

Otázky k BC SZZ z předmětu
Matematická analýza a lineární algebra

Tomáš Jakubec a Martin Kovanda
(úprava Martin Kovanda)
(úprava Ji Jia Xiang)

LS 2024/2025

Obsah

1	Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce	3
2	Riemannův integrál v \mathbb{R} , definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě	5
3	Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnání řad, součin řad	8
4	Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady	11
5	(Totální) derivace zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Parciální derivace a gradient funkce více proměnných. Vztah mezi derivací a parciální derivací. Věty o přírůstku funkce.	13
6	Nutná a postačující podmínka extrému funkce více proměnných. Hledání (volných) extrémů. Nutná a postačující podmínka vázaného extrému funkce více proměnných. Hledání vázaných extrémů.	16
7	Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu a jejich řešení	18
8	Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a jejich řešení	20
9	Abstraktní Lebesgueův integrál. Jednotlivé kroky konstrukce integrálu od jednoduchých funkcí po funkce komplexní. Tonelliho-Fubiniho věta. Věta o substituci pro Lebesgueův integrál v \mathbb{R}^n .	22
10	Postačující podmínky garantující záměnu Lebesgueova integrálu a řady. Věty o záměně limity a integrálu a záměně derivace a integrálu (pro funkci závislou na parametru).	26
11	Derivace funkce podle komplexní proměnné, holomorfní funkce a Cauchyovy-Riemannovy rovnice, křivkový integrál v \mathbb{C} , index bodu vzhledem ke křivce, Goursatova věta a Cauchyův vzorec pro konvexní množiny, analytické funkce a jejich vztah k holomorfním funkcím.	28
12	Kořeny a izolované singularity holomorfních funkcí, typy singularit, Laurentovy řady a jejich konvergence, věta o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady, Laurentova řada holomorfní funkce na okolí izolované singularity, Liouvilleova věta.	31
13	Křivkový integrál v \mathbb{C} (zavedení), index bodu vzhledem ke křivce (definice), Cauchyova věta a Cauchyův vzorec (obecná formulace), homotopie a Cauchyova věta, reziduum holomorfní funkce v izolované singularitě (definice), reziduová věta.	33
14	Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.	35
15	Hermitovské a kvadratické formy, polární báze, zákon setrvačnosti, matice kvadratické formy, kritéria pro určování charakteru formy.	41
16	Skalární součin a norma, ortogonalita, nerovnosti, ortogonální doplněk.	43
17	Determinant matice a determinant operátoru.	45
18	Vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic a operátorů	47
19	Rieszova věta, sdružený operátor. Normální, hermitovský a unitární operátor.	49

1 Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírůstku funkce

Definice. (derivace) Mějme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in D_f \cap D'_f$. Potom derivací funkce f v bodě a nazveme

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pokud tato limita existuje. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že je v bodě a diferencovatelná.

Věta. (aritmetika derivace) Budte f, g reálné funkce reálné proměnné diferencovatelné v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak platí, že

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$,
3. $f(a) \neq 0, \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{1}{(f(a))^2}f'(a)$,

pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

Věta. (derivace složené funkce) Nechť g je diferencovatelná v bodě a , f je diferencovatelná v bodě $g(a)$, $a \in D'_{f \circ g}$. Pak $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí, že

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Věta. (derivace inverzní funkce) Nechť f je spojitá a prostá na otevřeném intervalu J a diferencovatelná v bodě $x_0 \in J$, kde $f'(x_0) \neq 0$. Pak inverzní funkce f^{-1} je diferencovatelná v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí, že

$$\left((f|_J)^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Věta. (Darboux) Buď funkce f zprava spojitá v bodě a , nechť je f diferencovatelná na pravém okolí bodu a , nechť existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí, že

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x).$$

Definice. (derivace vyšších řádů) Buď f reálná diferencovatelná funkce. Označíme funkci $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Druhou derivací funkce f'' rozumíme derivaci funkce f' atd. pro vyšší derivace.

Definice. (lokální extrémy) Říkáme, že funkce f má v bodě a

1. lokální maximum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$,
2. ostré lokální maximum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$,
3. lokální minimum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$,
4. ostré lokální minimum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$,

Věta. (nutná podmínka existence extrému) Nechť f má v bodě a lokální extrém. Pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.

Věta. (postačující podmínka pro monotonii funkce) Buď f spojitá na intervalu I , nechť existuje f' na I° . Pak platí, že

1. $(\forall x \in I)(f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ je na I rostoucí.
2. $(\forall x \in I)(f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow f$ je na I klesající.
3. $(\forall x \in I)(f'(x) = 0) \Leftrightarrow f$ je na I konstantní.
4. $(\forall x \in I)(f'(x) > 0) \Rightarrow f$ je na I ostře rostoucí.
5. $(\forall x \in I)(f'(x) < 0) \Rightarrow f$ je na I ostře klesající.

Věta. (derivace a postačující podmínka existence extrému) Buď f diferencovatelná na nějakém okolí bodu a . Je-li $f'(a) = 0$ a současně $f''(a) \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$, pak f má v bodě a ostré lokální $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$.

Definice. (tečna) Funkce f má v bodě a

1. svislou tečnu právě tehdy, když f je spojitá v bodě a a $f'(a) = \pm\infty$,
2. nesvislou tečnu $y(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, pokud je f v bodě a diferencovatelná.

Bodu $(a, f(a))$ říkáme bod dotyku.

Definice. (konvexnost, konkávnost) Říkáme, že f je na intervalu I $\begin{cases} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{cases}$, právě když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3) \left(f(x_2) \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1) + f(x_1) \right).$$

Věta. (postačující podmínka pro konvexnost a konkávnost) Buď funkce f spojitá na intervalu I a diferencovatelná na I° . Je-li f'

$$\begin{cases} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \\ \text{ostře rostoucí} \\ \text{ostře klesající} \end{cases} \text{ na } I^\circ, \text{ pak je } f \text{ na } I \begin{cases} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \\ \text{ryze konvexní} \\ \text{ryze konkávní} \end{cases}.$$

Věta. (postačující podmínka pro monotonii f') Buď funkce f'' na intervalu I° $\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$. Pak f' $\begin{cases} \text{roste} \\ \text{klesá} \\ \text{ostře roste} \\ \text{ostře klesá} \end{cases}$

na I° . Pak f je na I $\begin{cases} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \\ \text{ryze konvexní} \\ \text{ryze konkávní} \end{cases}$.

Definice. (inflexní bod) Říkáme, že funkce f má v bodě a inflexi, právě když je diferencovatelná a platí, že

$$(\exists H_a) (\forall x \in H_a) \left(x < a \Rightarrow f(x) \begin{cases} > \\ < \end{cases} f(a) + f'(a)(x - a) \right) \wedge \left(x > a \Rightarrow f(x) \begin{cases} < \\ > \end{cases} f(a) + f'(a)(x - a) \right).$$

Věta. (nutná podmínka existence inflexního bodu) Nechť funkce f má inflexi v bodě a a nechť je diferencovatelná na okolí a . Pak $f''(a) = 0$ nebo neexistuje.

Věta. (postačující podmínka existence inflexního bodu) Nechť existuje okolí H_a takové, že f má konečnou druhou derivaci na H_a . Nechť $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$. Pak f má v bodě a inflexní bod.

Věta. (asymptota) Funkce f má v $+\infty$ asymptotu o rovnici $y(x) = kx + q$, právě když

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Podobně pro případ $-\infty$.

Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ asymptotu $x = a$, když $\lim_{a+} f$ nebo $\lim_{a-} f$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

Věty o přírůstku funkce

Věta. (Rolleova) Buď f spojitá na intervalu $[a, b]$, nechť f je diferencovatelná na (a, b) , $f(a) = f(b)$. Pak $\exists c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta. (Lagrangeova) Buď f spojitá na intervalu $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) . Pak $\exists c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta. (Cauchyova) Buďte f, g spojitě na intervalu $[a, b]$, diferencovatelné na (a, b) a nechť $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Pak $\exists c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2 Riemannův integrál v \mathbb{R} , definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě

Definice. (dělení intervalu) Buď $[a, b]$ interval v \mathbb{R} . Konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nazýváme rozdělením intervalu $[a, b]$. Bodům x_k pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ říkáme dělicí body intervalu $[a, b]$, intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ říkáme částečný interval intervalu $[a, b]$ při rozdělení σ .

Definice. (norma rozdělení) Buď $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ rozdělením intervalu $[a, b]$. Označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Číslo $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k | k = 1, 2, \dots, n\}$ nazýváme normou rozdělení.

Definice. (zjemnění) Necht' σ a σ' jsou rozdělení intervalu $[a, b]$, přičemž $\sigma \subset \sigma'$. Pak σ' nazýváme zjemněním rozdělení σ .

Definice. (horní a dolní součet) Necht' funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$ a necht' $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $[a, b]$. Označme

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Pak

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$$

nazýváme horním, resp. dolním, součtem funkce f pro rozdělení σ .

Definice. (horní a dolní integrální součet) Necht' funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$. Infimum množiny horních součtů a supremum dolních součtů přes rozdělení σ intervalu $[a, b]$ nazýváme horním, resp. dolním, integrálním součtem funkce f a značíme

$$\int_a^b f = \inf_{\sigma} S(\sigma), \quad \text{resp.} \quad \int_a^b f = \sup_{\sigma} s(\sigma).$$

Definice. (Riemannův integrál, Darboux) Necht' f je omezená na $[a, b]$. Je-li $\int_a^b f = \int_a^b f$, říkáme, že f má v intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál. Společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu značíme $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x) dx$. O funkci f říkáme, že je integrovatelná v $[a, b]$.

Věta. (nutná a postačující podmínka existence) Buď f omezená na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \text{rozdělení } \sigma \text{ intervalu } [a, b]) (S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon).$$

Věta. (postačující podmínky existence integrálu)

Buď funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak f má v tomto intervalu integrál.

Buď funkce f monotonní na intervalu $[a, b]$. Pak f má v tomto intervalu integrál.

Definice. (Riemannova definice Riemannova integrálu) Buď f omezená funkce na $[a, b]$ a necht' $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $[a, b]$. Sumu $\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i$, kde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nazýváme integrálním součtem funkce f při rozdělení σ .

Definice. (normální posloupnost rozdělení) Posloupnost rozdělení intervalu $[a, b]$ $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ nazýváme normální právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(\sigma_n) = 0$.

Věta. (základní věta integrálního počtu) Buď f omezená funkce na $[a, b]$. Integrál $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když pro každou normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost $(\mathcal{J}(\sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentní.

Věta. (integrál jako funkce horní meze) Necht' f je funkce integrovatelná na $[a, b]$. Pak funkce $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $F(x) = \int_a^x f$ je spojitá na $[a, b]$. Je-li navíc funkce f spojitá v bodě $x_0 \in [a, b]$, je funkce F diferencovatelná v x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Newtonova formule

Věta. (Newtonova formule v určitém integrálu) *Nechť existuje $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť existuje funkce F taková, že*

1. F je spojitá na intervalu $[a, b]$,
2. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Pak platí, že

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b.$$

Věta. (Newtonova formule v zobecněném integrálu) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť pro funkci f na intervalu $[a, b)$ platí, že $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$. Existuje-li funkce F taková, že*

1. F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) a
2. F má konečné limity $\lim_{a+} F$, $\lim_{b-} F$.

Pak existuje $\int_a^b f$ a platí, že

$$\int_a^b f = \lim_{b-} F - \lim_{a+} F \stackrel{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b.$$

Substituce

Věta. (o substituci v určitém integrálu) *Nechť pro funkce f a ϕ platí, že*

1. ϕ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a diferencovatelná v (α, β) ,
2. f je spojitá na $\phi([\alpha, \beta])$.

Pak platí, že

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx,$$

pokud integrál na levé straně existuje.

Věta. (o substituci v zobecněném integrálu) *Nechť funkce ϕ je ostře monotonní a má spojitou derivaci ϕ' na intervalu $[\alpha, \beta)$ a nechť je funkce f spojitá na intervalu $\phi([\alpha, \beta))$. Označme $a := \phi(\alpha)$, $b := \lim_{\beta-} \phi$. Pak platí, že*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx,$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje.

Per partes

Věta. (per partes pro určitý integrál) *Nechť funkce f a g jsou spojité na $[a, b]$ a diferencovatelné na (a, b) . Jestliže existují integrály $\int_a^b f'g$ a $\int_a^b fg'$, pak*

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Věta. (per partes pro zobecněný integrál) *Nechť $-\infty < a < b \leq +\infty$ a nechť funkce f a g splňují, že*

1. f , g mají spojitou derivaci f' , g' v intervalu (a, b) ,
2. existuje konečná limita $\lim_{b-} fg$,
3. existuje jeden z integrálů $\int_a^b f'g$, $\int_a^b fg'$.

Pak existuje i druhý integrál a platí, že

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věty o střední hodnotě

Věta. (o střední hodnotě 1) Necht funkce f a g jsou omezené na intervalu $[a, b]$ a necht mají vlastnosti:

1. funkce f je integrovatelná, nezáporná na intervalu $[a, b]$
2. součin fg je integrovatelný na $[a, b]$.

Pak

$$\exists \mu \in \left[\inf_{[a,b]} g, \sup_{[a,b]} g \right] \text{ tak, že } \int_a^b fg = \mu \int_a^b f.$$

Věta. (o střední hodnotě 2) Necht funkce f a fg jsou integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a necht g je monotonní v $[a, b]$. Pak

$$\exists \xi \in [a, b] \text{ tak, že } \int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

Konvergence zobecněného integrálu

Věta. (konvergence zobecněného integrálu) Necht $-\infty < a < b \leq +\infty$ a necht pro funkci f na intervalu (a, b) platí, že $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$. Pak

$$\int_a^b f \text{ existuje} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists c \in (a, b)) (\forall x', x'' \in (c, b)) \left(\left| \int_{x'}^{x''} f \right| < \varepsilon \right).$$

Důsledek. Necht $-\infty < a < b \leq +\infty$ a necht pro funkci f na intervalu $[a, b]$ platí, že $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$. Pak

$$\int_a^b |f| \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^b f \text{ konverguje}.$$

Definice. (absolutní konvergence) Necht integrál $\int_a^b f$ konverguje.

- Když $\int_a^b |f|$ také konverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně.
- Když $\int_a^b |f|$ diverguje, říkáme, že $\int_a^b f$ konverguje neabsolutně.

Věta. (srovnávací kritérium) Necht $-\infty < a < b \leq +\infty$, necht pro funkci f na intervalu (a, b) platí, že $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$ a necht $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Pak

$$\begin{aligned} \int_a^b g \text{ konverguje} &\Rightarrow \int_a^b f \text{ konverguje} \\ \int_a^b f \text{ diverguje} &\Rightarrow \int_a^b g \text{ diverguje}. \end{aligned}$$

Věta. (srovnávací kritérium - limitní tvar) Necht $-\infty < a < b \leq +\infty$, necht pro nezápornou funkci f , resp. kladnou funkci g na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí, že $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$, resp. existuje $R \int_a^x g$. Necht existuje $\lim_{b-} \frac{f}{g} =: L$. Pak platí:

- pokud $L < +\infty$ a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje,
- pokud $L > 0$ a $\int_a^b g$ diverguje, pak $\int_a^b f$ diverguje,
- pokud $0 < L < +\infty$, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_a^b g$.

Věta. (Dirichletovo kritérium) Necht $-\infty < a < b \leq +\infty$, necht pro funkce f a g na intervalu $\langle a, b \rangle$ platí, že $\forall x \in (a, b)$ existuje $R \int_a^x f$, resp. existuje $R \int_a^x fg$. Pokud platí

1. $F(x) := \int_a^x f$ je funkcí omezenou na $\langle a, b \rangle$ a
2. g je funkcí monotonní na $\langle a, b \rangle$ s limitou $\lim_{b-} g = 0$,

pak integrál $\int_a^b fg$ konverguje.

3 Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnání řad, součin řad

Definice. (číselná řada) Necht' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Posloupnost jejích částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ definujeme vztahem

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dvojici posloupností $((a_n)_{n=1}^{+\infty}, (s_n)_{n=1}^{+\infty})$ nazýváme číselnou řadou a značíme ji $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kde a_n nazýváme n -tým členem číselné řady. Existuje-li konečná limita $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$, říkáme, že řada konverguje a má součet s . Pokud limita neexistuje, říkáme, že řada osciluje. Pokud je limita rovna $\pm\infty$, říkáme, že řada podstatně diverguje.

Věta. (nutná podmínka konvergence) Bud' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní řada. Pak $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Věta. (aritmetika řad) Bud' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ číselné řady.

- Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ konverguje.
- Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverguje.
- Bud' $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n$ mají stejný charakter.

Věta. (B-C kritérium konvergence) Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0) (\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) (\forall p \in \mathbb{N}) \left(\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \right).$$

Důsledek. Bud' $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentní řada. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní řada.

Kritéria konvergence

Řady s kladnými členy

Věta. (srovnávací kritérium) Necht' pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí $a_n \leq b_n$ od jistého n_0 .

- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Necht' pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ od jistého n_0 .

- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.
- Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Věta. (podílové kritérium) Bud' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ kladné posloupnosti takové, že existuje $L := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

- Pokud $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $L > 0$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.
- Pokud $L \in (0, +\infty)$, pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter.

Věta. (Cauchyovo odmocninové kritérium) Necht' $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
(Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)
2. Jakmile pro nekonečně mnoho indexů platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.
(Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)

Věta. (d'Alembertovo podílové kritérium) Necht' $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
(Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)
2. Jakmile pro všechny indexy n od jistého indexu n_0 platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.
(Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)

Věta. (Raabeovo kritérium) Nechť $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Existuje-li $\alpha > 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
(Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)
2. Jestliže existuje n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$ pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.
(Limitní případ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)

Věta. (Gaussovo kritérium) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je kladná posloupnost, pro níž existují čísla $q, \alpha \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezená posloupnost $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ taková, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Jestliže $q < 1$ nebo ($q = 1$ a $\alpha > 1$), pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Jestliže $q > 1$ nebo ($q = 1$ a $\alpha \leq 1$), pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta. (integrální kritérium) Nechť f je kladná funkce klesající na $\langle 1, +\infty \rangle$. Pak

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ konverguje}.$$

Řady s obecnými členy

Věta. (Dirichletovo kritérium) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná posloupnost a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ komplexní posloupnost splňující:

1. $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je monotonní a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,
2. $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ má omezenou posloupnost částečných součtů,

pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta. (Abelovo kritérium) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná posloupnost a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ komplexní posloupnost splňující:

1. $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je monotonní a konvergentní,
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ je konvergentní řada,

pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konverguje.

Řady se střídavými znamínky

Věta. (Leibnizovo kritérium) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je klesající posloupnost kladných čísel. Jestliže $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje.

Poznámka. Z Leibnizova kritéria lze odvodit i odhad chyby pro řady se střídavými znaménky, pokud bychom chtěli sečíst jen konečný počet prvků. Největší chyba, které se můžeme dopustit, je rovna prvnímu vynechanému členu v absolutní hodnotě.

Věta. (modifikované Gaussovo kritérium) Necht' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je kladná posloupnost, pro níž existují čísla $q, \alpha \in \mathbb{R}$, kladné ε a omezená posloupnost $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ taková, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Je-li $q < 1$ nebo ($q = 1$ a $\alpha > 1$), pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje absolutně.
- Je-li $q > 1$ nebo ($q = 1$ a $\alpha \leq 0$), pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ diverguje.
- Je-li $q = 1$ a $\alpha \in (0, 1]$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje neabsolutně.

Uzávorkování

Definice. (uzávorkování řady) Buď $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ řada a $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$ ostře rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel s nultým členem $k_0 = 0$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$, jejíž členy jsou určeny $A_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} a_j = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \dots + a_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nazýváme uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$.

Věta. Pokud řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i každé libovolné uzávorkování $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Věta. (uzávorkování řady) Necht' $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=0}^{+\infty}$. Necht' jsou splněny podmínky

1. $(\exists M \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (k_{n+1} - k_n \leq M)$,
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.

Přerovnání řady

Definice. (přerovnání řady) Mějme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a bijekci $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle ϕ .

Věta. (přerovnání absolutně konv. řady) Necht' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak každé její přerovnání je absolutně konvergentní řada se stejným součtem.

Věta. (Riemann) Necht' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní reálná řada. Pak ke každému $s \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ taková, že má součet s . Rovněž existuje oscilující přerovnání.

Součin řad

Definice. (součin řad) Necht' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady a $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme číslo $c_n = a_i b_j$, kde $n = \phi(i, j)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ nazýváme součinem řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Věta. (součin absolutně konvergentních řad) Buďte $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ absolutně konvergentní řady. Pak jejich libovolný součin je také absolutně konvergentní řada a pro její součet platí, že

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_i b_j = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right).$$

Definice. (součinová řada) Necht' $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady. Řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right)$$

nazýváme součinovou řadou.

Důsledek. Pro absolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ platí, že

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right).$$

4 Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady

Definice. (Mocninná řada, obor konvergence) Necht' $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná, resp. komplexní posloupnost a necht' a je reálné, resp. komplexní číslo. Pak řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě a . Množinu všech reálných, resp. komplexních čísel x , pro která mocninná řada konverguje, nazýváme obor konvergence mocninné řady, $s(x)$ pak označuje součet mocninné řady pro x z oboru konvergence.

Věta. Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$ takové, že

1. pokud $|x-a| < \rho$, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje absolutně,
2. pokud $|x-a| > \rho$, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ diverguje.

Definice. (poloměr konvergence) Číslo ρ z předchozí věty nazýváme poloměr konvergence mocninné řady.

Věta. Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je roven

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

přičemž klademe $\rho = 0$, když limes superior je $+\infty$, a $\rho = +\infty$, když limes superior je 0.

Věta. (Mocninnou řadu v oboru konvergence lze derivovat člen po členu) Necht' $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je reálná mocninná řada s kladným poloměrem konvergence ρ . Označme její součet $s(x)$. Pak pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí, že

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Následující tvrzení plyne z důkazu předešlé věty.

Věta. Necht' $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence. Označme $s(x)$ její součet. Pak pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí, že $a_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!}$.

Věta. (Taylorův polynom) Necht' reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n -tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom T_n stupně menší nebo rovno n takový, že

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Tento polynom nazýváme n -tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a a má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Taylorovy polynomy některých funkcí v bodě $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k, \\ f(x) = \sin(x) &\Rightarrow T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \\ f(x) = \cos(x) &\Rightarrow T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \\ f(x) = \ln(1+x) &\Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \\ f(x) = (1+x)^\alpha &\Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k. \end{aligned}$$

Definice. (Taylorův vzorec, zbytek) Nechť f má v bodě a konečnou n -tou derivaci. Položme $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$. Pak vztah $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazveme Taylorovým vzorcem, $R_n(x)$ nazveme n -tým zbytkem v Taylorově vzorci.

Základní předpoklady: Pro funkci f existuje v každém $x \in H_a$, $a \in \mathbb{R}$ konečná $(n-1)$ -ní derivace funkce f a v bodě a existuje konečná n -tá derivace f .

Věta. Nechť pro f , a , n platí základní předpoklady. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Peanův tvar zbytku: $f(x) = T_n(x) + \omega_n(x) \cdot (x-a)^n$, kde $\lim_{x \rightarrow a} \omega_n(x) = 0$.

Věta. (O nejlepší aproximaci) Nechť pro f , a , n platí základní předpoklady a nechť $Q(x)$ je polynom stupně nejvýše n , různý od Taylorova polynomu T_n příslušného funkci f v bodě a . Pak existuje takové okolí H_a , že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)|, \text{ pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

Věta. Nechť pro f , a , n platí základní předpoklady. Nechť dále pro polynom p stupně nejvýše n a reálnou funkci $\tilde{\omega}$ platí, že

$$f(x) = p(x) + (x-a)^n \cdot \tilde{\omega}(x), \text{ kde } \lim_{x \rightarrow a} \tilde{\omega}(x) = 0,$$

pak p je n -tý Taylorův polynom funkce f v bodě a .

Věta. (Taylorova) Nechť existuje okolí H_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$ -ní derivaci a nechť $x \in H_a$. Pak zbytek v Taylorově vzorci má tvar $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ má tvar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží mezi čísly x a a .

Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Cauchyho tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a)$$

Věta. (integrální tvar zbytku) Nechť pro nezáporné celé číslo n , funkci f a bod a platí, že existuje okolí H_a , na kterém má funkce f spojitou $(n+1)$ -ní derivaci. Pak pro každé $x \in H_a$ platí

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Taylorova řada

Vyjádření reálné funkce reálné proměnné jako řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \text{ pro každé } x \in \mathcal{J}$$

nazýváme rozvojem funkce do mocninné řady se středem v bodě $a \in D_f$, kde interval $\mathcal{J} \subset D_f$, $a \in \mathcal{J}^\circ$. Taylorovou řadou rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Z Taylorova vzorce

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

definujícího zbytek $R_n(x)$ plyne, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0.$$

Věta. (Abelova) Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.

5 (Totální) derivace zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Parciální derivace a gradient funkce více proměnných. Vztah mezi derivací a parciální derivací. Věty o přírůstku funkce.

Poznámka: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a neprázdná podmnožina.

Definice. (diferencovatelná funkce, derivace) Necht' $m, n \in \mathbb{N}$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$. Řekneme, že f je diferencovatelná v bodě a , pokud existuje $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tak, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - a\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Lineární zobrazení $T_a = Df(a)$ nazýváme (totální) derivací f v bodě a . Je-li f diferencovatelná v každém bodě množiny Ω , říkáme, že f je diferencovatelná na Ω .

Věta. (jednoznačnost derivace) Derivace diferencovatelné funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ v bodě $a \in \Omega$ je určena jednoznačně.

Definice. (norma lineárního zobrazení) Buďte $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Číslo $\|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \in [0, \infty]$ nazýváme normou lineárního zobrazení T . Je-li $\|T\| < \infty$, T je omezené.

Věta. (vlastnosti normy) Buďte $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normované prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Potom platí:

- $(\forall x \in X) (\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X)$.
- T je omezené $\Leftrightarrow T$ je spojitý $\Leftrightarrow T$ je spojitý v 0.
- Je-li $\dim X < \infty$, potom je T omezený.

Věta. (derivace implikuje spojitost) Je-li $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$, pak je f spojitá v a .

Věta. (aritmetika derivace) Necht' $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou diferencovatelné v bodě $a \in \Omega$. Pak:

1. pro $c \in \mathbb{R}$ je $f + cg$ diferencovatelná v a a platí: $D(f + cg)(a) = Df(a) + cDg(a)$,
2. Je-li $m = 1$, je součin fg diferencovatelná funkce v a a platí: $D(fg)(a) = Df(a)g(a) + f(a)Dg(a)$,
3. Je-li $m = 1$ a $g(a) \neq 0$, je podíl f/g diferencovatelná funkce v a a platí: $D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{(g(a))^2}$.

Věta. (derivace složené funkce) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená taková, že $f(\Omega) \subset U$. Je-li f diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$ a g diferencovatelná v $f(a)$, pak je $g \circ f$ v bodě a diferencovatelná a platí

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

Parciální a směrová derivace

Definice. (gradient) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Řádkový vektor w^T takový, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí $w^T x = Df(a)x$, nazýváme gradient funkce f v bodě a , značíme $\nabla f(a)$.

Definice. (směr, směrová a parciální derivace) Libovolný nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$ nazveme směr v \mathbb{R}^n . Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = D_v f(a) \equiv \frac{\partial f}{\partial v}(a),$$

nazýváme ji (směrová) derivace f ve směru v v bodě a . Spec. pro $v = e_i, i \in \hat{n}$ vektory standardní báze \mathbb{R}^n platí, že pokud existuje konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_i} f(a) \equiv \partial_i f(a),$$

nazýváme ji parciální derivace f podle i -té proměnné v bodě a .

Věta. (gradient a směrová derivace) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Potom pro každý směr $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existuje směrová derivace $D_v f(a)$ a platí $D_v f(a) = \nabla f(a)v$.

Důsledek. Pro $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelnou v bodě $a \in \Omega$ platí $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ (Volbou $v = e_i$).

Věta. (derivace jako matice lineárního zobrazení) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Potom pro každé $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ existuje $\partial_{x_i} f_j$ v bodě a a platí

$$\mathcal{E}_n(Df(a))\mathcal{E}_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Definice. (Jacobiho matice) Nechť pro $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ platí, že v bodě $a \in \Omega$ existují $\partial_{x_i} f_j(a)$ pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$. Potom matice

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

se nazývá Jacobiho matice f v bodě a . Je-li $m = n$, nazýváme determinant Jacobiho matice f jako jakobián f .

Věta. (postačující podmínka diferencovatelnosti funkce) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$. Existují-li pro všechna $i \in \hat{n}$ a $j \in \hat{m}$ parciální derivace $\partial_{x_i} f_j$ na okolí a a jsou spojité v a , pak je f diferencovatelná v a .

Důsledek. (řetězové pravidlo) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, kde $U \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená taková, že $f(\Omega) \subset U$. Dále nechť je f diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$ a g diferencovatelná v $f(a)$. Pak pro každé $i \in \hat{n}$ a $k \in \hat{p}$ platí

$$\frac{\partial(g \circ f)_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Věty o přírůstku funkce

Věta. (Lagrangeova věta o přírůstku funkce) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené a konvexní množině Ω . Jsou-li $a, b \in \Omega$, potom existuje c na úsečce spojující body a, b tak, že

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c)(b - a).$$

Důsledek. Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na množině Ω . Nechť dále $K \subset \Omega$ je konvexní množina a $(\exists M > 0) (\forall x \in K) (||\nabla f(x)|| \leq M)$. Potom pro všechna $x, y \in K$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq M||x - y||.$$

Stejně tvrzení platí i pro vektorové funkce do \mathbb{R}^m .

Důsledek. (nulová derivace, pak je konstantní) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na otevřené a konvexní množině Ω . Je-li $\nabla f = 0$ na Ω , pak f je na Ω konstantní.

Věta. Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná funkce na oblasti Ω . Pokud $Df(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$, pak f je na Ω konstantní.

Derivace vyšších řádů

Definice. (parciální derivace vyšších řádů) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $i, j \in \hat{n}$. Nechť existuje $\partial_{x_i} f$ na okolí bodu a . Existuje-li konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial_{x_i} f(a + te_j) - \partial_{x_i} f(a)}{t} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \equiv \partial_{x_j, x_i}^2 f(a) \equiv \partial_{j, i}^2 f(a),$$

nazýváme ji parciální derivace funkce f v bodě a druhého řádu podle i -té a podle j -té proměnné. Derivace vyšších řádů se zavádí analogicky.

Věta. (záměna pořadí parciálních derivací) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $i, j \in \hat{n}$. Nechť existují $\partial_{x_i} f$ a $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ na okolí bodu a a $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ je spojitá v a . Potom existuje také $\partial_{x_j, x_i}^2 f(a)$ a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Definice. (třídy C^k) Řekneme, že funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^k na Ω , $k \in \mathbb{N}$, právě když

$$(\forall j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}_0, j_1 + \dots + j_n = k) \left(\exists \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}} \text{ a jsou spojité na } \Omega \right).$$

Množinu spojitých funkcí na Ω značíme $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$.

Pokud $f \in C^k(\Omega)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, nazýváme f hladkou funkcí na Ω a značíme $f \in C^\infty(\Omega)$.

Funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je třídy C^k na Ω , $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, právě když $f_j \in C^k(\Omega)$ pro každé $j \in \hat{m}$.

Definice. (druhá derivace skalární funkce) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce na okolí $a \in \Omega$. Řekneme, že f je dvakrát diferencovatelná v bodě a , pokud existuje $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tak, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|Df(x) - Df(a) - B(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Lineární zobrazení $B = D^2 f(a)$ nazýváme druhou derivací f v bodě a .

Věta. Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Potom pro každé $i, j \in \hat{n}$ existuje $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ v bodě a a platí

$$\mathcal{E}_n(Df(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Definice. (Hessova matice) Má-li funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ všechny parciální derivace druhého řádu v bodě $a \in \Omega$, potom $(\nabla^2 f(a)) \in \mathbb{R}^{n, n}$,

$$(\nabla^2 f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad i, j \in \hat{n},$$

se nazývá Hessova matice f v bodě a .

Taylorova věta

Věta. (Taylor) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvexní otevřená množina, $f \in C^{s+1}(\Omega)$, kde $s \in \mathbb{N}_0$. Pak pro $a, x \in \Omega$ platí:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}) + R_{s+1}(x; a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_{s+1}(x; a)}{\|x - a\|^s} = 0$$

kde

$$R_{s+1}(x; a) = \frac{1}{(s+1)!} \sum_{i_1, \dots, i_{s+1}=1}^n \frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{s+1}}} (a + \xi(x - a)) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_{s+1}} - a_{i_{s+1}}), \quad \xi \in (0, 1).$$

Definice. (Taylorův polynom, zbytek) V rovnosti z Taylorovy věty

$$f(x) = P_s(x; a) + R_{s+1}(x; a)$$

se $P_s(x; a)$ nazývá s -tý Taylorův polynom funkce f se středem v bodě a . Dále $R_{s+1}(x; a)$ nazýváme zbytkem po s -tém Taylorově polynomu funkce f se středem v bodě a .

6 Nutná a postačující podmínka extrému funkce více proměnných. Hledání (volných) extrémů. Nutná a postačující podmínka vázaného extrému funkce více proměnných. Hledání vázaných extrémů.

Definice. (lokální extrém) O funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme, že má v bodě $a \in \Omega$

- ostré lokální minimum: $(\exists H_a \subset \Omega) (\forall x \in H_a \setminus \{a\}) (f(x) > f(a))$,
- lokální minimum: $(\exists H_a \subset \Omega) (\forall x \in H_a) (f(x) \geq f(a))$,

a analogicky pro maximum.

Věta. (nutná podmínka existence extrému) Nechť funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální extrém. Potom existuje-li $\partial_{x_i} f(a)$ pro $i \in \hat{n}$, je $\partial_{x_i} f(a) = 0$. Spec. je-li f diferencovatelná v a , potom $\nabla f(a) = 0$.

Definice. (kritický bod) Buď $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $a \in \Omega$. Pokud $\nabla f(a) = 0$, říkáme, že a je kritickým (stacionárním) bodem funkce f .

Definice. (definitnost kvadratických forem) Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,n}$. Matici \mathbb{A} nazveme

- pozitivně definitní (PD) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) (x^T \mathbb{A} x > 0)$,
- pozitivně semidefinitní (PSD) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (x^T \mathbb{A} x \geq 0)$ a \mathbb{A} není PD,
- negativně definitní (ND) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) (x^T \mathbb{A} x < 0)$,
- negativně semidefinitní (NSD) $\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n) (x^T \mathbb{A} x \leq 0)$ a \mathbb{A} není ND,
- indefinitní (IND) $\Leftrightarrow (\exists x, y \in \mathbb{R}^n) (x^T \mathbb{A} x > 0 \wedge y^T \mathbb{A} y < 0)$,

Poznámka. (Sylvesterovo kritérium) Nechť $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,n}$. Pro $k \in \hat{n}$ označme $\Delta_k = \det \mathbb{A}[k]$, kde $\mathbb{A}[k] \in \mathbb{R}^{k,k}$ s $(\mathbb{A}[k])_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j}$, $i, j \in \hat{k}$ (hlavní minory \mathbb{A}). Potom platí:

1. \mathbb{A} je PD $\Leftrightarrow (\forall k \in \hat{n}) (\Delta_k > 0)$,
2. \mathbb{A} je ND $\Leftrightarrow (\forall k \in \hat{n}) ((-1)^k \Delta_k > 0)$.

Věta. (postačující podmínka existence extrému) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$, $a \in \Omega$ je kritický bod f . Pak platí:

1. je-li $\nabla^2 f(a)$ PD, potom f má v a ostré lokální minimum,
2. je-li $\nabla^2 f(a)$ ND, potom f má v a ostré lokální maximum,
3. je-li $\nabla^2 f(a)$ IND, potom f nemá v bodě a lokální extrém a bod a se nazývá sedlový bod.

Věta. (opačná implikace) Nechť $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$, $a \in \Omega$. Pak platí:

1. f má v a lokální minimum $\Rightarrow \nabla^2 f(a)$ je PD, nebo PSD,
2. f má v a lokální maximum $\Rightarrow \nabla^2 f(a)$ je ND, nebo NSD.

Vázaný extrém

Hledáme lokální extrémy funkce $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v množině přípustných řešení $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$, kde $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ představuje funkci vazebních podmínek.

Definice. (lokální extrém vzhledem k množině) O funkci $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ říkáme, že má v bodě $a \in M \subset \Omega$

- ostré lokální minimum vzhledem k M : $(\exists H_a \subset \Omega) (\forall x \in (H_a \cap M) \setminus \{a\}) (f(x) > f(a))$,
- lokální minimum vzhledem k M : $(\exists H_a \subset \Omega) (\forall x \in H_a \cap M) (f(x) \geq f(a))$,

a analogicky pro maximum vzhledem k M .

Definice. (Lagrangeova funkce) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Funkci $L : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vztahem

$$L(x; \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

nazýváme Lagrangeova funkce a parametry $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ Lagrangeovy multiplikátory.

Poznámka. Uvažujme $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ třídy C^1 . Tečným prostorem k množině $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ je ortogonální doplněk gradientu $\nabla g(a)$:

$$T_a(M) = (\nabla g(a))^\perp.$$

Pro $m \geq 1$ platí $M = \bigcap_{j=1}^m M_j = \bigcap_{j=1}^m \{x \in \Omega \mid g_j(x) = 0\}$, tečný prostor k M v bodě a zavedeme jako

$$T_a(M) = \bigcap_{j=1}^m T_a(M_j).$$

Věta. (nutná podmínka existence vázaného extrému) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou funkce třídy $C^1(\Omega)$ a $m < n$. Dále necht' f má lokální extrém vzhledem k množině $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ v bodě $a \in M$ a $h(Dg(a)) = m$. Potom existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\nabla_x L(a; \lambda) = \nabla f(a) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(a) = 0.$$

Poznámka. Pokud je dopředu zaručena existence vázaného extrému (například M kompaktní, f spojitá), pak je lze najít řešením $m + n$ rovnic pro $m + n$ neznámých x_1, \dots, x_n a $\lambda_1, \dots, \lambda_m$:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \\ \nabla_x L(x; \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Definice. (definitnost kvadratických forem vzhledem k množině) Necht' $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$. Matici $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ nazveme

- pozitivně definitní (PD) vzhledem k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P \setminus \{0\}) (x^T \mathbb{A} x > 0)$,
- pozitivně semidefinitní (PSD) vzhledem k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P) (x^T \mathbb{A} x \geq 0)$ a \mathbb{A} není PD vzhledem k P ,
- negativně definitní (ND) vzhledem k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P) (x^T \mathbb{A} x < 0)$,
- negativně semidefinitní (NSD) vzhledem k $P \Leftrightarrow (\forall x \in P) (x^T \mathbb{A} x \leq 0)$ a \mathbb{A} není ND vzhledem k P ,
- indefinitní (IND) vzhledem k $P \Leftrightarrow (\exists x, y \in P) (x^T \mathbb{A} x > 0 \wedge y^T \mathbb{A} y < 0)$,

Věta. (postačující podmínka existence vázaného extrému) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou funkce třídy $C^2(\Omega)$, $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Dále necht' existuje $(a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ tak, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$. Pak platí:

1. je-li $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ PD vzhledem k $T_a(M)$, potom f má v a ostré lokální minimum vzhledem k M ,
2. je-li $\nabla_x^2 L(a; \lambda)$ ND vzhledem k $T_a(M)$, potom f má v a ostré lokální maximum vzhledem k M ,

Věta. (opačná implikace) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou funkce třídy $C^2(\Omega)$ a $m < n$. Dále necht' $a \in M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$ a $h(Dg(a)) = m$. Pak platí:

1. f má v a lokální minimum vzhledem k $M \Rightarrow \nabla^2 f(a)$ je PD, nebo PSD vzhledem k $T_a(M)$,
2. f má v a lokální maximum vzhledem k $M \Rightarrow \nabla^2 f(a)$ je ND, nebo NSD vzhledem k $T_a(M)$.

Důsledek. (neexistence vázaného extrému) Necht' $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou funkce třídy $C^2(\Omega)$, $M = \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$. Dále necht' existuje $(a, \lambda) \in M \times \mathbb{R}^m$ tak, že $\nabla_x L(a; \lambda) = 0$, a $h(Dg(a)) = m < n$. Je-li $\nabla_x L(a; \lambda)$ IND vzhledem k $T_a(M)$, pak a není extrém f vzhledem k M .

7 Lineární diferenciální rovnice n -tého řádu a jejich řešení

Definice. (lineární DR n -tého řádu) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $(\forall j \in \hat{n}) (p_j : I \rightarrow \mathbb{R})$, $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na I . Pak

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = q(x)$$

se nazývá lineární DR n -tého řádu, pro $q(x) \neq 0$ s pravou stranou, ozn. (1); pro $q(x) = 0$ bez pravé strany, ozn. (1').

Poznámka. Rovnice (1) s počátečními podmínkami má dle Picardovy věty jediné řešení diferencovatelné do řádu n .

Poznámka. Každou LDR n -tého řádu lze převést na soustavu n LDR prvního řádu.

Věta. (řešení (1')) Necht' y_1, \dots, y_k na I řeší rovnici (1'). Pak $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$: $y(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j(x)$ řeší (1').

Věta. (partikulární řešení) Necht' y na I řeší rovnici (1'), z na I řeší rovnici (1). Pak $y + z$ řeší (1).

Definice. (lineární závislost funkcí) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f_1, \dots, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f_1, \dots, f_k jsou na I lineárně závislé, pokud

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}) \left(\sum_{j=1}^k |\alpha_j| \neq 0 \right) (\forall x \in I) \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j f_j(x) = 0 \right).$$

V opačném případě jsou f_1, \dots, f_k na I lineárně nezávislé.

Definice. (wroňskián) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f_1, \dots, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné do řádu $k - 1$. Pak výraz

$$W_{f_1, \dots, f_k}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se nazývá Wroňského determinant (wroňskián) funkcí f_1, \dots, f_k .

Věta. (obecná implikace) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f_1, \dots, f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou diferencovatelné do řádu $k - 1$ a na I jsou LZ. Pak $(\forall x \in I) (W_{f_1, \dots, f_k}(x) = 0)$.

Věta. (obrácená implikace) Necht' y_1, \dots, y_n na I řeší (1'). Pak nastane právě jedna situace:

1. $W_{y_1, \dots, y_n}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ a y_1, \dots, y_n jsou LZ na I .
2. $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a y_1, \dots, y_n jsou LN na I .

Definice. (fundamentální systém) Necht' y_1, \dots, y_n na I řeší (1') a jsou LN na I . Pak soubor (y_1, \dots, y_n) se nazývá fundamentální systém.

Věta. (FS je báze) Necht' y_1, \dots, y_n je FS pro (1'). Pak pro každé řešení $y = y(x)$ rovnice (1') na I existuje právě jedna n -tice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ taková, že $y(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x)$.

Věta. (existence FS) Pro rovnici (1') fundamentální systém na I vždy existuje.

Věta. (existence rovnice k souboru funkcí) Necht' y_1, \dots, y_n na $I \subset \mathbb{R}$ otevřené mají derivace do řádu n a $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ na I . Pak existuje právě jedna rovnice (1'), pro kterou je (y_1, \dots, y_n) FS.

Řešení LDR bez pravé strany, FS

Definice. (LDR s konstantními koeficienty) Necht' $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $q \in C(I)$. Pak

$$a_0 y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = q(x)$$

se nazývá lineární DR n -tého řádu s konstantními koeficienty, pro $q(x) \neq 0$ s pravou stranou, ozn. (2); pro $q(x) = 0$ bez pravé strany, ozn. (2').

Poznámka. Funkce $g(x) = e^{\lambda x}$ řeší (2'), právě když λ je kořen charakteristického polynomu $p(\lambda) = \sum_{l=0}^n a_l \lambda^{n-l}$.

Věta. Necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různé kořeny $p = p(\lambda)$. Pak $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$ jsou LN.

Věta. (násobnost řešení) Necht' λ_0 je k -násobný kořen $p = p(\lambda)$. Pak $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ jsou řešení (2').

Důsledek. (tvar FS pro LDR s konst. koef.) Necht' $p(\lambda)$ má různé kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ s násobnostmi k_1, \dots, k_p , $\sum_{j=1}^p k_j = n$. Pak FS pro (2') má tvar

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_p x}, xe^{\lambda_p x}, \dots, x^{k_p-1}e^{\lambda_p x}.$$

Poznámka. Pokud polynom má komplexní kořen $\lambda = a + ib$, pak $\bar{\lambda} = a - ib$ je také kořenem. Potom platí

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1(x) &= e^{\lambda x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)), \\ \tilde{y}_2(x) &= e^{\bar{\lambda} x} = e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx)).\end{aligned}$$

Řešením (2'), tedy prvky FS, jsou i lineární kombinace

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \frac{\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)}{2} = e^{ax} \cos(bx), \\ y_2(x) &= \frac{\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)}{2i} = e^{ax} \sin(bx).\end{aligned}$$

Řešení LDR s pravou stranou, variace konstant

Mějme rovnici (1') s FS y_1, \dots, y_n . Předpokládejme řešení rovnice s pravou stranou tvaru $y(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j(x)$. Postupně derivací získáme

$$\begin{aligned}y'(x) &= \underbrace{\sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j(x)}_{\stackrel{!}{=} 0} + \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j'(x), \\ &\vdots \\ y^{(k)}(x) &= \underbrace{\sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j^{(k-1)}(x)}_{\stackrel{!}{=} 0} + \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j^{(k)}(x), \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x) &= \sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j^{(n-1)}(x) + \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j^{(n)}(x).\end{aligned}$$

Dosazením n -té derivace do (1) získáme

$$\sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j^{(n-1)}(x) + \underbrace{\sum_{j=1}^n C_j(x)y_j^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n p_k(x) \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j^{(n-k)}(x)}_{=\sum_{j=1}^n C_j(x)[y_j^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n p_k(x)y_j^{(n-k)}(x)] = 0 \text{ díky FS}} = q(x).$$

Celkem získáváme soustavu pro $C_j'(x)$ s maticí, pro níž determinant je $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix},$$

pak $C_j(x)$ se získají integrací. Prakticky se $C_j'(x)$ počítají pomocí Cramerova pravidla:

$$C_j'(x) = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

kde $\Delta = W_{y_1, \dots, y_n}(x)$ a Δ_j je determinant matice vzniklé náhradou j -tého sloupce vektorem pravé strany.

8 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a jejich řešení

Všechno je dost podobné předchozí otázce.

Definice. (soustava lineárních DR prvního řádu) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $(\forall i, j \in \hat{n}) (a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}, b_j : I \rightarrow \mathbb{R})$ jsou spojité na I . Pak

$$\begin{aligned} \frac{dy^1}{dx} &= \sum_{j=1}^n a_{1j}(x)y^j + b_1(x), \\ &\vdots \\ \frac{dy^n}{dx} &= \sum_{j=1}^n a_{nj}(x)y^j + b_n(x), \end{aligned}$$

vektorově

$$y' = A(x)y + b(x),$$

je soustava lineárních DR prvního řádu, pro $b(x) \neq 0$ s pravou stranou, ozn. (3); pro $b(x) = 0$ bez pravé strany, ozn. (3').

Poznámka. Rovnice (3) s počátečními podmínkami má dle Picardovy věty jediné diferencovatelné řešení.

Definice. (wroňskián) Necht' $y_i(x) = (y_i^1(x), \dots, y_i^n(x))^T$, $i \in \hat{n}$ jsou funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak výraz

$$W_{y_1, \dots, y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{vmatrix}$$

se nazývá Wroňského determinant (wroňskián) funkcí y_1, \dots, y_n .

Definice. (lineární závislost funkcí) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Řekneme, že y_1, \dots, y_n jsou na I lineárně závislé, pokud

$$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}) \left(\sum_{j=1}^k |\alpha_j| \neq 0 \right) (\forall x \in I) \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j y_j(x) = 0 \right).$$

V opačném případě jsou y_1, \dots, y_n na I lineárně nezávislé.

Věta. (obecná implikace) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $y_1, \dots, y_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou na I LZ. Pak pro každé $x \in I$ platí $W_{y_1, \dots, y_n}(x) = 0$.

Věta. (obrácená implikace) Necht' y_1, \dots, y_n na I řeší (3'). Pak nastane právě jedna situace:

1. $W_{y_1, \dots, y_n}(x) = 0$ pro všechna $x \in I$ a y_1, \dots, y_n jsou LZ na I .
2. $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ a y_1, \dots, y_n jsou LN na I .

Definice. (fundamentální systém) Necht' y_1, \dots, y_n na I řeší (3') a jsou LN na I . Pak soubor (y_1, \dots, y_n) se nazývá fundamentální systém.

Věta. (FS je báze) Necht' y_1, \dots, y_n je FS pro (3'). Pak pro každé řešení $y = y(x)$ rovnice (3') na I existuje právě jedna n -tice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ taková, že $y(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j(x)$.

Věta. (existence FS) Pro rovnici (3') fundamentální systém na I vždy existuje.

Věta. (existence rovnice k souboru funkcí) Necht' y_1, \dots, y_n na $I \subset \mathbb{R}$ otevřené mají první derivaci a $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ na I . Pak existuje právě jedna rovnice (3'), pro kterou je (y_1, \dots, y_n) FS.

Řešení soustavy LDR bez pravé strany, FS

Definice. (LDR s konstantními koeficienty) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ a $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě na I . Pak

$$y' = \mathbb{A}y + b(x),$$

je soustava lineárních DR prvního řádu s konstantními koeficienty, pro $b(x) \neq 0$ s pravou stranou, ozn. (4); pro $b(x) = 0$ bez pravé strany, ozn. (4').

Poznámka. Zkusíme do (4') dosadit $y(x) = e^{\lambda x}v$, kde $v \in \mathbb{R}^n$ je číselný vektor. Pak $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}v$ a získáme

$$\begin{aligned}\lambda e^{\lambda x}v &= \mathbb{A}e^{\lambda x}v \\ \mathbb{A}v - \lambda v &= 0,\end{aligned}$$

neboli $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ a v je vlastní vektor matice \mathbb{A} .

Věta. (tvar FS pro LDR s konst. koef.) Necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ jsou různá vlastní čísla \mathbb{A} s algebraickými násobnostmi k_1, \dots, k_p , $\sum_{j=1}^p k_j = n$. Pak FS pro (4') má tvar

$$e^{\lambda_1 x}v_{11}(x), \dots, e^{\lambda_1 x}v_{1k_1}(x), \dots, e^{\lambda_p x}v_{p1}(x), \dots, e^{\lambda_p x}v_{pk_p}(x),$$

kde $v_{ij}(x)$ je vektor polynomů stupně maximálně $j - 1$.

Řešení soustavy LDR s pravou stranou, variace konstant

Mějme rovnici (3') s FS y_1, \dots, y_n . Předpokládejme řešení rovnice s pravou stranou tvaru $y(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j(x)$. Jeho dosazením do obou stran (3) získáme

$$\begin{aligned}y'(x) &= \sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j(x) + \sum_{j=1}^n C_j(x)y_j'(x) \stackrel{FS}{=}_{y_j'(x)=\mathbb{A}(x)y_j(x)} \sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j(x) + \sum_{j=1}^n C_j(x)\mathbb{A}(x)y_j(x), \\ \mathbb{A}(x)y(x) + b(x) &= \sum_{j=1}^n C_j(x)\mathbb{A}(x)y_j(x) + b(x).\end{aligned}$$

Porovnáním získáme

$$\sum_{j=1}^n C_j'(x)y_j(x) = b(x),$$

maticově

$$\begin{pmatrix} y_1^1(x) & \cdots & y_n^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^n(x) & \cdots & y_n^n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Determinant matice odpovídá wronskiánu $W_{y_1, \dots, y_n}(x) \neq 0$ a prakticky se $C_j'(x)$ počítají pomocí Cramerova pravidla. Konstanty $C_j(x)$ poté získáme integrací.

9 Abstraktní Lebesgueův integrál. Jednotlivé kroky konstrukce integrálu od jednoduchých funkcí po funkce komplexní. Tonelliho-Fubiniho věta. Věta o substituci pro Lebesgueův integrál v \mathbb{R}^n .

Definice. (algebra, σ -algebra) Buď $X \neq \emptyset$, neprázdný systém množin $\mathcal{A} \subset 2^X$ je algebra, právě když platí

- $\forall E \in \mathcal{A}, X \setminus E \in \mathcal{A}$,
- $(\forall n \in \mathbb{N}) (E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A})$.

Je-li systém uzavřený také na spočetné sjednocení, jde o σ -algebru:

- $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \mathcal{A}$.

Definice. (borelovská σ -algebra) (X, τ) topologický prostor. Minimální σ -algebru obsahující τ označíme

$$\mathcal{B}_X = \mathcal{M}(\tau) = \bigcap_{\tau \subset \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-alg.}} \mathcal{A}$$

a nazveme borelovská σ -algebra a její prvky borelovské množiny.

Definice. (míra) Necht' $\mathcal{A} \subset 2^X$ je σ -algebra na X . Množinová funkce $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ splňující

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. σ -aditivita: $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ po dvou disjunktní $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$,

se nazývá míra, (X, \mathcal{A}) je měřitelný prostor a (X, \mathcal{A}, μ) je prostor s mírou. Prvky \mathcal{A} jsou měřitelné množiny. μ je

- konečná $\Leftrightarrow \mu(X) < \infty$,
- σ -konečná $\Leftrightarrow \exists \{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^\infty E_n = X \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) (\mu(E_n) < \infty)$,
- pravděpodobnostní $\Leftrightarrow \mu(X) = 1$.

Věta. (vlastnosti míry) (X, \mathcal{A}, μ) . Potom platí:

1. *monotonie*: $E, F \in \mathcal{A}, E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$,
2. *subaditivita*: $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$,
3. *spojitost zdola*: $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}, E_n \subset E_{n+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$,
4. *spojitost shora*: $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}, E_{n+1} \subset E_n \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^\infty E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$.

Definice. (skoro všude) (X, \mathcal{A}, μ) . Řekneme, že výrok V o prvcích $x \in X$ platí μ -skoro všude, resp. pro μ -skoro všechna $x \in X$, pokud V platí pro všechna x s výjimkou množiny μ -nulové, tj. platí $\forall x \in X \setminus E, E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0$.

Definice. (úplná míra) (X, \mathcal{A}, μ) . μ se nazývá úplná míra, právě když $(\forall F \in \mathcal{A}, \mu(F) = 0) (E \subset F \Rightarrow E \in \mathcal{A})$.

Definice. (vnější míra) Množinová funkce $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ splňující

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. *monotonie*: $E, F \subset X; E \subset F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$
3. *subaditivita*: $\forall \{E_n\}_{n=1}^\infty \subset X \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n)$,

se nazývá vnější míra na X .

Definice. (pramíra) Necht' $\mathcal{A} \subset 2^X$ je algebra na X . Množinová funkce $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ splňující

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$,
2. $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ po dvou disjunktní taková, že $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu_0(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(E_n)$,

se nazývá míra. Pojmy konečná a σ -konečná pramíra se definují stejně jako pro míry.

Teorie integrálu

Definice. (měřitelná funkce) Necht (X, \mathcal{M}) , (Y, \mathcal{N}) jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ nazýváme $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -měřitelné, pokud $(\forall E \in \mathcal{N}) (f^{-1}(E) \in \mathcal{M})$.

Věta. (postačující podmínka měřitelnosti funkce) Necht (X, τ_X) , (Y, τ_Y) jsou topologické prostory. Je-li $f : X \rightarrow Y$ spojitá funkce, pak f je $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ -měřitelná.

Definice. (pozitivní a negativní část funkce) Necht $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Pozitivní, resp. negativní část funkce f definujeme vztahy $f^\pm = \max(0, \pm f)$. Dále platí $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ f^- = 0$.

Definice. (jednoduchá funkce) Funkce $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ je jednoduchá, pokud má konečný obor hodnot $\phi(X)$, neboli se dá zapsat ve tvaru $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, kde $E_i = \phi^{-1}(\{a_i\})$.

Věta. (aproximace jednoduchými funkcemi) Necht (X, \mathcal{M}) .

- $f : X \rightarrow [0, \infty]$ měřitelná, potom existuje posloupnost měřitelných jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že

$$0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f \quad \wedge \quad \phi_n \xrightarrow{X} f.$$

- $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná, potom existuje posloupnost měřitelných jednoduchých funkcí $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ taková, že

$$0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f| \quad \wedge \quad \phi_n \xrightarrow{X} f.$$

Definice. (nezáporné měřitelné funkce) (X, \mathcal{M}, μ) . Označme $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+(X, \mathcal{M}) = \{f : X \rightarrow [0, \infty] \mid f \text{ měřitelná}\}$.

Definice. (integrál jednoduché funkce) $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i} \in \mathcal{L}_+$ jednoduchá funkce. Integrál ϕ vzhledem k μ je

$$\int \phi \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu = \int \phi(x) \, d\mu(x) = \int_X \phi(x) \, d\mu(x) := \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

Je-li $A \in \mathcal{M}$, integrál ϕ vzhledem k μ přes množinu A definujeme vztahem

$$\int_A \phi \, d\mu = \int_A \phi(x) \, d\mu(x) := \int \chi_A \phi \, d\mu.$$

Definice. (integrál nezáporné funkce) (X, \mathcal{M}, μ) , $f \in \mathcal{L}_+$. Integrál f vzhledem k μ je

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int \phi \, d\mu \mid \phi \in \mathcal{L}_+ \text{ jednoduchá a } \phi \leq f \right\}.$$

Je-li $A \in \mathcal{M}$, integrál f vzhledem k μ přes množinu A definujeme vztahem

$$\int_A f \, d\mu := \sup \left\{ \int_A \phi \, d\mu \mid \phi \in \mathcal{L}_+ \text{ jednoduchá a } \phi \leq f \right\}.$$

Věta. (o monotónní konvergenci) (X, \mathcal{M}, μ) , $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+$, $f_n \leq f_{n+1}$. Potom $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{L}_+$ a platí

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Věta. Necht $f \in \mathcal{L}_+$. Potom $\int f \, d\mu = 0$ právě tehdy, když $f = 0$ μ -s.v.

Důsledek. $f, g \in \mathcal{L}_+$ a $f = g$ μ -s.v. Pak $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Věta. (o monotónní konvergenci, slabší předpoklady) (X, \mathcal{M}, μ) , necht $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+$, $f \in \mathcal{L}_+$ a splňují

- $(\forall n \in \mathbb{N}) (f_n \leq f_{n+1})$,
- $(\mu\text{-s.v. } x \in X) (f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$.

Potom

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Lemma. (Fatou) (X, \mathcal{M}, μ) , $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}_+$. Potom

$$\int \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Definice. (integrál reálné a komplexní funkce) (X, \mathcal{M}, μ) . Necht' $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce a alespoň jeden integrál z $\int f^+ d\mu$ a $\int f^- d\mu$ je konečný. Integrál f vzhledem k μ definujeme vztahem

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Je-li $A \in \mathcal{M}$ a alespoň jeden integrál z $\int_A f^+ d\mu$ a $\int_A f^- d\mu$ je konečný, integrál f vzhledem k μ přes množinu A definujeme vztahem

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Je-li $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ měřitelná, pak integrál f vzhledem k μ definujeme vztahem

$$\int f d\mu := \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu,$$

pokud oba integrály napravo mají smysl. Je-li $A \in \mathcal{M}$, klademe

$$\int_A f d\mu := \int_A \operatorname{Re} f d\mu + i \int_A \operatorname{Im} f d\mu.$$

Definice. (integrabilní funkce) Funkci $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme integrabilní, právě když je měřitelná a $\int |f| d\mu < \infty$. Množinu integrabilních funkcí značíme $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Věta. (linearita integrálu) Je-li $f, g \in \mathcal{L}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$, pak $f + \alpha g \in \mathcal{L}$ a platí

$$\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu.$$

Neboli \mathcal{L} je vektorový prostor nad \mathbb{C} a integrál je lineární funkcionál na \mathcal{L} .

Definice. (rozšíření pojmu měřitelná funkce) (X, \mathcal{M}, μ) . Komplexní funkci f definovanou μ -s.v. na X je měřitelná, právě když $(\exists E_f \subset D_f) (E_f \in \mathcal{M}, \mu(E_f^C) = 0)$ tak, že $(\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}) (f^{-1}(B) \cap E_f \in \mathcal{M})$.

Poznámka. Označme

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E_f, \\ 0, & x \in E_f^C. \end{cases}$$

Definice. (rozšíření pojmu integrabilní funkce) Komplexní funkci f definovanou μ -s.v. na X nazveme integrabilní, právě když je měřitelná (dle nové definice) a $\int |\tilde{f}| d\mu < \infty$. Množinu integrabilních funkcí značíme $L \equiv L(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Věta. Platí:

1. L je vektorový prostor nad \mathbb{C} a integrál je lineární funkcionál na L .
2. Je-li f měřitelná, resp. integrabilní, a $g = f$ μ -s.v., pak je g měřitelná, resp. integrabilní.
3. Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost μ -s.v. definovaných měřitelných funkcí a $f_n \rightarrow f$ μ -s.v., pak f je měřitelná.

Poznámka. Tvrzení 2. a 3. v předchozí větě neplatí pro původní definice měřitelnosti a integrability.

Tonelliho-Fubiniho věta

Mějme (X, \mathcal{M}, μ) , (Y, \mathcal{N}, ν) . Definujme algebru $\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{j=1}^n A_j \times B_j \mid \{A_j \times B_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{M} \times \mathcal{N} \text{ p.d.d.} \right\}$. Dále definujme pramíru $\pi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$:

$$\pi(E) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \nu(B_j),$$

a vnější míru $\pi^* : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$:

$$\pi^*(F) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n) \mid \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset F \right\}.$$

Definice. (součin měr) (X, \mathcal{M}, μ) , (Y, \mathcal{N}, ν) . Necht π^* je vnější míra na $X \times Y$ určená pramírou π , viz výše. Míru $\mu \otimes \nu := \pi^* \upharpoonright \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ nazveme součinnová míra μ a ν . Spec. platí $(\forall A \in \mathcal{M}) (\forall B \in \mathcal{N}) (\mu \otimes \nu (A \times B) = \mu(A) \nu(B))$.

Definice. (produktová σ -algebra) Necht $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ jsou σ -algebry na X_1, \dots, X_n . Pak σ -algebra

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \mathcal{M}(\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$$

se nazývá produktová σ -algebra na $X_1 \times \dots \times X_n$.

Věta. (Tonelli-Fubini) Necht (X, \mathcal{M}, μ) , (Y, \mathcal{N}, ν) prostory se σ -konečnými mírami μ, ν .

1. (Tonelli) Je-li $f \in \mathcal{L}_+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$, potom

$$\begin{aligned} (\forall x \in X) (f(x, \cdot) \in \mathcal{L}_+(Y, \mathcal{N})), & \quad (\forall y \in Y) (f(\cdot, y) \in \mathcal{L}_+(X, \mathcal{M})), \\ \int f(\cdot, y) d\nu(y) \in \mathcal{L}_+(X, \mathcal{M}), & \quad \int f(x, \cdot) d\mu(x) \in \mathcal{L}_+(Y, \mathcal{N}) \end{aligned}$$

a platí

$$\int f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

2. (Fubini) Je-li $f \in L(\mu \otimes \nu)$, potom

$$\begin{aligned} (\mu\text{-s.v. } x \in X) (f(x, \cdot) \in L(\nu)), & \quad (\nu\text{-s.v. } y \in Y) (f(\cdot, y) \in L(\mu)), \\ \int f(\cdot, y) d\nu(y) \in L(\mu), & \quad \int f(x, \cdot) d\mu(x) \in L(\nu) \end{aligned}$$

a platí

$$\int f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Lebesgueova míra na \mathbb{R}^n a věta o substituci

Definice. (Lebesgueova míra na \mathbb{R}^n) Zúplněnou míru $m^n = \overline{\bigotimes_{i=1}^n m}$ definovanou na σ -algebře $\mathcal{L}^n = \overline{\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}}$ nazveme Lebesgueova míra na \mathbb{R}^n a prvky σ -algebry \mathcal{L}^n nazveme lebesgueovsky měřitelné množiny.

Definice. (difeomorfismus) Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina. Zobrazení $\phi : \Omega \rightarrow \phi(\Omega)$ je difeomorfismus, pokud je bijekce a $\phi \in C^1(\Omega)$, $\phi^{-1} \in C^1(\phi(\Omega))$.

Věta. (o substituci) Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ difeomorfismus.

1. Je-li f lebesgueovsky měřitelná na $\phi(\Omega)$, pak je $f \circ \phi$ lebesgueovsky měřitelná na Ω . Pokud navíc $f \geq 0$ nebo $f \in L(\phi(\Omega), m)$, potom platí:

$$\int_{\phi(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} f \circ \phi | \det D\phi(x) | dx.$$

2. Je-li $E \subset \Omega$ a $E \in \mathcal{L}^n$, potom $\phi(E) \in \mathcal{L}^n$ a $m(\phi(E)) = \int_E | \det D\phi(x) | dx$.

10 Postačující podmínky garantující záměnu Lebesgueova integrálu a řady. Věty o záměně limity a integrálu a záměně derivace a integrálu (pro funkci závislou na parametru).

Věta. (záměna integrálu a řady pro \mathcal{L}_+) (X, \mathcal{M}, μ) , $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+$ a $f = \sum_{n=1}^\infty f_n$ Potom je $f \in \mathcal{L}_+$ a platí

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\mu.$$

Spec. pro $f, g \in \mathcal{L}_+$ platí

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Věta. (Lebesgue) (X, \mathcal{M}, μ) , $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost μ -s.v. definovaných komplexních měřitelných funkcí a platí:

1. $(\mu\text{-s.v. } x \in X) (\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x))$
2. $(\exists g \in L) (\forall n \in \mathbb{N}) (\mu\text{-s.v. } x \in X) (|f_n(x)| \leq g(x)).$

Pak $f \in L$ a platí

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Věta. (záměna integrálu a řady) (X, \mathcal{M}, μ) , $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost μ -s.v. definovaných komplexních měřitelných funkcí a nechť $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n| \, d\mu < \infty$. Pak funkční řada $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konverguje μ -s.v. k funkci $z L$ a platí

$$\int \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n \, d\mu.$$

Věta. (o limitě) (X, \mathcal{M}, μ) , nechť $-\infty < a < b < \infty$, $t_0 \in (a, b)$ a $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. Nechť platí:

1. $(\forall t \in (a, b)) (f(\cdot, t) \text{ je měřitelná}),$
2. $(\mu\text{-s.v. } x \in X) (\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) =: h(x)),$
3. $(\exists g \in L) (\mu\text{-s.v. } x \in X) (\forall t \in (a, b)) (|f(x, t)| \leq g(x)).$

Pak $h \in L$ a platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) \, d\mu(x) = \int h(x) \, d\mu(x).$$

Věta. (o derivaci) (X, \mathcal{M}, μ) , nechť $-\infty < a < b < \infty$ a $f : X \times (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. Nechť platí:

1. $(\forall t \in (a, b)) (f(\cdot, t) \text{ je integrabilní}),$
2. $(\mu\text{-s.v. } x \in X) (f(x, \cdot) \text{ je diferencovatelná na } (a, b)),$
3. $(\exists g \in L) (\mu\text{-s.v. } x \in X) (\forall t \in (a, b)) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \right).$

Pak funkce $F(t) := \int f(x, t) \, d\mu(x)$ je diferencovatelná na (a, b) , $\partial_t f(\cdot, t) \in L$ a pro každé $t \in (a, b)$ platí

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, d\mu(x).$$

Lebesgueovy prostory L^p

Mějme (X, \mathcal{M}, μ) . Chceme na prostoru integrabilních funkcí \mathcal{L} zavést normu. Přírozená volba $\|f\| = \int |f| d\mu$ není vhodná, jelikož z rovnosti $\|f\| = 0$ obecně neplatí $f = 0$ na X , ale pouze $f = 0$ μ -s.v. na X . Řešením je faktorizace podle relace ekvivalence „rovnost μ -s.v.“.

1. Pro měřitelnou funkci $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ a $p \in [1, \infty]$ definujeme

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{je-li } p \in [1, \infty),$$

a

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup } |f| = \inf \{c > 0 \mid |f(x)| \leq c \text{ pro } \mu\text{-s.v. } x \in X\}$$

je tzv. esenciální supremum funkce $|f|$.

2. Pro $p \in [1, \infty]$ definujeme

$$\mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ měřitelná a } \|f\|_p < \infty\}.$$

3. Faktorizujeme \mathcal{L}^p podle relace "rovnost μ -s.v." a definujeme tak

$$L^p \equiv L^p(X, \mathcal{M}, \mu) := \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^p\}.$$

4. Na L^p zavedeme operace sčítání a násobení číslem $\alpha \in \mathbb{C}$ vztahy:

$$[f + g] := [f] + [g] \quad \text{a} \quad \alpha[f] := [\alpha f].$$

Dále definujeme zobrazení $\|\cdot\|_p : L^p \rightarrow [0, \infty)$ vztahem $\|[f]\|_p := \|f\|_p$. Definice je korektní, tj. nezávisí na volbě reprezentanta třídy, protože integrál nevidí rozdíl mezi funkcemi ve stejné třídě.

5. Konvence: nebudeme rozlišovat mezi funkcí f a třídou $[f]$.

Lemma. (Youngova nerovnost) *Nechť $a, b \geq 0$ a $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom platí:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Věta. (Hölderova nerovnost) *Nechť $p, q > 1$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Pak:*

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Spec. pokud $f \in L^p$ a $g \in L^q$, pak $fg \in L^1$ a platí $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Toto platí i pro limitní hodnoty $p = 1, q = \infty$.

Věta. (Minkowského nerovnost) *Nechť $p \geq 1$ a $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Pak:*

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Důsledek. *Pro každé $p \in [1, \infty]$ je $(L^p, \|\cdot\|_p)$ normovaný prostor.*

Věta. (Úplnost L^p prostorů) *Pro každé $p \in [1, \infty]$ je $(L^p, \|\cdot\|_p)$ úplný, tedy Banachův. Spec. L^2 je Hilbertův, neboť $\|\cdot\|_2$ je indukována skalárním součinem:*

$$\langle f, g \rangle := \int \overline{f(x)} g(x) d\mu(x), \quad f, g \in L^2.$$

11 Derivace funkce podle komplexní proměnné, holomorfní funkce a Cauchyovy-Riemannovy rovnice, křivkový integrál v \mathbb{C} , index bodu vzhledem ke křivce, Goursatova věta a Cauchyův vzorec pro konvexní množiny, analytické funkce a jejich vztah k holomorfním funkcím.

Značení: Ω je neprázdná otevřená podmnožina \mathbb{C} , kouli značíme $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Definice. (komplexní derivace) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$. Řekneme, že f má v z_0 derivaci podle komplexní proměnné, jestliže existuje

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c \in \mathbb{C}.$$

Značíme ji $f'(z_0)$ nebo $\frac{df(z_0)}{dz}$.

Poznámka. (srovnání s derivací v \mathbb{R}^2) Necht' $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Označíme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Tedy označme novou funkci

$$\tilde{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dále platí, že $d\tilde{f}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{2,2}$, tj. je lineární zobrazení:

$$d\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x_0, y_0) + d\tilde{f}(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \tilde{R}(x, y)$$

a platí, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{|\tilde{R}(x,y)|}{|(x,y) - (x_0,y_0)|} = 0$, kde $|\cdot|$ označuje eukleidovskou normu.

Pokud $f'(x_0 + iy_0) = \alpha + i\beta$ existuje, pak $d\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ také existuje. Stejný vztah platí i naopak, pokud ale $d\tilde{f}(x_0, y_0)$ existuje a nemá tento tvar, pak už $f'(x_0 + iy_0)$ existovat nebude, viz následující věta.

Věta. (nutná a postačující podmínka existence komplexní derivace) Necht' $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uvažovaná jako funkce z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ derivaci $df(x_0, y_0)$. Označme $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Potom derivace podle komplexní proměnné $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny Cauchy-Riemannovy (CR) rovnice:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

V takovém případě je $f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Důsledek. Budte $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ a $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Necht' funkce $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ jako reálné funkce na \mathbb{R}^2 mají na okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace 1. řádu. Potom $f'(z_0)$ existuje, právě když u, v splňují CR rovnice.

Poznámka. Obdobně jako u reálných funkcí reálné proměnné platí i zde, že existence $f'(z_0)$ implikuje spojitost f v z_0 . Stejně tak platí linearita derivace, derivace složené funkce a Leibnizovo pravidlo pro derivaci součinu.

Definice. (holomorfní funkce) Funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω , právě když $f'(z)$ existuje pro všechna $z \in \Omega$. Množinu všech holomorfních funkcí na Ω označíme $H(\Omega)$. Je-li f holomorfní na \mathbb{C} , pak je f celá funkce.

Definice. (parciální komplexní derivace) Necht' x, y jsou souřadnice na \mathbb{R}^2 . Pak definujeme $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. V polárních souřadnicích r, ϕ platí $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} e^{-i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$.

Věta. Necht' $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jako funkce uvažovaná z \mathbb{R}^2 do \mathbb{R}^2 má na Ω spojité parciální derivace 1. řádu. Pak f je holomorfní na Ω , právě když $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ na Ω . V takovém případě $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Analytické funkce

Definice. (analytická funkce) Funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je analytická na Ω , jestliže $(\forall a \in \Omega) (\exists r > 0) (D(a, r) \subset \Omega)$ tak, že f lze na $D(a, r)$ vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu se středem v a .

Věta. Necht' $(\forall z \in D(a, R)) (f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n)$, kde $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ poloměr konvergence mocninné řady. Pak $f \in H(D(a, R))$ a $f'(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$.

Důsledek. Za stejných předpokladů má f na $D(a, R)$ komplexní derivace všech řádů. Přitom platí

$$f^{(k)}(z) := \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z-a)^{n-k}.$$

Spec. platí $f^{(k)}(a) = c_k k!$.

Důsledek. $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f : D(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$. Jestliže f lze vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu na $D(a, R)$, pak je tato řada určena jednoznačně.

Důsledek. Je-li $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytická na Ω , pak $f \in H(\Omega)$.

Definice. (vyjádření funkce mocninnou řadou) Funkci $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ lze na Ω vyjádřit mocninnou řadou, právě když $(\forall a \in \Omega) (\forall r > 0) (D(a, r) \subset \Omega)$ lze f na $D(a, r)$ vyjádřit jako konvergentní mocninnou řadu se středem v a .

Poznámka. f lze vyjádřit mocninnou řadou $\Rightarrow f$ je analytická.

Křivkový integrál

Definice. (křivka) (X, τ) . Spojité zobrazení $\gamma : I \rightarrow X$, kde $I = [\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, nazveme křivkou v X a značíme $\gamma \in C(I, X)$. $\langle \gamma \rangle := \gamma(I) \subset X$ je geometrický obraz křivky, $\gamma(\alpha)$, resp. $\gamma(\beta)$ je počáteční, resp. koncový bod křivky. Dále říkáme, že

- γ je jednoduchá nebo Jordanův oblouk $\Leftrightarrow \gamma$ je prosté zobrazení,
- γ je uzavřená $\Leftrightarrow \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$,
- γ je Jordanova křivka $\Leftrightarrow X = \mathbb{R}^2$, γ je uzavřená a $\gamma : [\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ je prosté.

Definice. (regulární křivka) Křivka $\gamma \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ je regulární, jestliže γ je po částech C^1 , tj. existuje dělení $(t_k)_{k=0}^n \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ takové, že $(\forall k \in \hat{n}) (\gamma \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{C}))$.

Definice. (křivkový integrál) $\gamma : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ regulární křivka, $f \in C(\langle \gamma \rangle)$. Pak integrál funkce f podél křivky γ je

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Poznámka. Integrál funkce f přes varietu $\langle \gamma \rangle$ může být odlišný:

$$\int_{\langle \gamma \rangle} f = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Věta. $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ regulární křivka, $\varphi, \psi \in C(\langle \gamma \rangle)$. Označme $\Omega := \mathbb{C} \setminus \varphi(\langle \gamma \rangle)$ otevřená množina. Položme

$$\forall z \in \Omega : f(z) := \int_{\gamma} \frac{\psi(w)}{\varphi(w) - z} dw.$$

Pak f lze na Ω vyjádřit mocninnou řadou.

Definice. (index bodu vzhledem ke křivce) Necht' γ je regulární uzavřená křivka, $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \langle \gamma \rangle$. Pak index bodu z vzhledem ke křivce γ je

$$\text{ind}_{\gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w - z}.$$

Poznámka. Z předchozí věty plyne, že funkci ind_{γ} lze vyjádřit mocninnou řadou, tedy je spojitá.

Věta. Necht' γ je regulární uzavřená křivka, $\Omega := \mathbb{C} \setminus \langle \gamma \rangle$. Pak:

- $\forall z \in \Omega : \text{ind}_{\gamma}(z) \in \mathbb{Z}$,
- $\text{ind}_{\gamma}(z)$ je konstantní funkce na souvislých komponentách Ω ,
- $\text{ind}_{\gamma}(z) = 0$ na neomezené souvislé komponentě Ω .

Cauchyova věta, Cauchyův vzorec

Poznámka. $a, b, c \in \mathbb{C}$. Označme $\Delta(a, b, c) :=$ konvexní obal $\{a, b, c\} \subset \mathbb{C}$, $\partial\Delta(a, b, c) := [a, b] + [b, c] + [c, a]$ úsečky.

Věta. (Goursat) *Nechť $f \in H(\Omega)$. Pak pro každý trojúhelník $\Delta \subset \Omega$ platí: $\int_{\partial\Delta} f = 0$.*

Věta. (zobecněný Goursat) $p \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$, $f \in C(\Omega)$. *Pak pro každý trojúhelník $\Delta \subset \Omega$ platí: $\int_{\partial\Delta} f = 0$.*

Věta. (Cauchy pro konvexní množiny) $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, konvexní množina, $p \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$, $f \in C(\Omega)$. *Pak pro každou regulární uzavřenou křivku γ v Ω platí: $\int_{\gamma} f = 0$.*

Věta. (Cauchyův vzorec pro konvexní množiny) $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, konvexní množina, $f \in H(\Omega)$, γ regulární uzavřená křivka v Ω . *Pak pro každé $z \in \Omega \setminus \langle \gamma \rangle$ platí:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \text{ind}_{\gamma}(z) f(z).$$

Vztah mezi holomorfními a analytickými funkcemi

Věta. *Nechť $f \in H(\Omega)$. Pak f lze na Ω vyjádřit mocninnou řadou.*

Věta. *Nechť $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. f je holomorfní na Ω ,
2. f je analytická na Ω ,
3. f lze na Ω vyjádřit mocninnou řadou.

Důsledek. *Je-li $f \in H(\Omega)$, pak také $f' \in H(\Omega)$. Tedy f má na Ω komplexní derivace všech řádů.*

Věta. (Morera) $f \in C(\Omega)$, *nechť pro každý trojúhelník $\Delta \subset \Omega$ platí: $\int_{\partial\Delta} f = 0$. Pak $f \in H(\Omega)$.*

12 Kořeny a izolované singularity holomorfních funkcí, typy singularit, Laurentovy řady a jejich konvergence, věta o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady, Laurentova řada holomorfní funkce na okolí izolované singularity, Liouvilleova věta.

Definice. (kořen funkce, násobnost) Kořen holomorfní funkce $f \in H(\Omega)$ je číslo $a \in \Omega$ takové, že $f(a) = 0$. Množinu všech kořenů označíme $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$. Násobností kořene $a \in Z(f)$ nazveme číslo $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že můžeme psát $f(z) = (z - a)^m g(z)$, kde $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$.

Věta. $f \in H(\Omega)$, Ω je souvislá množina. Pak nastane právě jedna ze 2 možností:

1. $f = 0$ identicky na Ω ,
2. množina $Z(f)$ nemá v Ω hromadný bod.

Důsledek. Nechť $f, g \in H(\Omega)$, Ω souvislá. Pokud množina $\{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ má hromadný bod v Ω , pak $f = g$.

Poznámka. Označíme $D'(a, r) = D(a, r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Definice. (izolovaná a odstranitelná singularita) $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom f má v bodě a izolovanou singularitu. Pokud existuje $\tilde{f} \in H(\Omega)$ tak, že $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$, $f(z) = \tilde{f}(z)$, pak singularita v bodě a je odstranitelná.

Věta. (nutná a postačující podmínka pro odstranitelnost izolované singularity) $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Singularita v a je odstranitelná $\Leftrightarrow f$ je omezená na nějakém okolí bodu a .

Definice. (pól) $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom f má v bodě a pól řádu $m \in \mathbb{N}$, pokud existují jednoznačně určené $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ tak, že

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k}, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. Tato suma se nazývá hlavní část f v a .

Poznámka. Ekvivalentně lze přepsat: $\forall z \in \Omega \setminus \{a\} : f(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-a)^k} + h(z)$, kde $h \in H(\Omega)$.

Definice. (podstatná singularita) $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom f má v bodě a podstatnou singularitu, pokud pro každé $D(a, r) \subset \Omega$, $r > 0$ je množina $f(D'(a, r))$ hustá v \mathbb{C} .

Věta. (klasifikace singularit) Budťe $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom nastane právě jedna ze tří možností:

1. f má v bodě a odstranitelnou singularitu,
2. f má v bodě a pól řádu m ,
3. f má v bodě a podstatnou singularitu.

Lemma. Budťe $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Případy z předchozí věty lze charakterizovat také následovně:

1. existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$,
2. existuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ (ekvivalentně $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$),
3. neexistuje $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

Laurentovy řady

Definice. (mezikruží) Množinu $P(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - a| < r_2\}$ nazýváme mezikruží.

Poznámka. Speciálně

$$\begin{aligned} P(a, 0, r_2) &= D'(a, r_2), \\ P(a, r_1, +\infty) &= \mathbb{C} \setminus \overline{D(a, r_1)}, \\ P(a, 0, +\infty) &= \mathbb{C} \setminus \{a\}. \end{aligned}$$

Definice. (Laurentova řada) Budťe $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$. Laurentova řada se středem v bodě $a \in \mathbb{C}$ je

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n := \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n}_{\text{regulární část}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}}_{\text{hlavní část}}.$$

Laurentova řada konverguje, právě když konvergují regulární a hlavní část.

Věta. Budťe $c_n \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$. Označme po řadě R_- , R_+ poloměry konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{w^n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n$. Jestliže $\frac{1}{R_-} < R_+$, pak Laurentova řada na $P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně.

Věta. (tvar koeficientů c_n) Za stejných předpokladů jako v předchozí větě nechť $\frac{1}{R_-} < R_+$. Označme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right).$$

Potom $f \in H\left(P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right)\right)$. Dále pro $\forall r \in \left(\frac{1}{R_-}, R_+\right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ platí

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

kde $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Poznámka. Koeficienty c_n v Laurentově rozvoji jsou jednoznačně určeny funkcí f .

Věta. (existence jednoznačného rozvoje) Nechť $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in H(P(a, r_1, r_2))$. Potom f lze na $P(a, r_1, r_2)$ jednoznačně rozvést do konvergentní Laurentovy řady.

Poznámka. $f \in H(D'(a, r))$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Pak f má rozvoj do Laurentovy řady na okolí a : $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Izolovaná singularita f v bodě a je:

1. odstranitelná $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$: $c_{-n} = 0$, tj. hlavní část Laurentovy řady je nulová,
2. pól řádu $m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow c_{-m} \neq 0$ a $\forall n > m$: $c_{-n} = 0$,
3. podstatná $\Leftrightarrow \exists \infty n \in \mathbb{N}$: $c_{-n} \neq 0$.

Liouvilleova věta, princip maxima modulu

Věta. (Parsevalova rovnost pro funkci komplexní proměnné) Nechť $a \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq +\infty$ a $f \in H(D(a, R))$ má tvar mocninné řady $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Pak pro všechna $r \in (0, R)$ platí

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Věta. (Liouville) Nechť $f \in H(\mathbb{C})$. Je-li f omezená na \mathbb{C} , potom f je konstantní funkce.

Věta. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $0 < R \leq +\infty$ a $f \in H(D(a, R))$. Pak pro všechna $r \in (0, R)$ platí

$$|f(a)| \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když f je konstantní funkce. Je-li navíc $\forall z \in D(a, R)$: $f(z) \neq 0$, pak $\forall r \in (0, R)$ platí

$$|f(a)| \geq \min_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(a + re^{i\theta})|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když f je konstantní funkce.

Věta. (princip maxima modulu) Ω souvislá a $f \in H(\Omega)$ není konstantní. Pak $|f|$ nenabývá nikde na Ω lokálního (neostrého) maxima. Je-li navíc funkce f všude na Ω nenulová, pak $|f|$ nenabývá nikde na Ω ani lokálního minima.

13 Křivkový integrál v \mathbb{C} (zavedení), index bodu vzhledem ke křivce (definice), Cauchyova věta a Cauchyův vzorec (obecná formulace), homotopie a Cauchyova věta, reziduum holomorfní funkce v izolované singularitě (definice), reziduová věta.

Definice. (křivkový integrál) Necht' $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ soubor regulárních uzavřených křivek v Ω , $\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{j=1}^n \langle \gamma_j \rangle$. Pak pro $f \in C(\langle \Gamma \rangle)$ zavádíme křivkový integrál

$$\int_{\Gamma} f := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f.$$

Definice. (index bodu vzhledem ke křivce) Necht' $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ soubor regulárních uzavřených křivek v Ω , $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$. Pak index bodu z vzhledem ke křivce Γ je

$$\text{ind}_{\Gamma}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = \sum_{j=1}^n \text{ind}_{\gamma_j}(z).$$

Věta. (Cauchyova věta, Cauchyův vzorec) Bud' $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, soubor regulárních uzavřených křivek v Ω . Necht' $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{ind}_{\Gamma}(z) = 0$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$ platí:

1. (Cauchyova věta): $\int_{\Gamma} f = 0$,
2. (Cauchyův vzorec): $\forall z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\Gamma}(z) f(z)$.

Důsledek. Necht' Γ_0, Γ_1 dva soubory regulárních uzavřených křivek v Ω , necht' $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\text{ind}_{\Gamma_0}(z) = \text{ind}_{\Gamma_1}(z)$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$: $\int_{\Gamma_0} f = \int_{\Gamma_1} f$.

Důsledek. Bud' γ regulární Jordanova křivka v Ω . Necht' $\text{int}(\gamma) \subset \Omega$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$ platí:

1. $\int_{\gamma} f = 0$,
2. $\forall z \in \Omega \setminus \langle \gamma \rangle$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\gamma}(z) f(z)$.

Definice. (homotopie) Necht' $\gamma_0, \gamma_1 \in C([\alpha, \beta], \Omega)$ dvě uzavřené křivky (ne nutně regulární). Řekneme, že γ_0, γ_1 jsou homotopické v Ω , pokud existuje spojitá funkce $H : [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ taková, že

1. $\forall s \in [0, 1]: H(\alpha, s) = H(\beta, s)$,
2. $\forall t \in [\alpha, \beta]: H(t, 0) = \gamma_0(t)$,
3. $\forall t \in [\alpha, \beta]: H(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Věta. Necht' γ_0, γ_1 jsou dvě regulární uzavřené křivky homotopické v Ω . Potom $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$: $\text{ind}_{\gamma_0}(w) = \text{ind}_{\gamma_1}(w)$.

Důsledek. Necht' γ_0, γ_1 jsou dvě regulární uzavřené křivky homotopické v Ω . Potom $\forall f \in H(\Omega)$ platí $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$.

Důsledek. Necht' γ regulární uzavřená křivka homotopická 0 v Ω (tj. konstantní křivce). Potom $\forall f \in H(\Omega)$ platí

1. $\int_{\gamma} f = 0$,
2. $\forall z \in \Omega \setminus \langle \gamma \rangle$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \text{ind}_{\gamma}(z) f(z)$.

Reziduová věta

Definice. (reziduum) Necht $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in H(D'(a, r))$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Reziduum funkce f v bodě a je $\text{res}_a(f) = c_{-1}$.

Věta. (reziduová) Necht $A \subset \Omega$ nemá v Ω hromadný bod a $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ je soubor regulárních uzavřených křivek v $\Omega \setminus A$. Dále necht $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega: \text{ind}_\Gamma(w) = 0$. Potom pro libovolnou $f \in H(\Omega \setminus A)$ platí

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{ind}_\Gamma(a) \text{res}_a(f).$$

Poznámka. A je uzavřená v Ω , je nejvýše spočetná a f má izolovanou singularitu v každém bodě A . Z důkazu plyne, že množina $\{a \in A \mid \text{ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ je konečná.

Důsledek. Je-li γ kladně orientovaná regulární Jordanova křivka a $\text{int}(\gamma) \subset \Omega$, potom

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A \cap \text{int}(\gamma)} \text{res}_a(f).$$

Definice. (meromorfní funkce) Funkci $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ nazveme meromorfní na Ω , jestliže existuje $A \subset \Omega$ taková, že

1. $f \in H(\Omega \setminus A)$,
2. A nemá hromadný bod v Ω ,
3. $\forall a \in A: f$ má v a pól řádu m .

Poznámka. Podle definice má množina A pouze izolované body, v případě $A = \emptyset$ je f holomorfní funkce na Ω .

Poznámka. Pro všechna $a \in A$ je $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, můžeme tedy funkci v těchto bodech dodefinovat hodnotou ∞ .

Poznámka. Funkce typu $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x), q(x)$ jsou polynomy, je meromorfní funkce, $A =$ kořeny polynomu $q(x)$.

14 Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta.

Poznámka. Nejdříve úvod do LAL, lze přeskočit.

Definice. (číselné těleso) Množinu $T \subset \mathbb{C}$ nazveme číselným tělesem, pokud $|T| \geq 2$ a pro každé $\alpha, \beta \in T$ splňuje:

1. $\alpha + \beta \in T$,
2. $\alpha \cdot \beta \in T$,
3. $-\alpha \in T$,
4. pokud $\alpha \neq 0$, pak $\frac{1}{\alpha} \in T$.

Definice. (vektorový prostor) Necht' jsou dány:

1. číselné těleso T ,
2. množina $V \neq \emptyset$, prvky nazýváme vektory,
3. zobrazení $\oplus : V \times V \rightarrow V$,
4. zobrazení $\odot : T \times V \rightarrow V$.

Řekneme, že V je vektorovým prostorem nad T , značíme (V, T, \oplus, \odot) , pokud jsou splněny následující axiomy:

1. komutativita \oplus : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V: \vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$,
2. asociativita \oplus : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V: (\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z})$,
3. existence nulového vektoru: $\exists \vec{y} \in V: \forall \vec{x} \in V, \vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{x}$, značíme $\vec{y} = \vec{0}$,
4. existence opačného vektoru: $\forall \vec{x} \in V: \exists \vec{z} \in V, \vec{x} \oplus \vec{z} = \vec{0}$, značíme $\vec{z} = -\vec{x}$,
5. asociativita \odot : $\forall \alpha, \beta \in T, \forall \vec{x} \in V: (\alpha \cdot \beta) \odot \vec{x} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{x})$,
6. násobení jedničkou: $\forall \vec{x} \in V: 1 \odot \vec{x} = \vec{x}$,
7. distributivita \odot vůči sčítání čísel: $\forall \alpha, \beta \in T, \forall \vec{x} \in V: (\alpha + \beta) \odot \vec{x} = \alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{x}$,
8. distributivita \odot vůči sčítání vektorů: $\forall \alpha \in T, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V: \alpha \odot (\vec{x} \oplus \vec{y}) = \alpha \odot \vec{x} \oplus \alpha \odot \vec{y}$.

Definice. (lineární obal, generátor) Necht' V je vektorový prostor nad tělesem T . Množinu všech lineárních kombinací vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ nazveme lineárním obalem a značíme $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$. Vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nazýváme generátory LO. Pokud platí $V = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda$, pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ nazýváme generátory V .

Definice. (báze) Necht' V je vektorový prostor nad tělesem T , $n \in \mathbb{N}$ a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ jsou LN a generují V . Potom soubor $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ nazveme bází V .

Definice. (dimenze) Necht' $V \neq \{\vec{0}\}$ je vektorový prostor nad tělesem T . Necht' existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že

- ve V existuje n LN vektorů,
- každých $(n + 1)$ vektorů z V je LZ.

Pak dimenze V je konečná a rovna n . V opačném případě klademe $\dim V = +\infty$. Pro nulový vektorový prostor $\dim V = 0$.

Věta. (Steinitzova věta o výměně) Necht' $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory z vektorového prostoru V nad T . Dále necht' $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m \in V$ splňují $\vec{x}_i \in [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$ pro každé $i \in \hat{n}$. Pak platí:

1. $m \geq n$,
2. existují vzájemně různé indexy $i_1, \dots, i_n \in \hat{m}$ tak, že $[\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, (\vec{y}_i \mid i \in \hat{m} \setminus \{i_1, \dots, i_n\})]_\lambda$

Věta. (alternativní definice dimenze) Necht' $n \in \mathbb{N}$, V je vektorový prostor nad T . Pak $\dim V = n$ právě tehdy, když ve V existuje n -členná báze.

Důsledek. (důsledky Steinitze) Nechť V je vektorový prostor nad T a $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Pak:

1. Každá báze V je n -členná.
2. Každý n -členný LN soubor ve V je souborem generátorů, a tedy je bází V .
3. Každý n -členný soubor generátorů V je LN, a tedy je bází V .

Věta. (výběr báze z generátorů) Nechť $n \in \mathbb{N}$, V je vektorový prostor nad T , $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $V = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m]_\lambda$. Pak existují indexy $i_1, \dots, i_n \in \hat{m}$ takové, že $(\vec{y}_{i_1}, \dots, \vec{y}_{i_n})$ tvoří bázi V .

Věta. (doplnění LN vektorů na bázi) Nechť $n \in \mathbb{N}$, V je vektorový prostor nad T , $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Nechť $k \in \hat{n}$ a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$ jsou LN. Pak existují vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n$ takové, že $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x}_n)$ je báze V .

Definice. (souřadnicový funkcionál a izomorfismus) Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báze vektorového prostoru V_n nad tělesem T .

- Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$. Potom α_i nazveme i -tou souřadnicí vektoru \vec{x} v bázi \mathcal{X} .
- Zobrazení $x_i^\# : V_n \rightarrow T$, $x_i^\#(\vec{x}) := \alpha_i$ pro $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme i -tým souřadnicovým funkcionálem v bázi \mathcal{X} .
- Zobrazení $(\cdot)_\mathcal{X} : V_n \rightarrow T^n$, $(\vec{x})_\mathcal{X} := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ pro $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$, nazveme souřadnicovým izomorfismem v bázi \mathcal{X} .

Poznámka. Obě zobrazení jsou aditivní a homogenní.

Definice. (podprostor) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Pak P nazveme podprostorem V a značíme $P \subset\subset V$, pokud $\emptyset \neq P \subset V$ a P je uzavřený na sčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Triviálními podprostory nazveme $\{\vec{0}\}$ a V , jinak se jedná o vlastní podprostory.

Věta. (alternativní definice podprostoru) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T . Nechť $\emptyset \neq P \subset V$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $P \subset\subset V$,
2. $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (\forall \alpha \in T) (\alpha \vec{x} + \vec{y} \in P)$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) (\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P) (\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i \in P)$.

Věta. (první věta o dimenzi) Nechť V je vektorový prostor nad T , $P, Q \subset\subset V$. Pak

$$\dim(P + Q) + \dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q.$$

Definice. (doplňek podprostoru) Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad T , $P, Q \subset\subset V$. Pokud platí $P \oplus Q = V$, pak Q je doplňkem P do V , jeho dimenzi $\dim Q$ značíme $\text{codim } P$ a nazýváme kodimenzí P .

Lineární zobrazení

Definice. (lineární zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T . Zobrazení $A : P \rightarrow Q$ nazveme lineární, pokud platí:

1. A je aditivní: $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (A(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y}))$,
2. A je homogenní: $(\forall \alpha \in T) (\forall \vec{x} \in P) (A(\alpha \vec{x}) = \alpha A(\vec{x}))$.

Věta. (alternativní definice lin. zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T , $A : P \rightarrow Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. A je lineární,
2. $(\forall \alpha \in T) (\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (A(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y}))$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T) (\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \left(A\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j A(\vec{x}_j) \right)$.

Definice. (prostor lineárních zobrazení) Množinu všech lineárních zobrazení z P do Q vektorových prostorů nad tělesem T označíme $\mathcal{L}(P, Q)$. Dále definujeme operace sčítání a násobení číslem z tělesa:

1. $(\forall A, B \in \mathcal{L}(P, Q)) (\forall \vec{x} \in P) ((A + B) \vec{x} := A\vec{x} + B\vec{x})$,
2. $(\forall \alpha \in T) (\forall A \in \mathcal{L}(P, Q)) (\forall \vec{x} \in P) ((\alpha \cdot A) \vec{x} := \alpha A\vec{x})$.

$\mathcal{L}(P, Q)$ s takto definovanými operacemi je vektorový prostor nad T .

Definice. (lineární operátor, funkcionál) V vektorový prostor nad T .

- Je-li $A \in \mathcal{L}(V, V)$, pak A je lineární operátor a značíme $\mathcal{L}(V)$.
- Je-li $\varphi \in \mathcal{L}(V, T)$ pak φ je lineární funkcionál a značíme $V^\#$. Prostor $V^\#$ nazveme duálním prostorem k V .

Definice. (monomorfismus, epimorfismus, izomorfismus) P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak:

1. A je prosté, monomorfismus $\Leftrightarrow (\forall \vec{x}, \vec{y} \in P) (A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y})$,
2. A je „na Q “, epimorfismus $\Leftrightarrow (\forall \vec{z} \in Q) (\exists \vec{x} \in P) (A\vec{x} = \vec{z})$,
3. je-li A prosté i na, pak je A izomorfismus,
4. je-li $P = Q$ a A izomorfismus, pak A je regulární operátor.

Věta. (linearita inverzního zobrazení) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ izomorfismus. Pak existuje $A^{-1} \in \mathcal{L}(Q, P)$ a je také izomorfismem.

Věta. (linearita složeného zobrazení) Budťe P, Q, V vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$. Pak $AB \in \mathcal{L}(P, V)$.

Definice. (obraz a vzor množiny) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$, $N \subset Q$. Obrazem M nazveme $A(M) = \{A\vec{x} \in Q \mid \vec{x} \in M\}$. Vzorem množiny N nazveme $A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} \in N\}$.

Věta. (obraz a vzor podprostoru je podprostor) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$ a $N \subset Q$. Pak $A(M) \subset Q$ a $A^{-1}(N) \subset P$.

Definice. (hodnost, jádro, defekt) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

1. Hodností A nazveme $h(A) := \dim A(P)$,
2. jádrem A nazveme $\ker A := \{\vec{x} \in P \mid A\vec{x} = \vec{0}_Q\}$,
3. defektem A nazveme $d(A) := \dim \ker A$.

Věta. (obraz lineárního obalu) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in P$. Pak $A([\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n]_\lambda$.

Věta. (dimenze obrazu podprostoru) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $P_1 \subset P$. Pak $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$. Spec. $h(A) = \dim A(P) \leq \dim P$.

Věta. (prostota a jádro) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$. A je prosté $\Leftrightarrow \ker A = \{\vec{0}_P\}$.

Věta. (prostota a dimenze obrazu podprostoru) Budťe P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ monomorfismus. Pak platí, že

1. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ LN v P , pak $A\vec{x}_1, \dots, A\vec{x}_n$ jsou LN v Q ,
2. $P_1 \subset P$, pak $\dim A(P_1) = \dim P_1$. Speciálně $h(A) = \dim P$.

Věta. (hodnost složeného zobrazení) P, Q, V vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom

1. $h(AB) \leq h(A)$. Je-li navíc B „na Q “, pak $h(AB) = h(A)$.
2. $h(AB) \leq h(B)$. Je-li navíc A prosté, pak $h(AB) = h(B)$,

Věta. (zadáání lin. zobrazení) P, Q vektorové prostory nad T . Ozn. $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ bázi P , $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n \in Q$. Pak $\exists_1 A \in \mathcal{L}(P, Q)$ tak, že $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$, $\forall i \in \hat{n}$. (Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy bazických vektorů.)

Věta. (řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$) P, Q vektorové prostory nad T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\vec{b} \in A(P)$. Pak množina všech řešení $A\vec{x} = \vec{b}$ má tvar $A^{-1}(\vec{b}) = \vec{a} + \ker A$, kde $\vec{a} \in P$ je partikulární řešení splňující $A\vec{a} = \vec{b}$.

Věta. (druhá věta o dimenzi) Nechť P, Q vektorové prostory nad T . Nechť $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ a $\dim P < +\infty$. Pak

$$h(A) + d(A) = \dim P.$$

Definice. (izomorfní prostory) P, Q vektorové prostory nad T . Řekneme, že P, Q jsou izomorfními prostory a značíme $P \cong Q$, pokud existuje izomorfismus $A \in \mathcal{L}(P, Q)$.

Věta. (izomorfismus prostorů a dimenze) Nechť P, Q vektorové prostory nad T a alespoň jeden z nich má konečnou dimenzi. Pak $P \cong Q$ právě tehdy, když $\dim P = \dim Q$.

Věta. (jednodušší ověření izomorfnosti) P, Q vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P, Q)$, $\dim P = \dim Q < +\infty$. Pak A je izomorfní právě tehdy, když A je monomorfní nebo epimorfní.

Důsledek. Spec. pro $A \in \mathcal{L}(P)$ na prostorech konečné dimenze platí: A je epimorfní $\Leftrightarrow A$ je monomorfní.

Matice a lineární zobrazení

Definice. (násobení matic) $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Součinem matic \mathbb{A} a \mathbb{B} nazveme matici $\mathbb{A}\mathbb{B} \in T^{m,p}$ definovanou:

$$[\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} := \sum_{k=1}^n \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj} \quad \forall i \in \hat{m}, \forall j \in \hat{p}.$$

Součin matic je asociativní, distributivní vůči sčítání, ale NENÍ komutativní, ani pro čtvercové matice.

Definice. (matice lineárního zobrazení) Budť P_n, Q_m vektorové prostory nad T , $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze P_n , \mathcal{Y} báze Q_m . Budť $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Definujeme matici zobrazení A v bázích \mathcal{X} a \mathcal{Y} jako $[\mathcal{X}A\mathcal{Y}]_{ij} := y_i^\#(A\vec{x}_j)$, tj.

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = ((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, \dots, (A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}) \in T^{m,n}.$$

Pokud $A \in \mathcal{L}(P_n)$, pak místo ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{X}}$ píšeme ${}^{\mathcal{X}}A$.

Věta. (vlastnosti matic zobrazení) Budť P_n, Q_m vektorové prostory nad T , \mathcal{X} báze P_n , \mathcal{Y} báze Q_m . Pak

$$1. \forall A, B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m): {}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}},$$

$$2. \forall \alpha \in T, \forall A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m): {}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}.$$

Věta. (výpočet obrazu vektoru) Budť P_n, Q_m vektorové prostory nad T , \mathcal{X} báze P_n , \mathcal{Y} báze Q_m , $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Pak pro každé $\vec{x} \in P_n$ platí

$$(A\vec{x})_{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}(\vec{x})_{\mathcal{X}}.$$

Věta. (matice složeného zobrazení) P_n, Q_m, V_s vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(Q_m, V_s)$, $B \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$. Budť \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} báze P_n , Q_m , V_s . Pak platí:

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Definice. (matice přechodu) \mathcal{X} , \mathcal{Y} báze V_n . Maticí přechodu od \mathcal{X} k \mathcal{Y} nazveme ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} := ((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}}, \dots, (\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}})$.

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic (LAR) pro n neznámých nazveme každou soustavu tvaru

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

kde čísla a_{ij} a b_i pro $i \in \hat{m}$ a $j \in \hat{n}$ jsou obecně komplexní.

Značení:

- Matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

se nazývá matice soustavy.

- Matice

$$\left(\mathbb{A} \middle| \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

se nazývá rozšířenou maticí soustavy.

- Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ se nazývá sloupцем pravé strany.
- Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, pro nějž je soustava splněna, nazýváme řešením soustavy.
- Jestliže $\vec{b} = \vec{0}$, říkáme, že soustava je homogenní nebo bez pravé strany.
- V opačném případě jde o soustavu s pravou stranou.

Poznámka. Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení $\vec{x} = \vec{0}$, takové řešení nazýváme triviální.

Definice. (horní stupňovitý tvar) Matice \mathbb{A} o m řádcích a $n+1$ sloupcích s prvky a_{ij} , $i \in \widehat{m}$, $j \in \widehat{n+1}$, je v horním stupňovitém tvaru, pokud existuje $l \in \widehat{m}$ a indexy k_1, \dots, k_l takové, že $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq n+1$ a platí

1. $a_{ik_i} \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{l}$,
2. $a_{ij} = 0$ pro každé $i \in \widehat{l}$, a $j < k_i$,
3. $a_{ij} = 0$ pro každé $i > l$, $j \in \widehat{n+1}$.

Poznámka. Řešení soustavy provádíme pomocí ekvivalentních řádkových úprav:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice nenulovým číslem.

Poznámka. Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy k_1, k_2, \dots, k_l nazýváme hlavní sloupce, ostatní sloupce nazýváme vedlejší.

- Soustava je řešitelná právě tehdy, když sloupec pravých stran je vedlejší.
- Řešení dopočítáme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.
- Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravých stran je vedlejší.

Frobeniova věta

Definice. (hodnost matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Hodností \mathbb{A} nazveme $h(\mathbb{A}) := \dim [\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n]_{\lambda}$.

Věta. (hodnost lineárního zobrazení a jeho matice) Budť P_n, Q_m vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_m)$, \mathcal{X} báze P_n , \mathcal{Y} báze Q_m . Pak $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.

Definice. (regulární a singulární matice) $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární matice, pokud $h(\mathbb{A}) = n$. V opačném případě je \mathbb{A} singulární.

Věta. (izomorfismus a regulární matice) Budť P_n, Q_n vektorové prostory nad T , $A \in \mathcal{L}(P_n, Q_n)$, \mathcal{X} báze P_n , \mathcal{Y} báze Q_n . Pak A je izomorfismus právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární matice.

Důsledek. (regulární operátor a regulární matice) P_n vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(P_n)$, \mathcal{X} báze P_n . Pak A je regulární operátor právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A$ je regulární matice.

Věta. (hodnost součinu matic) Nechť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Pak

- $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{A})$. Je-li navíc $n = p$ a \mathbb{B} regulární matice, pak $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) = h(\mathbb{A})$.
- $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{B})$. Je-li navíc $m = n$ a \mathbb{A} regulární matice, pak $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) = h(\mathbb{B})$.

Věta. (Frobenius) Budť $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\vec{b} \in T^m$. Pak pro soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ platí:

1. řešení existuje právě tehdy, když $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$,
2. $S_0 := \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = 0\}$, pak $S_0 \subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$,
3. pokud $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\vec{b})$, pak množina všech řešení $S := \{\vec{x} \in T^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}\}$ má tvar $S = \vec{a} + S_0$, kde \vec{a} je partikulární řešení ($\mathbb{A}\vec{a} = \vec{b}$).

Důsledek. Homogenní soustava s maticí $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ má pouze triviální řešení $\Leftrightarrow \mathbb{A}$ je regulární matice.

Důsledek. Soustava $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$, $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $\vec{b} \in T^n$ má právě jedno řešení $\Leftrightarrow \mathbb{A}$ je regulární matice.

Inverzní matice a operátor, úplná Gaussova eliminace.

Definice. (inverzní matice) Nechť \mathbb{A} je matice s prvky z tělesa T . Pokud existuje matice \mathbb{B} s prvky z T taková, že $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, pak \mathbb{B} je inverzní matice k \mathbb{A} .

Poznámka. Víme $h(\mathbb{A}\mathbb{B}) \leq h(\mathbb{A})$. Proto pro singulární matici \mathbb{A} nemůže platit $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ pro žádnou matici \mathbb{B} .

Věta. (existence inverzní matice) Budť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Důsledek. (regularita a inverzní matice) Matice $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ je regulární právě tehdy, když existuje \mathbb{A}^{-1} .

Věta. (inverzní matice k součinu matic) $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$ regulární matice. Pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

Věta. (úplná Gaussova eliminace) Budť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární, $\mathbb{B} \in T^{n,m}$. Pak \mathbb{A} lze pomocí EŘŮ převést na jednotkovou matici. Pokud převedeme rozšířenou matici $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B})$ pomocí EŘŮ do tvaru $(\mathbb{I} \mid \mathbb{X})$, pak $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}$. Symbolicky $(\mathbb{A} \mid \mathbb{B}) \sim (\mathbb{I} \mid \mathbb{A}^{-1}\mathbb{B})$.

Věta. (pravý a levý inverzní operátor) Nechť V je vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$.

- Pokud existuje $B \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $AB = I$, pak A je „na V “.
- Pokud existuje $C \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $CA = I$, pak A je prostý.
- Pokud existují $B, C \in \mathcal{L}(V)$ tak, že $AB = I = CA$, pak A je regulární operátor a $A^{-1} = B = C$.

Operátor B nazveme pravým inverzním operátorem k A , operátor C nazveme levým inverzním operátorem k A .

Věta. (inverzní operátor ke složení operátorů) Nechť V je vektorový prostor nad T , $A, B \in \mathcal{L}(V)$ regulární. Pak AB je regulární operátor a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Věta. (inverzní operátor a inverzní matice) Nechť V_n je vektorový prostor nad T , \mathcal{X} je báze V_n , $A \in \mathcal{L}(V)$. Je-li A regulární operátor, pak ${}^{\mathcal{X}}(A^{-1}) = ({}^{\mathcal{X}}A)^{-1}$.

15 Hermitovské a kvadratické formy, polární báze, zákon setrvačnosti, matice kvadratické formy, kritéria pro určování charakteru formy.

Značení: $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$.

Definice. (hermitovská forma) Nechť V je vektorový prostor nad T . Zobrazení $h : V \times V \rightarrow T$ nazveme hermitovskou formou, pokud platí:

1. hermitovskost: $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V) \left(h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})} \right),$
2. linearita v prvním argumentu: $(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T) (h(\alpha \vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z})).$

Diagonálou hermitovské formy nazýváme zobrazení $Q : V \rightarrow T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ jako $Q(\vec{x}) := h(\vec{x}, \vec{x})$.

Věta. (vlastnosti) V vektorový prostor nad T , h hermitovská forma na V s diagonálou Q . $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T$ platí:

1. antilinearita ve druhém argumentu: $h(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \vec{z}) = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z}),$
2. $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R},$
3. $Q(\alpha \vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x}),$
4. $Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2\operatorname{Re}(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y}),$
5. rovnoběžníková rovnost: $Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y})),$

6. polarizační identity:

pro $T = \mathbb{R}$

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} (Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})),$$

pro $T = \mathbb{C}$

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4} (Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})) + \frac{i}{4} (Q(\vec{x} + i\vec{y}) - Q(\vec{x} - i\vec{y})).$$

Definice. (nulprostor) V vektorový prostor nad T , h hermitovská forma na V . Nulprostorem h nazveme množinu

$$N_h = \{\vec{x} \in V \mid h(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V\}.$$

Nulitou formy h pak rozumíme $\dim N_h$. h nazýváme regulární právě tehdy, když $\dim N_h = 0$, jinak je h singulární.

Věta. (o nulprostoru) Buď V vektorový prostor nad T , h hermitovská forma na V . Pak $N_h \subset \subset V$.

Polární báze

Definice. (polární báze) Nechť V_n je vektorový prostor nad T , h je hermitovská forma na V_n a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ je báze V_n . Jestliže $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$, pak \mathcal{A} nazveme polární bází hermitovské formy h .

Věta. (existence polární báze) h hermitovská forma na V_n vektorovém prostoru nad T . Pak existuje polární báze h .

Věta. (hledání polární báze) Buď h hermitovská forma na V_n vektorovém prostoru nad T , Q její diagonála, $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ báze V_n . Nechť existují $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$ tak, že $Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 q_j$ pro každé $\vec{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{a}_j$. Pak $q_l = Q(\vec{a}_l)$ pro každé $l \in \hat{n}$ a \mathcal{A} je polární báze h .

Věta. (nulprostor a polární báze) Buď h hermitovská forma na V_n vektorovém prostoru nad T , Q její diagonála, $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ polární báze h . Nechť existuje $k \in \hat{n}$ tak, že $Q(\vec{a}_j) = 0$ pro každé $j \leq k$ a $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro každé $j > k$. Pak $N_h = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k]_\lambda$. Pokud naopak $Q(\vec{a}_j) \neq 0$ pro každé $j \in \hat{n}$, pak $N_h = \{\vec{0}\}$.

Důsledek. h hermitovská forma na V_n vektorovém prostoru nad T , Q její diagonála, $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ polární báze h . Pak počet nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$ nezáleží na volbě báze \mathcal{A} a je roven nulitě.

Kvadratické formy

Definice. (kvadratická forma) Nechť V je vektorový prostor nad T . Zobrazení $Q : V \rightarrow T$ je kvadratickou formou, pokud existuje hermitovská forma h taková, že Q je její diagonálou. Takovou h pak nazýváme polárou Q . Polární bázi, nulprostorem a nulitou Q rozumíme polární bázi, nulprostor a nulitu h . Dále Q je regulární, právě když h je regulární.

Věta. (zákon setrvačnosti kvadratických forem) Q kvadratická forma na V_n vektorovém prostoru nad T a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ polární báze Q . Označme p, q, r počty kladných čísel, záporných čísel a nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \dots, Q(\vec{a}_n))$. Pak (p, q, r) nezávisí na volbě báze.

Definice. (index setrvačnosti, signatura kvadratické formy) Čísla p , resp. q z předchozí věty nazýváme kladným, resp. záporným indexem setrvačnosti kvadratické formy. Signaturou Q nazýváme trojici $\text{sg}(Q) := (p, q, r)$ a hodnotí Q rozumíme $h(Q) := p + q$.

Definice. (charakter kvadratické formy) Buď Q kvadratická forma na V vektorovém prostoru nad T . Q je:

- pozitivně definitní (PD) $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}: Q(\vec{x}) > 0$,
- pozitivně semidefinitní (PSD) $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V: Q(\vec{x}) \geq 0$ a současně $\exists \vec{x}_0 \in V \setminus \{\vec{0}\}: Q(\vec{x}_0) = 0$,
- negativně definitní (ND) $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}: Q(\vec{x}) < 0$,
- negativně semidefinitní (NSD) $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in V: Q(\vec{x}) \leq 0$ a současně $\exists \vec{x}_0 \in V \setminus \{\vec{0}\}: Q(\vec{x}_0) = 0$,
- indefinitní (IND) $\Leftrightarrow \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V: Q(\vec{x}_1) > 0 \wedge Q(\vec{x}_2) < 0$.

Věta. (charakter a signatura) Q kvadratická forma na V_n vektorovém prostoru nad T , $\text{sg}(Q) = (p, q, r)$. Pak:

- Q je PD $\Leftrightarrow p = n, q = 0, r = 0$,
- Q je PSD $\Leftrightarrow q = 0, r \neq 0$,
- Q je ND $\Leftrightarrow p = 0, q = n, r = 0$,
- Q je NSD $\Leftrightarrow p = 0, r \neq 0$,
- Q je IND $\Leftrightarrow p \neq 0, q \neq 0$.

Definice. (matice kvadratické formy) Q kvadratická forma na V_n vektorovém prostoru nad T , h její polára, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n . Maticí kvadratické formy Q , resp. hermitovské formy h v bázi \mathcal{X} je $[\mathcal{X}Q]_{ij} := h(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$.

Věta. (vlastnosti matice kvadratické formy) Nechť Q kvadratická forma na V_n vektorovém prostoru nad T , h její polára, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n . Pak:

- $\mathcal{X}Q = (\mathcal{X}Q)^H$,
- $h(\vec{x}, \vec{y}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathcal{X}Q \overline{(\vec{y})_{\mathcal{X}}}$ pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$,
- $Q(\vec{x}) = ((\vec{x})_{\mathcal{X}})^T \mathcal{X}Q \overline{(\vec{x})_{\mathcal{X}}}$ pro každé $\vec{x} \in V_n$,
- $\mathcal{Y}Q = (\mathcal{Y}I^{\mathcal{X}})^T \mathcal{X}Q \overline{(\mathcal{Y}I^{\mathcal{X}})}$ pro každou bázi \mathcal{Y} prostoru V_n .

Věta. (hodnota kvadratické formy a její matice) Nechť Q kvadratická forma na V_n vektorovém prostoru nad T a $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ báze V_n . Pak $h(Q) = h(\mathcal{X}Q)$.

Věta. (Sylvesterovo kritérium) Nechť Q kvadratická forma na V_n vektorovém prostoru nad T a \mathcal{X} je báze V_n . Označme $\Delta_k := \det \mathcal{X}Q[k]$, $k \in \hat{n}$ hlavní subdeterminanty matice $\mathcal{X}Q$. Pak platí:

1. Q je PD $\Leftrightarrow (\forall k \in \hat{n}) (\Delta_k > 0)$,
2. Q je ND $\Leftrightarrow (\forall k \in \hat{n}) ((-1)^k \Delta_k > 0)$.

16 Skalární součin a norma, ortogonalita, nerovnosti, ortogonální doplněk.

Značení: $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$.

Definice. (skalární součin, norma, pre-Hilbertův prostor) Buď V vektorový prostor nad T . Zobrazení $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow T$ nazveme skalárním součinem, pokud $\langle \cdot | \cdot \rangle$ je hermitovskou formou s pozitivně definitní diagonálou:

1. hermitovskost: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V: \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \overline{\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle}$,
2. linearita v prvním argumentu: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \forall \alpha \in T: \langle \alpha \vec{x} + \vec{y} | \vec{z} \rangle = \alpha \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle + \langle \vec{y} | \vec{z} \rangle$,
3. pozitivní definitnost: $\forall \vec{x} \in V: \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \geq 0$ a současně $\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow T$ definované $\forall \vec{x} \in V$ předpisem $\|\vec{x}\| := \sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$ nazveme normou.

Vektorový prostor V nad T se skalárním součinem $\langle \cdot | \cdot \rangle$ značíme \mathcal{H} a nazýváme pre-Hilbertovým prostorem.

Definice. (úhel) Buďte \mathcal{H} nad \mathbb{R} a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$, $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Pak úhlem mezi \vec{x} a \vec{y} rozumíme číslo

$$\varphi := \arccos \frac{\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Definice. (ortogonalita) Vektory $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{H}$ nazveme ortogonálními, pokud $(\forall i, j \in \hat{n}, i \neq j)(\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = 0)$. Dále říkáme, že jsou ortonormální, pokud $\langle \vec{x}_i | \vec{x}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Věta. (lineární nezávislost OG vektorů) \mathcal{H} nad T , $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathcal{H}$ nenulové OG vektory. Pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN.

Věta. (souřadnice v OG bázi) Nechť \mathcal{H}_n je vektorový prostor nad T . Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je OG báze v \mathcal{H}_n . Potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí:

$$x_i^\#(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}.$$

Definice. (Fourierovy koeficienty) Buď \mathcal{H}_n vektorový prostor nad T . Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ON báze v \mathcal{H}_n . Pak souřadnice vektorů v bázi \mathcal{X} nazýváme Fourierovými koeficienty v bázi \mathcal{X} .

Věta. (Pythagorova) \mathcal{H} vektorový prostor nad T , $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ jsou OG vektory. Pak $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Věta. (Gramova-Schmidtova) Nechť \mathcal{H} je vektorový prostor nad T . Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory z \mathcal{H} . Pak existují OG (i ON) vektory $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \hat{n}$.

Poznámka. Vzorec ortogonalizačního procesu:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \vec{x}_{k+1} | \vec{y}_i \rangle}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i.$$

Důsledek. (existence ON báze) Každý vektorový prostor \mathcal{H}_n nad T má ON bázi.

Věta. (ON báze) Nechť \mathcal{H} je vektorový prostor nad T , $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ON soubor v \mathcal{H} . Pak jsou následující výroky ekvivalentní:

1. \mathcal{X} je báze.
2. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}: \vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \vec{x}_i$,
3. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}: \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle \overline{\langle \vec{y} | \vec{x}_i \rangle}$,
4. $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$ platí Parsevalova rovnost: $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2$.

Nerovnosti

Věta. (Cauchyho-Schwarzova nerovnost) *Bud' \mathcal{H} vektorový prostor nad T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když jsou vektory \vec{x} a \vec{y} lineárně závislé.

Věta. (trojúhelníková nerovnost) *Bud' \mathcal{H} vektorový prostor nad T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\exists \alpha \geq 0$ takové, že $\vec{x} = \alpha \vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha \vec{x}$.

Věta. (Besselova nerovnost) *\mathcal{H} vektorový prostor nad T , $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathcal{H}$ jsou ON vektory. Pak $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}$ platí:*

$$\sum_{i=1}^k |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2.$$

Ortogonální doplněk

Definice. (OG doplněk) \mathcal{H} vektorový prostor nad T , $\emptyset \neq M \subset \mathcal{H}$. Ortogonálním doplňkem M do \mathcal{H} nazveme

$$M^\perp := \{\vec{x} \in \mathcal{H} \mid \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 \text{ pro každé } \vec{y} \in M\}.$$

Věta. (Vlastnosti OG doplňku) *Nechť \mathcal{H} je vektorový prostor nad T , $\emptyset \neq M \subset \mathcal{H}$. Pak platí:*

- $M^\perp \subset \mathcal{H}$,
- $M \subset (M^\perp)^\perp$.

Věta. (OG rozklad) *Nechť \mathcal{H} je vektorový prostor nad T , $P \subset \mathcal{H}$, $\dim P < +\infty$. Pak platí:*

- $\mathcal{H} = P \oplus P^\perp$,
- $(P^\perp)^\perp = P$.

Definice. (OG průmět) *Nechť $P \subset \mathcal{H}$, $\vec{x} \in \mathcal{H}$. Je-li $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$, kde $\vec{x}_P \in P$, $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$, pak \vec{x}_P se nazývá ortogonálním průmětem \vec{x} do P . Zobrazení $\vec{x} \mapsto \vec{x}_P$ je projektor na P podle P^\perp .*

17 Determinant matice a determinant operátoru.

Definice. (permutace) Každou bijekci $\pi : \hat{n} \rightarrow \hat{n}$ nazýváme permutací na \hat{n} . Množinu všech permutací značíme S_n .

Definice. (inverze, znaménko permutace) Buď $\pi \in S_n$. Pak inverzí v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i, j) , $i, j \in \hat{n}$, splňující: $i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)$. Počet inverzí v π značíme I_π . Znaménkem permutace π nazveme číslo $\text{sgn}(\pi) := (-1)^{I_\pi}$. Permutace je sudá, jestliže $\text{sgn}(\pi) = 1$, a lichá, jestliže $\text{sgn}(\pi) = -1$.

Definice. (transpozice) Necht $n \geq 2$ a $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$. Transpozicí čísel i a j nazveme lichou permutaci τ_{ij} splňující:

$$\begin{aligned}\tau_{ij}(k) &= k \text{ pro } i \neq k \neq j, \\ \tau_{ij}(j) &= i, \\ \tau_{ij}(i) &= j.\end{aligned}$$

Věta. (znaménko složené permutace) Budte $\pi, \rho \in S_n$. Pak platí: $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$.

Definice. (determinant matice) Necht $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak determinantem matice \mathbb{A} nazveme číslo

$$\det \mathbb{A} := \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn} \pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \cdots \mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme členy determinantu.

Věta. (determinant transponované matice) Necht $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Definice. (horní a dolní trojúhelníková matice) Necht $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

- \mathbb{A} je horní trojúhelníková matice $\Leftrightarrow \forall i, j \in \hat{n}$, $i > j$: $\mathbb{A}_{ij} = 0$ (matice má pod diagonálou nuly).
- \mathbb{A} je dolní trojúhelníková matice $\Leftrightarrow \forall i, j \in \hat{n}$, $i < j$, $\mathbb{A}_{ij} = 0$ (matice má nad diagonálou nuly).

Věta. (determinant trojúhelníkových matic) $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ horní či dolní trojúhelníková. Pak $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11} \mathbb{A}_{22} \cdots \mathbb{A}_{nn}$.

Věta. (řádkové a sloupcové úpravy determinantů) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak platí:

1. Vznikne-li \mathbb{B} vynásobením některého řádku (sloupce) matice \mathbb{A} číslem $\alpha \in T$, pak $\det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{A}$.
2. Je-li některý řádek (sloupec) \mathbb{A} nulový, pak $\det \mathbb{A} = 0$.
3. Vznikne-li \mathbb{B} prohozením dvou řádků (sloupců) matice \mathbb{A} , pak $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.
4. Má-li \mathbb{A} dva řádky (sloupce) stejné, pak $\det \mathbb{A} = 0$.
5. Označme $\mathbb{A} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} \vec{p} \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$ a $\mathbb{B} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} \vec{q} \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$. Pak $\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B} = \det (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{i-1} (\vec{p} + \vec{q}) \vec{a}_{i+1} \dots \vec{a}_n)$. Analogicky pro řádky.
6. Přičtením libovolného násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) matice \mathbb{A} se determinant nezmění.

Důsledek. Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ a $\alpha \in T$. Potom $\det(\alpha \mathbb{A}) = \alpha^n \det \mathbb{A}$.

Definice. (n-lineární forma, antisymetrická forma) Necht V je vektorový prostor nad T . Pak zobrazení $w : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\text{-krát}} \rightarrow T$ nazveme:

- n-lineární formou na V , jestliže pro každé $\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$, $\alpha \in T$ a pro každé $i \in \hat{n}$ platí:

$$\begin{aligned}w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \alpha \vec{y} + \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) &= \alpha w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ &\quad + w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n),\end{aligned}$$

- antisymetrickou formou na V , pokud pro každé $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ a pro každé $i, j \in \hat{n}$, $i \neq j$, platí:

$$w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n).$$

Poznámka. Determinant jako funkce sloupců matice je n-lineární antisymetrická forma na T^n .

Věta. (ekvivalentní řádkové úpravy a determinant matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Předpokládejme, že \mathbb{M} vznikla z jednotkové matice \mathbb{I}_n konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Věta. (regulární matice a determinant) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Potom \mathbb{A} je regulární právě tehdy, když $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta. (determinant součinu matic) Buďte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. Pak platí: $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$.

Věta. (determinant inverzní matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ regulární matice. Pak platí: $\det(\mathbb{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbb{A}}$.

Definice. (algebraický doplněk) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$. Označme $\mathbb{A}^{(i,j)}$ matici, která vznikne z \mathbb{A} vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce. Pak číslo

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$$

nazveme algebraickým doplňkem prvku \mathbb{A}_{ij} .

Věta. (rozvoj determinantu podle řádku, sloupce) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Pak $\forall i \in \hat{n}$, resp. $\forall j \in \hat{n}$ platí:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^n \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad (\text{rozvoj podle } i\text{-tého řádku}),$$

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^n \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad (\text{rozvoj podle } j\text{-tého sloupce}).$$

Definice. (adjungovaná matice) $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Adjungovanou matici k \mathbb{A} nazveme matici \mathbb{A}^{adj} splňující $\forall i, j \in \hat{n}$:

$$[\mathbb{A}^{\text{adj}}]_{ij} := D_{ji}.$$

Věta. (inverzní a adjungovaná matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Pak

1. $(\det \mathbb{A}) \mathbb{I} = \mathbb{A}^{\text{adj}} \mathbb{A}$,
2. pokud \mathbb{A} regulární, pak platí: $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{\text{adj}}$.

Věta. (Cramerovo pravidlo) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$, $\vec{b} \in T^n$. Pokud \mathbb{A} je regulární matice, potom pro každé $j \in \hat{n}$ je j -tá složka řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ rovna:

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde matice $\mathbb{B}^{(j)}$ vznikne z matice \mathbb{A} nahrazením j -tého sloupce vektorem \vec{b} .

Definice. (subdeterminant) Buď $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, nechť čísla $i_1, \dots, i_k \in \hat{m}$ a $j_1, \dots, j_l \in \hat{n}$ splňují:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m \quad \text{a} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n.$$

Pak matici $\mathbb{A} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_l \end{pmatrix}$, jež vznikla z \mathbb{A} zachováním pouze těch prvků, které mají řádkový index z $\{i_1, \dots, i_k\}$ a zároveň sloupcový index z $\{j_1, \dots, j_l\}$, nazveme submaticí matice \mathbb{A} . Je-li submatice čtvercová řádu k , pak její determinant nazveme subdeterminantem řádu k matice \mathbb{A} .

Věta. (hodnota a subdeterminant) $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = k$ právě tehdy, když existuje nenulový subdeterminant matice \mathbb{A} řádu k a zároveň je každý subdeterminant vyššího řádu nulový.

Definice. (determinant operátoru) Nechť V_n je vektorový prostor nad T . Nechť \mathcal{X} je báze V_n a $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak determinant operátoru A značíme $\det A := \det({}^{\mathcal{X}}A)$.

Poznámka. Nezávisí na volbě báze, jak plyne z vět o matici složeného zobrazení a determinantu součinu matic.

Poznámka. Pro operátory platí podobná tvrzení s determinanty jako pro matice:

- Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak A je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
- Nechť $A, B \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak $\det(AB) = \det A \det B$.
- Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a A je regulární. Pak $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

18 Vlastní čísla a diagonalizovatelnost matic a operátorů

Definice. (vlastní čísla, vektory) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme vlastním číslem matice \mathbb{A} , pokud existuje vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$, takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor \vec{x} nazveme vlastním vektorem matice \mathbb{A} příslušným vlastnímu číslu λ . Množinu vlastních čísel matice \mathbb{A} nazveme spektrem matice \mathbb{A} a značíme $\sigma(\mathbb{A})$. Vlastním podprostorem matice \mathbb{A} příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů \mathbb{A} příslušných λ s přidáním nulového vektoru.

Věta. (vlastní podprostor) Budťe $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Pak $P_\lambda \subset \mathbb{C}^n$. Navíc $\{\mathbb{A}\vec{x} \mid \vec{x} \in P_\lambda\} \subset P_\lambda$.

Definice. (geometrická násobnost) Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Potom geometrickou násobností vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) := \dim P_\lambda$.

Definice. (charakteristický polynom) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazení $p_\mathbb{A} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_\mathbb{A}(t) := \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme charakteristickým polynomem matice \mathbb{A} .

Věta. (vlastnosti charakteristického polynomu) Nechť $p_\mathbb{A}$ je charakteristický polynom matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak:

1. $p_\mathbb{A}$ je polynom,
2. stupeň $p_\mathbb{A}$ je n , koeficient u nejvyššího stupně t^n v $p_\mathbb{A}(t)$ je $(-1)^n$,
3. konstantní člen polynomu $p_\mathbb{A}$ je roven $\det \mathbb{A}$.

Věta. (vlastní čísla a charakteristický polynom) $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ právě tehdy, když $p_\mathbb{A}(\lambda) = 0$.

Věta. (vlastní čísla trojúhelníkové matice) Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní (nebo dolní) trojúhelníková matice. Pak vlastní čísla \mathbb{A} jsou rovna jejím diagonálním prvkům.

Definice. (algebraická násobnost) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Algebraickou násobností $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu $p_\mathbb{A}$. Zároveň platí $\sum_{\lambda \in \sigma(\mathbb{A})} \nu_a(\lambda) = n$.

Věta. (vlastní čísla a determinant) Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak platí:

$$\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \dots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Důsledek. (vlastní čísla a regularita matice) Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matice \mathbb{A} je regulární $\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.

Věta. (algebraická a geometrická násobnost) Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí: $\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda)$.

Věta. (LN vlastních vektorů) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory matice \mathbb{A} . Pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN.

Věta. (báze z vlastních vektorů) $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Existuje báze \mathbb{C}^n z vlastních vektorů $\mathbb{A} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A}): \nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Diagonalizovatelnost matic

Definice. (podobnost matic) Budťe $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Řekneme, že matice \mathbb{A} je podobná matici \mathbb{B} , pokud existuje regulární matice \mathbb{X} řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka. Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n .

Věta. (vlastnosti podobných matic) Budťe $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a \mathbb{A} je podobná \mathbb{B} .

1. Pak $p_\mathbb{A} = p_\mathbb{B}$, tedy $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ a $\nu_a^\mathbb{A}(\lambda) = \nu_a^\mathbb{B}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.
2. Je-li $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, pak $\nu_g^\mathbb{A}(\lambda) = \nu_g^\mathbb{B}(\lambda)$.
3. Potom $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B}$ a $\text{Tr}(\mathbb{A}) = \text{Tr}(\mathbb{B})$.

Poznámka. Buď $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Platí, že \mathbb{A}^T je podobná matici \mathbb{A} . Je-li \mathbb{A} podobná \mathbb{B} , pak \mathbb{A}^T je podobná \mathbb{B}^T a \mathbb{A}^{-1} je podobná \mathbb{B}^{-1} , pokud existují. Podobnost je zachována i v mocninách. Je-li alespoň jedna z matic regulární, pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{B}\mathbb{A}$.

Definice. (diagonalizovatelnost) Buď $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matici A nazveme diagonalizovatelnou, pokud je podobná diagonální matici, tj. existují matice D diagonální a X regulární tak, že $A = XDX^{-1}$.

Poznámka. Nechť X je regulární matice sestavená z vlastních vektorů A příslušných $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak

$$AX = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tím jsme převedli matici A na diagonální $A = XDX^{-1}$.

Věta. (diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů) Buď $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice A je diagonalizovatelná právě tehdy, když v \mathbb{C}^n existuje báze z vlastních vektorů A .

Věta. (diagonalizovatelnost a násobnosti) Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matice A je diagonalizovatelná právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(A)$ platí $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Poznámka. Každá matice je podobná matici v Jordanově kanonickém tvaru, která je blokově diagonální. Počet Jordanových bloků odpovídajících vlastnímu číslu λ je roven $\nu_g(\lambda)$, součet řádů bloků odpovídajících λ je roven $\nu_a(\lambda)$.

Věta. (Hamiltonova-Cayleyho) Buď $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice A je kořenem svého charakteristického polynomu.

Diagonalizovatelnost operátorů

Problém se v konečné dimenzi převede na hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice operátoru. Musí se hlídat, nad kterým tělesem jsou operátory definovány – vlastní čísla operátoru musí být z tohoto tělesa.

Věta. (vlastní podprostor operátoru) Nechť V je vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$.

Pak $P_\lambda := \{\vec{x} \in V \mid A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} \subset V$. Navíc $A(P_\lambda) \subset P_\lambda$.

Věta. (LN vlastních vektorů operátoru) Nechť V je vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(V)$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory operátoru A . Pak $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ jsou LN.

Věta. (vlastní čísla operátoru a charakteristický polynom) Nechť V_n je vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Pak $\lambda \in \sigma(A)$ právě tehdy, když $p_A(\lambda) = 0$ a $\lambda \in T$.

Definice. (diagonalizovatelnost operátoru) Nechť V_n je vektorový prostor nad T . Operátor $A \in \mathcal{L}(V_n)$ nazveme diagonalizovatelným, pokud existuje báze \mathcal{Y} prostoru V_n taková, že ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice.

Věta. (diagonalizovatelnost operátoru a báze z vlastních vektorů) Nechť V_n je vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(V_n)$, \mathcal{Y} je báze V_n . Pak ${}^{\mathcal{Y}}A$ je diagonální matice právě tehdy, když \mathcal{Y} je báze z vlastních vektorů A .

Věta. (diagonalizovatelnost operátoru a násobnosti) Nechť V_n je vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Operátor A je diagonalizovatelný právě tehdy, když jsou splněny dvě podmínky:

1. $p_A^{-1}(0) \subset T$.
2. $\forall \lambda \in \sigma(A): \nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

19 Rieszova věta, sdružený operátor. Normální, hermitovský a unitární operátor.

Značení: $T = \mathbb{R}$ nebo $T = \mathbb{C}$.

Věta. (Rieszova) *Nechť je dán vektorový prostor \mathcal{H}_n nad T . Je-li $\varphi \in (\mathcal{H}_n)^\#$, pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Definice. (sdružený operátor) \mathcal{H}_n nad T , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ splňuje pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ vztah:

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | B\vec{y} \rangle,$$

pak B nazveme sdruženým operátorem k A a značíme A^* .

Věta. (Existence a jednoznačnost sdruženého operátoru) *Buď \mathcal{H}_n vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak existuje právě jeden sdružený operátor k A .*

Věta. (matice sdruženého operátoru) \mathcal{H}_n nad T , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, \mathcal{X} ON báze \mathcal{H}_n . Pak platí ${}^{\mathcal{X}}(A^*) = ({}^{\mathcal{X}}A)^H$.

Důsledek. (determinant sdruženého operátoru) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak $\det A^* = \overline{\det A}$.

Věta. (spektrum sdruženého operátoru) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad T , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$.

Normální, hermitovský, unitární operátor

Definice. (normální, hermitovský, unitární operátor) *Nechť je dán vektorový prostor \mathcal{H}_n nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$.*

- Pokud $AA^* = A^*A$, pak A nazveme normálním.
- Pokud $A = A^*$, pak A nazveme hermitovským. (nad \mathbb{R} říkáme symetrický)
- Pokud $AA^* = I$, pak A nazveme unitárním. (nad \mathbb{R} říkáme ortogonální)

Poznámka. Podobně pro matice v $\mathbb{C}^{n,n}$. $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$ je normální matice, atd.

Věta. (normální operátory a normální matice) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$, \mathcal{X} ON báze v \mathcal{H}_n .

1. A je normální operátor $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je normální matice.
2. A je hermitovský operátor $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je hermitovská matice.
3. A je unitární operátor $\Leftrightarrow {}^{\mathcal{X}}A$ je unitární matice.

Věta. (charakterizace normálních operátorů) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální právě tehdy, když $\|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.

Věta. (vlastní vektory normálních operátorů) *Nechť \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ normální. Pak:*

1. $\lambda \in \sigma(A)$ a \vec{x} je vlastní vektor A příslušný $\lambda \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^*)$ a \vec{x} je vlastní vektor A^* příslušný $\bar{\lambda}$.
2. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

Věta. (diagonalizovatelnost normálních operátorů) *Nechť \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální operátor, pak A je diagonalizovatelný.*

Věta. (normální operátory a ON báze z vlastních vektorů) *Nechť \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální právě tehdy, když v \mathcal{H}_n existuje ON báze z vlastních vektorů.*

Věta. (charakterizace unitárních operátorů) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak platí:

$$A \text{ je unitární} \Leftrightarrow A^{-1} = A^* \Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n : \langle A\vec{x} | A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n : \|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|.$$

Věta. (vlastnosti unitárních operátorů) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ unitární. Pak platí: $\forall \lambda \in \sigma(A) : |\lambda| = 1; |\det A| = 1; AB$ je unitární.

Věta. (vlastnosti hermitovských operátorů) \mathcal{H}_n vektorový prostor nad \mathbb{C} , $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n)$ hermitovský. Pak platí:

- $\forall \vec{x} \in \mathcal{H}_n : \langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$,
- $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$,
- $\det A \in \mathbb{R}$,
- $A(\mathcal{H}_n) = (\ker A)^\perp$.