = 0$$

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + c$$

$c = 0$ .. stačí jediné řeš.

stačí volit $v = \frac{1}{x}$

Zkusíme dosadit $v = \frac{1}{x}$ do $(*)$ : $u'' + u = 0$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ .. $\lambda = \pm i$

$FS_{\mathbb{R}, u} = (\cos x, \sin x)$ ... $FS_y = \left( \frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x} \right)$ $\Rightarrow$ variace konst DÚ

Př – Dn

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

**Řešení:** Platí $\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2$. Proto FS $= \{e^x, xe^x\}$. Předpokládejme

$$y(x) = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,xe^x.$$

Platí

$$\Delta = W_{e^x, xe^x} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{x^2+2x+2}{x^3} & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} = -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^x \implies C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{x^2+2x+2}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^x \implies C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x}.$$

Zintegrujeme $C_1'$ a dostaneme

$$C_1 = \int -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x}\mathrm{d}x = -\int e^{-x}\mathrm{d}x - 2\left[\int \frac{1}{x}e^{-x}\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{1}{x^2}e^{-x}\mathrm{d}x}_{\substack{\text{provedeme per partes jen zde,}\\ \text{zbylé integrály se odečtou}}}\right]$$

$$= e^{-x} + \frac{2}{x}e^{-x} + C.$$

Podobně pro $C_2$ máme

$$C_2 = \int \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}e^{-x}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2}e^{-x}\mathrm{d}x + 2\underbrace{\int \frac{1}{x^2}e^{-x}\mathrm{d}x}_{\substack{\text{provedeme per partes jen zde,}\\ \text{zbydou integrály, vyznačené v hranaté závorce u } C_1}}$$

$$= -\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x^2}e^{-x} + D.$$

Dosadíme a vyjde

$$y(x) = Ce^x + Dxe^x + \frac{1}{x}.$$

$I = (-\infty, 0)$ nebo $I = (0, +\infty)$.

DÚ $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$

POZN! LDR s konst. koef. a spec. tvarem pravé strany

DÚ $y'' + y = \mathrm{tg}(x)$

$$y(x) = C\cos x + D\sin x + \cos x \cdot \ln\left|\frac{1-\sin x}{\cos x}\right|.$$

Je nutné věnovat pozornost definičnímu oboru.

DÚ $y''' - 4y'' + 5y' - 2y + \underbrace{8e^x}_{-q(x)} = 0$

- Při hledání kořenů $\ell(\lambda)$ se uplatní hádání celočíselných kořenů. Vyjde FS $= \left\{e^x, xe^x, e^{2x}\right\}$.
- Wronskián vyjde
$$W_{e^x, xe^x, e^{2x}}(x) = e^{4x}.$$
- Celkové řešení je
$$y(x) = Ce^x + Dxe^x + Ee^{2x} + 4x^2e^x.$$

# LDR s konst. koef. a speciálním tvarem pravé strany

> *Nechť*
>
> $$\tilde{L}y = e^{\beta x}\overbrace{(P_1(x)\cos(\gamma x) + P_2(x)\sin(\gamma x))}^{\tilde{q}(x)}$$
>
> *je LDR s konstantními koeficienty, kde $P_1, P_2$ jsou polynomy stupně nejvýše $r$. Nechť číslo $\beta + \gamma i$ je $k$-násobným kořenem charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$. Potom existuje partikulární řešení této rovnice ve tvaru*
>
> $$y_p(x) = x^k e^{\beta x}(Q_1(x)\cos(\gamma x) + Q_2(x)\sin(\gamma x))$$
>
> *kde $Q_1, Q_2$ jsou polynomy stupně nejvýše $r$.*

**POZN**:
- $\gamma = 0 \Rightarrow \tilde{q}(x) = P_1(x)e^{\beta x}$
- $\beta = \gamma = 0 \Rightarrow \tilde{q}(x) = P_1(x)$
- $\beta + i\gamma$ není kořenem $\ell(\lambda) \Leftrightarrow$ je 0-násobný koř. $\Leftrightarrow k = 0$

---

Př

$$y'' - y = \underbrace{x^2 - x + 1}_{P_1(x)} \qquad (\beta = \gamma = 0) \qquad \text{st } P_1 = 2$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1 \qquad FS = (e^x, e^{-x})$$

$\beta + i\gamma = 0$ není koř. $\ell(\lambda) \Rightarrow k = 0$

víme: $y(x) = Ce^x + De^{-x} + y_p(x)$

$$y_p(x) = \varphi_1(x) = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \text{ neznáme!}$$

kde st $\varphi_1 \le 2$

DOSADÍME: $\Rightarrow y_p''(x) = 2a$

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 - x + 1$$

porovnání koef. u :

$x^2$ : $-a = 1$ $\Rightarrow$ $a = -1$

$x^1$ : $-b = -1$ $\Rightarrow$ $b = 1$

$x^0$ : $2a - c = 1$ $\Rightarrow$ $c = -3$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{x} + De^{-x} + \underbrace{(-x^2 + x - 3)}_{y_p(x)} \qquad I = \mathbb{R}$$

---

DÚ

$$y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$$

$$y'' - y = x^3$$

---

Př

$$y'' - 2y' + y = 4e^{x}$$

$q(x) = P_1(x) e^{x}$

st $P_1 = 0$ , $\beta = 1$, $\gamma = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \qquad FS = (e^{x}, xe^{x})$$

$\beta + i\gamma = 1$ je 2-násobný kořen $\ell(\lambda)$

$\Rightarrow k = 2$

$Q_2(x)$ polynom st 0

$$\Rightarrow y_p(x) = x^2 a \cdot e^{x} = x(\dots)$$

Leibniz. vzorec

$$y_p'(x) = x(\dots)$$

$$y_p''(x) = 2ae^{x} + x(\dots)$$

Po dosazení $2ae^{x} + x \cdot \underbrace{(\dots + \dots + \dots)}_{vím = 0} = 4e^{x}$ $\Rightarrow$ $a = 2$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{x} + Dxe^{x} + 2x^2e^{x} \qquad = y_p(x) \qquad I = \mathbb{R}$$

**Dú**

$$y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$$

$P_1(x) = 6x$, st $P_1 = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$$

$$FS = (e^{2x}, xe^{2x})$$

$\beta$ je 2-násobný kořen $\ell(\lambda)$

$\Rightarrow k = 2$

$$\Rightarrow y_p(x) = x^2(ax+b)e^{2x} = (ax^3 + bx^2)e^{2x}$$

$\Rightarrow$ $a, b$ najdeme dosazením a srovnáním koef. u mocnin $x^0$ a $x^1$ ($x^2, x^3$ vyjdou s koef 0 nezávisle na $a, b$)

$\Rightarrow$ dlouhé zderivovat $y_p(x)$ a dosadit

prozradím: $a = 1$, $b = 0$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x} + \underbrace{x^3e^{2x}}_{y_p(x)}$$

---

**Př**

$$y''' + 2y'' + y' = 36e^{2x}$$

st $P_1 = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$

s poč. podm.

$y(0) = 4$
$y'(0) = 4$
$y''(0) = 8$

$\beta + i\gamma$ není koř. $\ell(\lambda)$

$\Rightarrow k = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda+1)^2 \qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = -1$$

$$\Rightarrow FS = (1, e^{-x}, xe^{-x})$$

$\Rightarrow y_p(x) = ae^{2x}$ zderivujeme, dosadíme

$ae^{2x}(8+2\cdot 4+2) = 36e^{2x}$

$18ae^{2x} = 36e^{2x} \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$

$\Rightarrow \underline{y(x) = C + De^{-x} + Exe^{-x} + 2e^{2x}}$

Budeme dosazovat poč. podm.: v bodě $x=0$

$$\begin{array}{l|l} y(x) = C + De^{-x} + Exe^{-x} + 2e^{2x} & C + D + 2 \overset{!}{=} 4 \\ y'(x) = -De^{-x} + E(1-x)e^{-x} + 4e^{2x} & -D + E + 4 \overset{!}{=} 4 \\ y''(x) = De^{-x} + E(x-2)e^{-x} + 8e^{2x} & D - 2E + 8 \overset{!}{=} 8 \end{array}$$

$\Rightarrow (C,D,E) = (2,0,0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = 2 + 2e^{2x}}}$ $I = \mathbb{R}$

---

Př.

$y'' - 3y' = \underbrace{e^{3x} - 18x}_{g_1(x) + g_2(x)}$

$Ly_1 = g_1$

$Ly_2 = g_2$

$L(y_1 + y_2) = g_1 + g_2$ "superpozice"

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$

$FS = (1, e^{3x})$

$g_1$: $y_{p_1}(x) = xae^{3x}$

$P_1 = 1$ st $P_1 = 0$ $\beta = 3$, ano, $k=1$

$$\begin{cases} y_{p_1}'(x) = ae^{3x} + x\cdot(\dots) \\ y_{p_1}''(x) = 6ae^{3x} + x\cdot(\dots) \end{cases}$$

$$(6a-3a)\,e^{3x} = e^{3x} \Rightarrow \quad 3a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

$$y_{p1}(x) = \frac{1}{3}\,x e^{3x}$$

$q_2$: $\quad y_{p2}(x) = x^1 \cdot (ax+b) = ax^2 + bx \qquad \begin{cases} y_{p2}'(x) = 2ax+b \\ y_{p2}''(x) = 2a \end{cases}$

st $P_1 = 1 \quad \beta, \gamma = 0, \quad k = 1$

dosadíme: $\quad 2a - 3(2ax+b) = -18x$

$$\begin{aligned} x^1&: \quad -6a = -18 \\ x^0&: \quad 2a - 3b = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 3 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{p2}(x) = x(3x+2) = \underline{3x^2 + 2x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{C + De^{3x}}_{\in \Omega_0} + \underbrace{\tfrac{1}{3}xe^{3x}}_{= y_{p1}(x)} + \underbrace{3x^2 + 2x}_{= y_{p2}(x)} \qquad I = \mathbb{R}$$

---

Dú $\qquad y''' - 3y' - 2y = 6e^{-x} - 4xe^{x}$

$\vdots$

$$y(x) = Ce^{-x} + Dxe^{-x} + Ee^{2x} - x^2e^{-x} + xe^{x}$$

---

Př $\qquad y'' - 2y' + 10y = 18e^{x}\sin(3x)$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$

st $P_1 = 0 \quad P_2 = 0$

$FS = (e^{x}\cos(3x),\ e^{x}\sin(3x)) \qquad \beta = 1,\ \gamma = 3,\ k = 1$

$Q_1(x)$ $Q_2(x)$ st $Q_1$, st $Q_2 = 0$

$$y_p(x) = xe^x\left(a\cos(3x) + b\sin(3x)\right) = x.(\dots)$$

$$y_p'(x) = e^x\left(a\cos(3x) + b\sin(3x)\right) + x.(\cdots)$$

$$y_p''(x) = 2e^x\left((a+3b)\cos(3x) + (b-3a)\sin(3x)\right) + x.(\dots)$$

po dosazení vykrátíme $e^x$ a srovnáme koef. u $\cos(3x)$ a $\sin(3x)$

$\cos(3x)$ : $2(a+3b) - 2a = 0 \Rightarrow b = 0$

$\sin(3x)$ : $2(b-3a) - 2b = 18 \Rightarrow \underline{\underline{a = -3}}$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^x\cos(3x) + De^x\sin(3x) \underbrace{-3xe^x\cos(3x)}_{y_p(x)} \qquad \underline{\underline{I = \mathbb{R}}}$$

---

(D4) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$

---

(Př) $y'' + y = 4x\cos x$ st $P_1 = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $k = 1$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$ $FS = (\cos x, \sin x)$

$$y_p(x) = x\left((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right)$$
$$= (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x$$

$$y_p''(x) = (2a+4cx+2d-bx)\cos x + (2c-4ax-2b-dx)\sin x$$

dosadíme a porovnáme koef. u:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | $\sin x$ | $2c - 2b$ | $= 0$ |
| II. | $\cos x$ | $2a + 2d$ | $= 0$ |
| III. | $x \sin x$ | $-4a - d - d$ | $= 0$ |
| IV. | $x \cos x$ | $4c - b + b$ | $= 4$ |

II, III $\Rightarrow a = d = 0$

II + III $\Rightarrow a = d = 0$

I + IV $\Rightarrow c = b = 1$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C \cos x + D \sin x + 2x \cos x + 2x^2 \sin x} \qquad I = \mathbb{R}$$