Otázky k BC SZZ z předmětu Matematická analýza a lineární algebra

Tomáš Jakubec
(úprava Martin Kovanda)

LS 2017/2018

Obsah

1 Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírustku funkce **3**

2 Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě **5**

3 Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnání řad, součin řad **8**

4 Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady **11**

5 Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, věty o přírustku funkce, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy **13**

6 Lebesgueův integrál - definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniova věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace) **16**

7 Derivace v komplexním oboru, holomorfní funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta **20**

8 Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta **23**

9 Hermitovské operátory a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti **27**

10 Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory **30**

1 Diferenciální počet reálné proměnné - derivace, její aplikace pro vyšetřování funkce, věty o přírustku funkce

Definice. (derivace) Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod $a \in D_f \cap D'_f$. Potom derivací funkce f v bodě a nazveme

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

pokud tato limita existuje. Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že je v bodě a diferencovatelná.

Věta. (aritmetika derivace) *Buďte f, g reálné funkce reálné proměnné diferencovatelné v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak platí, že*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $(fg)'(a) = g(a) f'(a) + f(a) g'(a)$,
3. $f(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{1}{(f(a))^2} f'(a)$,

pokud výrazy na pravé straně mají smysl.

Věta. (derivace složené funkce) *Nechť g je diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$, $a \in D'_{f \circ g}$. Pak $f \circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí, že*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) g'(a).$$

Věta. (derivace inverzní funkce) *Nechť f je spojitá a prostá na otevřeném intervalu J a diferencovatelná v bodě $x_0 \in J$, kde $f'(x_0) \neq 0$. Pak inverzní funkce f^{-1} je diferencovatelná v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí, že*

$$\left(f^{-1}_{/J}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Věta. (Darboux) *Buď funkce f zprava spojitá v bodě a, nechť je f diferencovatelná na pravém okolí bodu a, nechť existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí, že*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f(x).$$

Definice. (derivace vyšších řádů) Buď f reálná diferencovatelná funkce. Označíme funkci $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$. Druhou derivací funkce f'' rozumíme derivaci funkce f' atd. pro vyšší derivace.

Definice. (lokální extrémy) Říkáme, že funkce f má v bodě a

1. lokální maximum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \leq f(a))$,
2. ostré lokální maximum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) < f(a))$,
3. lokální minimum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a)(f(x) \geq f(a))$,
4. ostré lokální minimum, právě když $(\exists H_a)(\forall x \in H_a \setminus \{a\})(f(x) > f(a))$,

Věta. (nutná podmínka existence extrému) *Buď f má v bodě a lokální extrém. Pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.*

Věta. (postačující podmínka pro monotonii funkce) *Buď f spojitá na intervalu I, nechť existuje f' na I°. Pak platí, že*

1. $(\forall x \in I)(f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow f$ *je na I rostoucí.*
2. $(\forall x \in I)(f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow f$ *je na I klesající.*
3. $(\forall x \in I)(f'(x) = 0) \Leftrightarrow f$ *je na I konstantní.*

4. $(\forall x \in I)\,(f'(x) > 0) \Rightarrow f$ *je na* I *ostře rostoucí.*

5. $(\forall x \in I)\,(f'(x) < 0) \Rightarrow f$ *je na* I *ostře klesající.*

Věta. (derivace a postačující podmínka existence extrému) *Buď* f *diferencovatelná na nějakém okolí bodu* a*. Je-li* $f'(a) = 0$ *a současně* $f''(a)\begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$*, pak* f *má v bodě* a *ostré lokální* $\begin{cases} \textit{minimum} \\ \textit{maximum} \end{cases}$*.*

Definice. (tečna) Funkce f má v bodě a

1. svislou tečnu právě tehdy, když f je spojitá v bodě a a $f'(a) = \pm\infty$,
2. nesvislou tečnu $y(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$, pokud je f v bodě a diferencovatelná. Bodu $(a, f(a))$ říkáme bod dotyku.

Definice. (konvexnost, konkávnost) Říkáme, že f je na intervalu $I \left\langle \begin{array}{c} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right\rangle$, právě když

$$(\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3)\left(f(x_2) \left\langle \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\rangle \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1)\right).$$

Věta. (postačující podmínka pro konvexnost a konkávnost) *Buď funkce* f *spojitá na intervalu* I *a diferencovatelná na* I°*. Je-li* $f' \begin{cases} \textit{rostoucí} \\ \textit{klesající} \\ \textit{ostře rostoucí} \\ \textit{ostře klesající} \end{cases}$ *na* I°*. Pak je* f *na* $I \begin{cases} \textit{konvexní} \\ \textit{konkávní} \\ \textit{ryze konvexní} \\ \textit{ryze konkávní} \end{cases}$*.*

Věta. (postačující podmínka pro monotonii f') *Buď funkce* f'' *na intervalu* $I^\circ \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases}$*. Pak* $f' \begin{cases} \textit{roste} \\ \textit{klesá} \\ \textit{ostře roste} \\ \textit{ostře klesá} \end{cases}$ *na* I°*. Pak* f *je na* $I \begin{cases} \textit{konvexní} \\ \textit{konkávní} \\ \textit{ryze konvexní} \\ \textit{ryze konkávní} \end{cases}$*.*

Definice. (inflexní bod) Říkáme, že funkce f má v bodě a inflexi, právě když je diferencovatelná a platí, že

$$(\exists H_a)(\forall x \in H_a)\left(x < a \Rightarrow f(x) \left\langle \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\rangle f(a) + f'(a)(x-a)\right) \wedge \left(x > a \Rightarrow f(x) \left\langle \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\rangle f(a) + f'(a)(x-a)\right).$$

Věta. (nutná podmínka existence inflexního bodu) *Nechť funkce* f *má inflexi v bodě* a *a nechť je diferencovatelná na okolí* a*. Pak* $f''(a) = 0$ *nebo neexistuje.*

Věta. (postačující podmínka existence inflexního bodu) *Nechť existuje okolí* H_a *takové, že* f *má konečnou druhou derivaci na* H_a*. Nechť* $f''(a) = 0$ *a* $f'''(a) \neq 0$*. Pak* f *má v bodě* a *inflexní bod.*

Věta. ***(asymtota)*** *Funkce* f *má v* $+\infty$ *asymptotu o rovnici* $y(x) = kx + q$*, právě když*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = q.$$

Podobně pro případ $-\infty$*.*

Věty o přírustku funkce

Věta. (Rolleova) *Buď* f *spojitá na intervalu* $[a, b]$*, nechť* f *je diferencovatelná na* (a, b)*,* $f(a) = f(b)$*. Pak* $\exists c \in (a, b)$ *tak, že* $f'(c) = 0$*.*

Věta. (Lagrangeova) *Buď* f *spojitá na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelná na* (a, b)*. Pak* $\exists c \in (a, b)$ *takový, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta. (Cauchyova) *Buďte* f*,* g *spojité na intervalu* $[a, b]$ *a diferencovatelné na* (a, b)*. Nechť dále* $g'(x) \neq 0$*,* $\forall x \in (a, b)$*. Pak* $\exists c \in (a, b)$ *takový, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

2 Riemannův integrál v $\mathbb{R}$, definice, postačující podmínky existence, Newtonova formule, substituce, per partes, věty o střední hodnotě

Poznámka: doc. Pošta chce zásadně SVOJE zavedení Riemannova integrálu a je proto vhodné pročíst si definici z jeho poznámek.

Definice. (dělení intervalu) Buď $[a,b]$ interval v $\mathbb{R}$. Konečnou množinu $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ takovou, že $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ nazýváme rozdělením intervalu $[a,b]$. Bodům x_k pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ říkáme dělící body intervalu $[a,b]$, intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ říkáme částečný interval intervalu $[a,b]$ při rozdělení σ.

Definice. (norma rozdělení) Buď $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ rozdělením intervalu $[a,b]$. Označme $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Číslo $\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k | 1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme normou rozdělení.

Definice. (zjemnění) Nechť σ a σ' jsou rozdělení intervalu $[a,b]$, přičemž $\sigma \subset \sigma'$. Pak σ' nazýváme zjemněním rozdělení σ.

Definice. (horní a dolní součet) Nechť funkce f je omezená na intervalu $[a,b]$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $[a,b]$. Označme

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

nazýváme horním, resp. dolním, součtem funkce f pro rozdělení σ.

Definice. (horní a dolní integrální součet) Nechť funkce f je omezená na intervalu $[a,b]$. Infimum množiny horních součtů a supremum dolních součtů přes rozdělení σ intervalu $[a,b]$ nazýváme horním, resp. dolním, integrálním součtem funkce f a značíme

$$\int_a^{\overline{b}} f = \inf_\sigma S(\sigma), \quad \text{resp.} \quad \int_{\underline{a}}^b f = \sup_\sigma s(\sigma).$$

Definice. (Riemannův integrál, Darboux) Nechť f je omezená na $[a,b]$. Je-li $\int_a^{\overline{b}} f = \int_{\underline{a}}^b f$, říkáme, že f má v intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál. Společnou hodnotu dolního a horního integrálního součtu značíme $\int_a^b f$ nebo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. O funkci f říkáme, že je integrovatelná v $[a,b]$.

Věta. (nutná a postačující podmínka existence) *Buď f omezená na intervalu $[a,b]$. Pak*

$$\int_a^b f \text{ existuje } \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \text{rozdělení } \sigma \text{ intervalu } [a,b])(S(\sigma) - s(\sigma) < \varepsilon).$$

Věta. (postačující podmínky existence integrálu)
Buď funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Pak f má v tomto intervalu integrál.
Buď funkce f monotonní na intervalu $[a,b]$. Pak f má v tomto intervalu integrál.

Definice. (Riemannova definice Riemannova integrálu) Buď f omezená funkce na $[a,b]$ a nechť $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ s body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ je rozdělením intervalu $[a,b]$. Sumu $\mathcal{J}(\sigma) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i$, kde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme integrálním součtem funkce f při rozdělení σ.

Definice. (normální posloupnost rozdělení) Posloupnost rozdělení intervalu $[a,b]$ $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ nazýváme normální právě tehdy, když $\lim_{n\to+\infty} \nu(\sigma_n) = 0$.

Věta. (základní věta integrálního počtu) *Buď f omezená funkce na $[a,b]$. Integrál $\int_a^b f$ existuje právě tehdy, když pro každou normální posloupnost rozdělení $(\sigma_n)_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost $(\mathcal{J}(\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentní.*

Newtonova formule

Věta. (Newtonova formule v určitém integrálu) *Nechť existuje* $\int_a^b f$*, kde* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *a nechť existuje funkce* F *taková, že*

1. F *je spojitá na intervalu* $[a, b]$*,*
2. $F'(x) = f(x)\,,\ \forall x \in (a, b)$*.*

Pak platí, že

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{ozn.}{=} [F(x)]_a^b\,.$$

Věta. (Newtonova formule v zobecněném integrálu) *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *a nechť pro funkci* f *na intervalu* $[a, b)$ *platí, že* $\forall x \in (a, b)$ *existuje* $R \int_a^x f$*. Existuje-li funkce* F *taková, že*

1. F *je primitivní funkcí k funkci* f *na intervalu* (a, b) *a*
2. F *má konečné limity* $\lim_{a_+} F$*,* $\lim_{a_-} F$*.*

Pak existuje $\int_a^b f$ *a platí, že*

$$\int_a^b f = \lim_{b_-} F - \lim_{a_+} F \overset{ozn.}{=} [F(x)]_a^b\,.$$

Substituce

Věta. (o substituci v určitém integrálu) *Nechť pro funkce* f *a* ϕ *platí, že*

1. ϕ *je spojitá na* $[\alpha, \beta]$ *a diferencovatelná v* (α, β)*,*
2. f *je spojitá na* $\phi([\alpha, \beta])$*.*

Pak platí, že

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pokud integrál na levé straně existuje.

Věta. (o substituci v zobecněném integrálu) *Nechť funkce* ϕ *je ostře monotonní a má spojitou derivaci* ϕ' *na intervalu* $[\alpha, \beta)$ *a nechť je funkce* f *spojitá na intervalu* $\phi([\alpha, \beta))$*. Označme* $a := \phi(\alpha)\,,\ b := \lim_{\beta_-} \phi$*. Pak platí, že*

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů existuje.

Per partes

Věta. (per partes pro určitý integrál) *Nechť funkce* f *a* g *jsou spojité na* $[a, b]$ *a diferencovatelné na* (a, b)*. Jestliže existují integrály* $\int_a^b f'g$ *a* $\int_a^b fg'$*, pak*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,.$$

Věta. (per partes pro zobecněný integrál) *Nechť* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *a nechť funkce* f *a* g *splňují, že*

1. f*,* g *mají spojitou derivaci* f'*,* g' *v intervalu* $[a, b)$*,*
2. *existuje konečná limita* $\lim_{b_-} fg$*,*
3. *existuje jeden z integrálů* $\int_a^b f'g$*,* $\int_a^b fg'$*.*

Pak existuje i druhý integrál a platí, že

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta. (integrál jako funkce horní meze) *Nechť f je integrovatelná na $[a,b]$. Pak funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem $F(x) = \int_a^x f$ je spojitá na $[a,b]$. Je-li navíc f spojitá v bodě $x_0 \in [a,b]$, pak je funkce F diferencovatelná v x_0 a platí, že $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Věty o střední hodnotě

Věta. (o střední hodnotě 1) *Nechť funkce f a g jsou omezené na intervalu $[a,b]$ a nechť mají vlastnosti:*

1. *funkce f je integrovatelná, nezáporná na intervalu $[a,b]$*
2. *součin fg je integrovatelný na $[a,b]$.*

Pak

$$\exists \mu \in \left[\inf_{[a,b]} g, \sup_{[a,b]} g\right] \text{ tak, že } \int_a^b fg = \mu \int_a^b f.$$

Věta. (o střední hodnotě 2) *Nechť funkce f a fg jsou integrovatelné na intervalu $[a,b]$ a nechť g je monotonní v (a,b). Pak*

$$\exists \xi \in [a,b] \text{ tak, že } \int_a^b fg = g(a) \int_a^\xi f + g(b) \int_\xi^b f.$$

3 Číselné řady, kritéria konvergence, přerovnání řad, součin řad

Definice. (číselná řada) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je číselná posloupnost. Posloupnost jejích částečných součtů $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ definujeme vztahem

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dvojici posloupností $\left((a_n)_{n=1}^{+\infty}, (s_n)_{n=1}^{+\infty}\right)$ nazýváme číselnou řadou a značíme ji $\sum_{n=1}^{+\infty} a$, kde a_n nazýváme n-tým členem číselné řady. Existuje-li konečná limita $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$, říkáme, že řada konverguje a má součet s. V opačném případě řada diverguje.

Věta. (nutná podmínka konvergence) *Buď $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní řada. Pak $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Věta. (aritmetika řad) *Buďte $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ číselné řady.*

- *Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergují. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ konverguje.*
- *Jestliže $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ diverguje.*
- *Buď $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n$ mají stejný charakter.*

Věta. (B-C kritérium konvergence) *Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)\,(\forall p \in \mathbb{N})\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\right).$$

Důsledek. (konverguje-li řada absolutně, konverguje i neabsolutně) *Buď $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentní řada. Pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní řada.*

Kritéria konvergence

Řady s kladnými členy

Věta. (srovnávací kritérium) *Nechť pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí, že $a_n \leq b_n$ od jistého n_0.*

- *Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.*
- *Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*

Nechť pro nezáporné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ od jistého n_0.

- *Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.*
- *Pokud $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*

Věta. (podílové kritérium) *Buďte $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ kladné posloupnosti takové, že existuje $L := \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.*

- *Pokud $L < +\infty$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.*
- *Pokud $L > 0$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.*
- *Pokud $L \in (0, +\infty)$, pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter.*

Věta. (Cauchyovo odmocninové kritérium) *Nechť $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jestliže existuje $q < 1$ a n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje. (Limitní případ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.)*
2. *Jakmile pro nekonečně mnoho indexů platí, že $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. (Limitní případ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.)*

Věta. **(d'Alembertovo podílové kritérium)** *Nechť* $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Jestliže existuje* $q < 1$ *a* n_0 *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$ *platí, že* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje. (Limitní případ* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.)*
2. *Jakmile pro nekonečně mnoho indexů platí, že* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.* *(Limitní případ* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.)*

Věta. **(Raabeovo kritérium)** *Nechť* $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Existuje-li* $\alpha > 1$ *a* n_0 *takové, že platí, že* $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha$ *pro každé* $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje. (Limitní případ* $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.)*
2. *Jestliže existuje* n_0 *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N},\ n > n_0$ *platí, že* $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$ *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.* *(Limitní případ* $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.)*

Věta. **(Gaussovo kritérium)** *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je kladná posloupnost, pro níž existují čísla* $q, \alpha \in \mathbb{R}$, *kladné* ε *a omezená posloupnost* $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ *taková, že*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. *Jestliže* $q < 1$ *nebo* $q = 1$ *a* $\alpha > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konverguje.*
2. *Jestliže* $q > 1$ *nebo* $q = 1$ *a* $\alpha \leq 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta. **(Integrální kritérium)** *chybí...*

Řady s obecnými členy

Věta. **(Dirichletovo kritérium)** *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je reálná posloupnost a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *komplexní posloupnost splňující:*

1. $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je monotonní a* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,
2. $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *má omezenou posloupnost částečných součtů,*

pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Věta. **(Abelovo kritérium)** *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je reálná posloupnost a* $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ *komplexní posloupnost splňující:*

1. $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je monotonní a konvergentní,*
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *je konvergentní řada,*

pak řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Řady se střídavými znamínky

Věta. **(Leibnizovo kritérium)** *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *je klesající posloupnost kladných čísel. Jestliže* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *pak* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *konverguje.*

Poznámka. Z Leibnizova kritéria lze odvodit i odhad chyby pro řady se střídavými znaménky, pokud bychom chtěli sečíst jen konečný počet prvků. Největší chyba, které se můžeme dopustit je rovna prvnímu vynechanému členu v absolutní hodnotě.

Věta. **(modifikované Gaussovo kritérium)** *Buď* $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ *kladná posloupnost splňující pro nějaké* $\alpha, q \in \mathbb{R}$, *kladné* ε *a omezenou posloupnost* $(c_n)_{n=1}^{+\infty}$ *vztah*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q - \frac{\alpha}{n} + \frac{c_n}{n^{1+\varepsilon}},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *Je-li* $q < 1$ *nebo* $q = 1$ *a* $\alpha > 1$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *konverguje absolutně.*
- *Je-li* $q > 1$ *nebo* $q = 1$ *a* $\alpha \leq 0$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *diverguje.*
- *Je-li* $q = 1$ *a* $\alpha \in (0, 1]$, *pak řada* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *konverguje neabsolutně.*

Uzávorkování

Definice. (uzávorkování řady) Buď $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ řada a buď $(k_n)_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{N}$ ostře rostoucí posloupnost. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ jejíž členy jsou určeny $A_n = \sum_{j=k_n}^{k_{n+1}} a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, nazýváme uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Věta. (řada konverguje, pak konverguje libovolné uzávorkování)

Věta. (uzávorkování řady) *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ je uzávorkováním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{+\infty}$. Nechť jsou splněny podmínky*

1. $(\exists M \in \mathbb{N})\,(\forall n)\,(k_{n+1} - k_n < M)$,
2. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,

pak řady $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ mají stejný charakter a v případě konvergence i stejný součet.

Přerovnání řady

Definice. (přerovnání řady) Mějme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a bijekci $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ podle ϕ.

Věta. (přerovnání absolutně konv. řady) *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak každé její přerovnání je absolutně konvergentní řada se stejným součtem.*

Věta. (Riemann) *Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní řada. Pak ke každému $s \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\phi(n)}$ taková, že má součet s. Rovněž existuje oscilující přerovnání.*

Součin řad

Definice. (součin řad) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady a $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nechť je bijekce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme číslo $c_n = a_i b_j$, kde $n = \phi(i, j)$. Pak řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ nazýváme součinem řad $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Věta. (součin absolutně konvergentních řad) *Buďte $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ absolutně konvergentní řady. Pak jejich libovolný součin je také absolutně konvergentní řada a pro její součet platí, že*

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right).$$

Definice. (součinová řada) Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou číselné řady. Řadu

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)$$

nazýváme součinovou řadou.

Důsledek. *Pro absolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ platí, že*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right).$$

4 Mocninné řady, vlastnosti součtu mocninné řady, Taylorův polynom, Taylorova řada, rozvoje základních funkcí do Taylorovy řady

Definice. (Mocninná řada, obor konvergence) Nechť $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je reálná resp. komplexní posloupnost a nechť a je reálné resp. komplexní číslo. Pak řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ nazýváme mocninnou řadou se středem v bodě a. Množinu všech reálných resp. komplexních čísel x, pro která mocninná řada konverguje nazýváme obor konvergence mocninné řady, $s(x)$ pak označuje součet mocninné řady pro x z oboru konvergence.

Věta. *Pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$ takové, že*

1. *pokud $|x-a| < \rho$, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ konverguje absolutně,*
2. *pokud $|x-a| > \rho$, pak řada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ diverguje.*

Definice. (poloměr konvergence) Číslo ρ z předchozí věty nazýváme poloměr konvergence mocninné řady.

Věta. *Poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je roven*

$$\rho = \frac{1}{\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

přičemž klademe $\rho = 0$, když limes superior je $+\infty$ a $\rho = +\infty$, když limes superior je 0.

Věta. (Mocninnou řadu v oboru konvergence lze derivovat člen po členu) *Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je reálná mocninná řada s kladným poloměrem konvergence ρ. Označme její součet $s(x)$. Pak pro každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí, že*

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Následující tvrzení plyne z důkazu předešlé věty.

Věta. *Nechť $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$ je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence. Označme $s(x)$ její součet. Pak pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí, že $a_n = \frac{s^{(n)}(a)}{n!}$.*

Věta. (Taylorův vzorec) *Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom T_n stupně menší nebo rovno n takový, že*

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \ \ \forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Tento polynom má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

a nazýváme jej n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a.

Taylorovy polynomy některých funkcí v bodě $a = 0$:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k,$$

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k,$$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Definice. (Taylorův vzorec, zbytek) Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Položme $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$. Pak vztah $f(x) = T_n(x) - R_n(x)$ nazýváme Taylorovým vzorcem a $R_n(x)$ nazýváme n-tým zbytkem v Taylorově vzorci.

Základní předpoklady: funkce f má v každém $x \in H_a$ existuje konečná $(n-1)$-ní derivace funkce f a v bodě a existuje konečná n-tá derivace f.

Věta. *Nechť pro f, a, n platí, že základní předpoklady. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí, že*

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Peanův tvar zbytku: $f(x) = T_n(x) + \omega_n(x) \cdot (x-a)^n$, kde $\lim_{x \mapsto a} \omega_n(x) = 0$.

Věta. (O nejlepší aproximaci) *Nechť pro f, a, n platí, že základní předpoklady a nechť $Q(x)$ je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n příslušného funkci f v bodě a. Pak existuje takové okolí H_a, že*

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)|, \text{ pro každé } x \in H_a \setminus \{a\}.$$

Věta. *Nechť pro f, a, n platí, že základní předpoklady. Nechť dále pro polynom p stupně nejvýše n a reálnou funkci $\widetilde{\omega}$ platí, že*

$$f(x) = p(x) + (x-a)^n \cdot \widetilde{\omega}(x), \text{ kde } \lim_{x \mapsto a} \widetilde{\omega}(x) = 0,$$

pak p je n-tý Taylorův polynom funkce f v bodě a.

Věta. (Taylorova) *Nechť existuje okolí H_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci a nechť $x \in H_a$. Pak zbytek v Taylorově vzorci má tvar $f(x) = T_n(x) - R_n(x)$ má tvar*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží mezi čísly x a a.

Lagrangeův tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Cauchyho tvar zbytku:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-a)$$

Taylorova řada

Vyjádření reálné funkce reálné proměnné jako řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \text{ pro každé } x \in \mathcal{J}$$

nazýváme rozvojem funkce do mocninné řady se středem v bodě $a \in D_f$, kde interval $\mathcal{J}$ je takový, že $a \in \mathcal{J}^\circ$ a $\mathcal{J} \subset D_f$. Taylorovou řadou rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Z Taylorova vzorce

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$$

definujícího zbytek $R_n(x)$ plyne, že

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n \mapsto +\infty} R_n(x) = 0.$$

Věta. (Abelova) *Reálná mocninná řada je spojitá v celém svém oboru konvergence.*

Důkazy a příklady jsou ve skriptech.

5 Derivace v $\mathbb{R}^n$, parciální derivace, věty o přírustku funkce, extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy

Definice. (afinní prostor) Nechť $\mathcal{X} \neq \emptyset$ a $\vec{\mathcal{X}}$ je lineární prostor nad T a zobrazení $(\cdot,\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \vec{\mathcal{X}}$ $(x,y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ a platí, že

1. $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} + \overrightarrow{zx} = 0$ $\forall x,\, y,\, z \in \vec{\mathcal{X}}$,
2. $(\forall x \in \mathcal{X})\,(g : y \to \overrightarrow{xy})$ je bijekce.

Prvky prostoru $\mathcal{X}$ nazýváme body a prvky v $\vec{\mathcal{X}}$ nazýváme vektory.

Definice. (souřadný systém) Souřadným systémem v afinním prostoru rozumíme $o \in \mathcal{X}$ a $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ báze $\vec{\mathcal{X}}$.

Definice. (metrika) Buď $\left(\mathcal{X}, \vec{\mathcal{X}}\right)$ normovaný afinní prostor, potom vzdáleností bodů x a y rozumíme $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Definice. (směr) Směrem v afinním prostoru E rozumíme libovolný jednotkový vektor $\|\vec{v}\| = 1$, kde $\vec{v} \in E$.

Definice. Buď $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$, $t_0 \in D_\varphi^\circ$ a nechť existuje $\lim_{t \mapsto t_0} \frac{1}{t-t_0}\left(\varphi(t) - \varphi(t_0)\right)$. Tuto limitu nazveme derivací φ v bodě t_0 a značíme $\varphi'(t_0)\,,\ \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0}$.

Definice. (derivace ve směru) Nechť $f : E \to F$ a $x_0 \in D_f^\circ$ a $\vec{v}$ je směr v E, položme $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$. Existuje-li $\varphi'(0)$, pak derivací ve směru rozumíme

$$f_{\vec{v}}(x_0) = \varphi'(0) = \frac{\partial}{\partial v} f(x_0) = \partial_v f(x_0) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\left(\varphi(t) - \varphi(0)\right) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)\right).$$

Definice. (parciální derivace) Nechť $f : E \to F$ je zobrazení, $(o, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ je normální souřadný systém v E. Existuje-li $f_{\vec{e_i}}(x)$, nazýváme jej parciální derivací podle i-té proměnné, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Věta. (lineární zobrazení v konečné dim je spojité)

Věta. (5 ekvivalencí) *Buď U lineární zobrazení z $\vec{E}$ do $\vec{F}$, pak následující výroky jsou ekvivalentní.*

1. *U je spojité,*
2. *U je spojité v bodě,*
3. *U je omezené,*
4. *U je Lipschitzovské,*
5. *U je stejnoměrně spojité.*

Definice. (norma lineárního zobrazení) $\|U\| = \inf\left\{k \in \mathbb{R} \middle| \left\|U\vec{h}\right\| \leq k \left\|\vec{h}\right\|\right\}, \forall \vec{h} \in \vec{E}$.

Definice. Označme $\mathscr{L}\left(\vec{E}, \vec{F}\right)$ vektorový prostor všech lineárních zobrazení z $\vec{E}$ do $\vec{F}$ s normou $\|\cdot\|$.

Definice. (derivace jako lin. operátor) Nechť $g : \vec{E} \to \vec{F}$, $x_0 \in D_g^\circ$. Říkáme, že g je diferencovatelná právě tehdy, když $\exists L \in \mathscr{L}\left(\vec{E}, \vec{F}\right)$ spojité takové, že

$$\begin{aligned} \lim_{x \mapsto x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|}\left(g(x) - g(x_0) - L(x - x_0)\right) &= \vec{o}, \\ \Leftrightarrow \lim_{\vec{h} \mapsto \vec{o}} \frac{1}{\left\|\vec{h}\right\|}\left(g\left(x_0 + \vec{h}\right) - g(x_0) - L\left(\vec{h}\right)\right) &= \vec{o}. \end{aligned}$$

Pak derivace g je $g'(x_0) = L = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = \mathrm{d}g(x_0)$.

Věta. (nutná podmínka existence derivace) *Nechť $\exists g'(x_0) = L$, pak g má v x_0 derivaci v každém směru a navíc platí, že*

$$g_{\vec{v}}(x_0) = g'(x_0)\,\vec{v}.$$

Věta. (derivace implikuje spojitost) *Má-li zobrazení g derivaci v bodě x_0, pak je v tomto bodě spojité.*

Definice. g je afinní $\Leftrightarrow \exists \underset{\leftarrow}{g} \in \mathscr{L}\left(\vec{E},\vec{F}\right)$ takové, že $g(x) - g(x_0) = \underset{\leftarrow}{g}(x - x_0)$.

Definice. (gradient) Nechť E je eukleidovský prostor a $g : E \to \mathbb{R}$ je funkce diferencovatelná v bodě x_0 ($\exists g'(x_0)$). Pak $\exists \vec{k} \in \vec{E}$ takový, že $g'(x_0)\,\vec{h} = \vec{k} \cdot \vec{h} = \left(\vec{k},\vec{h}\right)$. Existence takového vektoru $\vec{k}$ plyne z Rieszovy věty. Vektor $\vec{k}$ s těmito vlastnostmi nazýváme gradientem $g(x_0)$, značíme $\vec{k} = \mathrm{grad}\,(g(x_0))$.

Věta. *(vlastnosti derivace) Nechť $f, g : E \to \mathbb{R}$ jsou diferencovatelná v bodě x_0, potom platí, že*

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
2. $(fg)'(x_0) = g(x_0)\,f'(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$,
3. $g(x_0) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{1}{(g(x_0))^2}\,g'(x_0)$.

Věta. (postačující podmínka existence derivace) *Buď E eukleidovský prostor a $(o, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ ortonormální báze a $g : E \to F$ a $x_0 \in D_g^\circ$ a $\exists H_{x_0}$ takové okolí, že v něm $\exists g_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}$, $\forall i \in \widehat{n}$, $x \in H_{x_0}$ a g_i jsou spojité. Pak $\exists g'(x_0)$.*

Věty o přírustku funkce

Věta. (Legrační věta o přírustku funkce) *Buďte $g : E \to \mathbb{R}$ a $(o, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ normální souřadný systém v $\vec{E}$, nechť $x_0 \in D_g^\circ$ a nechť má g na $B(x_0, R)$ derivaci prvního řádu. Pak $\forall x \in B(x_0, R)\, \exists\, (x_1, \ldots, x_n) \in B(x_0, R)$ tak, že*

$$g(x) - g(x_0) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)\left(x^j - x_0^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^j}(x_j)\left(x^j - x_0^j\right).$$

Věta. (o přírustku funkce) *Buď $g : E \to \mathbb{R}$, g spojitá na úsečce $[x,y]$ a diferencovatelná na $(x,y)\,(= [x,y] - \{x,y\})$. Pak $\exists z \in E$ takové, že $g(x) - g(y) = g'(z)(x-y)$.*

Věta. (o přírustku zobrazení) *Buď $g : E \to F$ spojité na $[x,y]$ a $\exists g'$ na (x,y) a $(\exists c \in \mathbb{R})\,(\forall z \in (x,y))\,(\|g'(z)\| < c)$. Pak $\|g(x) - g(y)\| < c\,\|x-y\|$.*

Věta. (nulová derivace, pak je konstantní) *Buď D oblast v E, $g : E \to F$ takové, že $g'(x) = 0\ \forall x \in D$. Pak g je na D konstantní.*

Extrémy funkcí

f, g jsou v této sekci funkce, tedy zobrazují pouze do $\mathbb{R}$.

Definice. (lokální extrém) O funkci g říkáme, že má v bodě x_0 ostré resp. neostré lokální minimum právě tehdy, když $(\exists H_{x_0})\,(\forall x \in H_{x_0} \smallsetminus \{x_0\})\,(g(x) > g(x_0))$ respektive $(\exists H_{x_0})\,(\forall x \in H_{x_0})\,(g(x) \geq g(x_0))$. Pro maximum obdobně.

Věta. (nutná podmínka existence extrému) *Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a zároveň $\exists f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = \underset{\leftarrow}{0}$.*

Definice. (stacionární bod) Jestliže $f'(x_0) = 0$, říkáme, že x_0 je stacionárním bodem funkce f.

Definice. (pozitivní definitnost kvadratických forem) Nechť $\exists f''(x_0)$ a $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$, $f''(x_0)\,h^2 > 0$ je pozitivně definitní kvadratická forma, píšeme $f''(x_0) > 0$. Dále jestliže platí, že $f''(x_0)\,h^2 \geq 0$, $\forall \vec{h}$, značíme $f''(x_0) \geq 0$ a říkáme, že je pozitivní.

Věta. (vyšetření lokálního extrému) *Buď $f : E \to \mathbb{R}$, dále nechť $\exists f''(x_0)$ a $f'(x_0) = 0$. Pak platí, že*

1. *f má lokální minimum v $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$,*
2. *$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ má v x_0 ostré lokální minimum,*
3. *f má lokální maximum v $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$,*
4. *$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ má v x_0 ostré lokální maximum,*
5. *$f''(x_0)$ je indefinitní kvadratická forma, pak f má v bodě x_0 sedlový bod.*

Vázaný extrém

Věta. (nutná podmínka pro existenci vázaného extrému) *Buď $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $x_0 \in M$, kde M je varieta. Má-li funkce $f|_M$ extrém v bodě x_0, potom existují koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takové, že $\Lambda = f - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \phi^l$ má nulovou derivaci v bodě x_0 ($\Lambda'(x_0) = 0$), má v x_0 stacionární bod.*

Věta. (postačující podmínka pro existenci vázaného extrému) *Buď M varieta třídy $C^{(2)}$ a x_0 je stacionární bod $\Lambda'(x_0) = 0$ a nechť $f \in C^{(2)}$. Pak platí, že*

1. *má-li $f|_M$ lokální minimum v $x_0 \Rightarrow \Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} \geq 0$,*
2. *$\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} > 0 \Rightarrow f|_M$ má ostré lokální minimum vzhledem k varietě M,*
3. *má-li $f|_M$ lokální maximum v $x_0 \Rightarrow \Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} \leq 0$,*
4. *$\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)} < 0 \Rightarrow f|_M$ má ostré lokální maximum vzhledem k varietě M,*
5. *jestliže $\Lambda''(x_0)|_{T_M(x_0)}$ je indefinitní forma, pak $f|_M$ nemá extrém v bodě x_0.*

6 Lebesgueův integrál - definice, měřitelné množiny a funkce, Fubiniova věta, věta o substituci, spojitost integrálu, věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace)

Zavedení Lebesgueovy míry podle Šťovíčkových poznámek v FA1 a Kůsových poznámek z 01MIP.

Definice. (σ-algebra, měřitelný prostor) Buď $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$, je σ-algebra právě tehdy, když platí, že

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- $\forall A \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor.

Definice. (minimální σ-algebra) Nechť $\tau \neq \emptyset$je libovolný systém z2^{Ω}. Definujeme $\sigma(\tau) = \bigcap\limits_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha}$, kde $\mathcal{A}_{\alpha}$jsouσ-algebry takové, že $\tau \subset \mathcal{A}_{\alpha}$. Množinu $\sigma(\tau)$nazýváme **minimálníσ-algebrou** nad systémem τ.

Definice. (borelovská σ-algebra) Mějme $\Omega = \mathbb{R}^n$a definujme$\tau := \{\bigtimes\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$. Potom $\sigma(\tau) \overset{\text{ozn}}{=} \mathcal{B}_n$, kde $\mathcal{B}_n$nazveme **borelovskáσ-algebra** v $\mathbb{R}^n$. Na prostoru (Ω, τ), kde τje topologie, pak definujeme$\sigma(\tau) = \mathcal{B}$.

Definice. (měřitelné funkce) Funkce $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se nazývá **$\mathcal{A}$-měřitelná**, pokud $(\forall B \in \mathcal{B}_n)\big(g^{-1}(B) \in \mathcal{A}\big)$. Pokud $\mathcal{A}$je borelovskáσ-algebra, potom g nazýváme **borelovsky měřitelnou** funkcí.

- (Ω, τ) topologický prostor, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ borelovské množiny v Ω, pak f je borelovsky měřitelná,
- $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \sigma$-algebra lebesgueovsky měřitelných množin, pak f je lebesgueovsky měřitelná.

Poznámka. Měřitelnost:

- $A \subset \Omega$ je měřitelná množina $(A \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow \chi_A$ je měřitelná funkce, kde χ_A je charakteristická funkce intervalu A.
- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná $\Leftrightarrow$ $Re\, f$ a $Im\, f$ jsou měřitelné.
- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná $\Leftrightarrow |f| : \Omega \to \mathbb{R}$ je měřitelná.

Definice. (míra) Buď $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ je míra, je-li σ-aditivní (tzn. $A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}$, po dvou disjuktní, pak $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$). Prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nazveme prostor s mírou.

Definice. (konstrukce integrálu) Buď $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, konstrukce $\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu$:

1. prostor jednoduchých funkcí $\mathscr{S} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \{\chi_A | A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \infty\}$ (lineární kombinace charakteristických funkcí množin konečné míry)
$$s \in \mathscr{S},\ s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j},\ \int_{\Omega} s \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j).$$
Teď umíme integrovat jednoduché funkce.
2. $f : \Omega \to [0, +\infty]$ měřitelná,
$$\int_x f \mathrm{d}\mu := \sup_{\substack{s \in \mathscr{S} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_x s \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty].$$
O funkci říkáme, že je integrovatelná $(f \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu))$ právě tehdy, když f je měřitelná a $\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu < +\infty$.Teď umíme integrovat nezáporné funkce.

3. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelná, označme $f^+ := \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- := \frac{1}{2}(f - |f|)$. O f říkáme, že $f \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ právě tehdy, když $f^+, f^- \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$, pak definujeme
$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu, \text{ když } \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu < +\infty \text{ nebo } \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu < +\infty.$$
Nevlastní integrál podle nás existuje a značíme, $f \in \mathrm{L}^*$.
V případě komplexní funkce $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ právě tehdy, když $Re\, f, Im\, f \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$. Integrál f definujeme:
$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu := \int_\Omega Re\, f \mathrm{d}\mu + i \int_\Omega Im\, f \mathrm{d}\mu.$$

4. Integrál přes množinu $E \in \mathcal{A}$, $f \in \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ definujeme
$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \chi_E \mathrm{d}\mu.$$

Definice. (skoro všude) Buďte $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ měřitelné. Říkáme, že $f = g$ μ skoro všude, právě když $\mu(\{x \in \Omega | f(x) \neq g(x)\}) = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f - g| \mathrm{d}\mu = 0$. Značíme $f \sim g$.

Poznámka. Pojem skoro všude je relace ekvivalence
$$f = g \text{ s.v.} \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g| \mathrm{d}\mu,$$
$$f \in \mathrm{L} \text{ nebo } g \in \mathrm{L},\ f = g \text{ s.v.} \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

Věta. (existence a jednoznačnost nezúplněné leb. míry) *Buďte $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ borelovské množiny nad $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje právě jedna míra λ na $\mathcal{B}$ taková, že*

1. *$\lambda((0,1)^n) = 1$, jednotkové krychli přiřadí míru 1,*
2. *je invariantní vůči translaci.*

Definice. (zúplnění míry) Buďte $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ míra $\overline{\mu}$ je úplná, jestliže $(\forall A \in \overline{\mathcal{A}}) (\forall B \subset A) (\mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mu}(B) = 0)$.

Věta. (existence jediného rozšíření míry) *Buď $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ libovolný prostor s mírou. Pak existuje právě jedno zúplnění $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$, kde $\overline{\mu}$ je úplná, $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$, $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.*

Definice. (Lebesgueova míra) Míru $\overline{\lambda}$ nazveme Lebesgueovou mírou. Jedná se o zúplněnou míru λ.

Poznámka. $\mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\mu) \cong \mathrm{L}(\Omega, \mathrm{d}\overline{\mu})$, zvětší se třídy ekvivalence, ale nepřibudou nové.

Měřitelné množiny a funkce

Víceméně je to výpis ze zavedení Lebesgueovy míry.

Definice. (měřitelná množina - Krbálek) Buď $A \subset \Omega$ libovolná, $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ prostor s mírou. Řekneme, že A je λ-měřitelná právě tehdy, když
$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists S \in \mathscr{S}_r,\ A \subset S) (\lambda(S \setminus A) < \varepsilon).$$

Poznámka. Definice postavená při konstrukci míry pomocí vnější míry.

Definice. (měřitelná funkce - Krbálek) Buď $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ měřitelný prostor, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nazveme měřitelnou funkcí právě tehdy, když
$$(\forall c \in \mathbb{R}) (\Omega_c \in \mathcal{A}), \text{ kde } \Omega_c = \{x \in \Omega | f(x) > c\}.$$

Poznámka. Definice měřitelné funkce od pana Krbálka a pana Šťovíčka jsou ekvivalentní, neboť platí, že $\{x \in \Omega | f(x) > c\} = f^{-1}((c, +\infty))$. Navíc, jak již dobře víme z MIP, minimální σ-algebra nad otevřenými množinami tvoří borelovskou σ-algebru. Dále víme, že vlastnost stačí ověřovat pouze na generující množině. (V pravděpodobnosti jsme volili polouzavřené intervaly $(-\infty, c]$.)

Věta. (postačující podmínka měřitelnosti funkce) *Buďte $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ měřitelný prostor, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak f je měřitelná.*

Poznámka. Množina měřitelných funkcí je úplná.

Fubiniova věta

Věta. (Fubini) *Buďte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ měřitelné množiny, buď dále $\varphi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathrm{L}^*(A \times B, \mathrm{d}\lambda)$. Pak platí, že*

1. *pro skoro všechna $x \in A$, $\varphi(x, \ ) \in \mathrm{L}^*(B)$,*
2. *$\int_B \varphi(\ , y)\,\mathrm{d}y \in \mathrm{L}^*(A)$,*
3. *$\int_{A\times B} \varphi = \int_A \left(\int_B \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$*

Důsledek. (míra kartézského součinu množin) *Buďte $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, je-li $A \times B$ měřitelná. Pak $\mu(A \times B) = \mu(A)\,\mu(B)$.*

Věta. (záměna integrálů) *Buďte $M \subset \mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^m$ měřitelné množiny a $f(x,y)$ je měřitelná na $M \times N$ a nechť dále jeden z integrálů $\int_M \left(\int_N f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ nebo $\int_N \left(\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ konverguje. Pak $\int_M \left(\int_N f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_N \left(\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.*

Věta o substituci

Věta. (o substituci) *Buď $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prosté a regulární, buď $A \subset H_\varphi$ měřitelná množina. Pak*

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(y))\,|\varphi'(y)|\,\mathrm{d}y,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl. Označením $|\varphi'(y)| = \left|\mathcal{J}_{\varphi(y)}\right| = |\det \varphi'(y)|$.

Spojitost integrálu

Věta. (spojitost integrálu vzhledem k rostoucímu systému množin) *Buď $A_n \subset A_{n+1}$ rostoucí systém množin a $\varphi \gtrsim 0$ na $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ a $\varphi \in \mathrm{L}(A_n)$. Pak $\varphi \in \mathrm{L}(A)$ a $\int_A \varphi = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} \varphi$.*

Věta. (spojitost integrálu vzhledem k míře intervalu) *Buď $\varphi \in \mathrm{L}(A)$ ($\int_A \varphi < +\infty$). Pak platí, že*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall B \subset A,\ \mu(B) < \delta)\left(\int_B |\varphi| < \varepsilon\right).$$

věty o záměnách (integrál a řada, integrál a limita, integrál a derivace)

Věta. (záměna integrálu a řady) *Buďte $\varphi_n \gtrsim 0$, $\varphi_n \in \mathrm{L}^*(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n$. Pak $\varphi \in \mathrm{L}^*(A)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_A \varphi_n = \int_A \varphi$.*

Věta. (záměna integrálu a monotonní posloupnosti) *Buď $\psi_n \in \mathrm{L}(A)$ a $\psi_n \nearrow \psi$. Pak $\psi \in \mathrm{L}^*(A)$, $\int_A \psi = \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.*

Věta. (Lebesgues) *Buďte $\varphi_0, \varphi_n \in \mathrm{L}(A)$, nechť $|\varphi_n| \le \varphi_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\varphi \in \mathrm{L}(A)$ a současně $\int_A \varphi = \lim_{n\to+\infty} \int_A \varphi_n$.*

Věta. (záměna integrálu a limity v parametru) *Buď $A \subset (\Omega, \rho)$, $M \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 \in \Omega$ a nechť jsou splněny následující podmínky:*

1. *$\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$, je $f(\ , \alpha)$ měřitelná na M,*
2. *$\alpha_0 \in A'$,*
3. *pro skoro všechna $x \in M$ $\exists \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha) = \psi(x)$,*
4. *$\exists \varphi \in \mathrm{L}(M)$ pro skoro všechna $x \in M$ tak, že $\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}$ platí, že $|f(x,\alpha)| \le \varphi(x)$.*

Pak $\psi \in \mathrm{L}(M)$ a $\int_M \psi = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0 \\ \alpha\in A}} \int_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$.

Věta. (o derivaci integrálu závislém na parametru) *Buď* $f : M \times J \to \mathbb{R}$, *kde* J *je otevřený interval a nechť jsou splněny následující podmínky:*

1. $\forall \alpha \in J,\ f(\ ,\alpha)$ *měřitelná na* $M \subset \mathbb{R}^n$,
2. $\exists \alpha_0 \in J$ *takové, že* $f(\ ,\alpha_0) \in \mathrm{L}(M)$,
3. $\exists Z \subset M,\ \mu(Z) = 0$ *a* $\forall x \in M \setminus Z$ *a* $\forall \alpha \in J\ \exists \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$,
4. $\exists \varphi \in \mathrm{L}(M)$ *tak, že* $\forall \alpha \in J, \forall x \in M \setminus Z\ \left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \leq \varphi(x)$.

Pak $\exists \frac{\partial F}{\partial \alpha}$ *na* J, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\alpha) = F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \mathrm{d}x$ *a navíc* $f(\ ,\alpha) \in \mathrm{L},\ \forall \alpha \in J$.

7 Derivace v komplexním oboru, holomorfní funkce, Cauchyova věta a Cauchyův vzorec, Laurentův rozvoj a typy singularit, reziduová věta

Značení: Ω značíme neprázdnou otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$, kouli značíme $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} | \, |z-a| < r\}, \; a \in \mathbb{C}$.

Definice. (komplexní derivace) Buďte $f : \Omega \to \mathbb{C}, \; z_0 \in \Omega$. Řekneme, že f má v z_0 derivaci, jestliže existuje

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}.$$

Značíme ji $f'(z_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f(z_0)}{\mathrm{d}z}$.

Poznámka. (odvození C-R rovnic) derivace v $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$, $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Označíme $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $u = Re\, f$, $v = Im\, f$. Tedy označme novou funkci

$$\tilde{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Dále platí, že $\mathrm{d}\tilde{f}(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{2,2}$ (je lineární zobrazení).

$$\mathrm{d}\tilde{f}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}, \; \tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(x_0,y_0) + \mathrm{d}\tilde{f}(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \tilde{R}(x,y)$$

a platí, že $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left|\tilde{R}(x,y)\right|}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}$.

Platí $f'(z_0)$ existuje, pak $\mathrm{d}\tilde{f}(x_0,y_0)$ existuje. $\left(f'(z_0)(z - z_0) \equiv \mathrm{d}\tilde{f}(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right)$.

Jestliže existuje $\mathrm{d}\tilde{f}(x_0,y_0)$, pak existuje $f'(z_0)$, právě když $\mathrm{d}\tilde{f}(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^{2,2}$ je určeno násobením komplexním číslem.To znamená $c = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \quad \xi + i\eta \in \mathbb{C} \quad & \mapsto (a+ib)(\xi + i\eta) \in \mathbb{C}, \\ & \mapsto \begin{pmatrix} a\xi - b\eta \\ a\xi + b\eta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad & \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \text{ tj. } L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}. \end{aligned}$$

Je určena násobením komplexním číslem, právě když $L_{11} = L_{22}, \; L_{12} = -L_{21}$ (Cauchy-Riemannovy podmínky).

Věta. (nutná a postačující podmínka existence komplexní derivace) *Nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ derivaci $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$ jako funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Označme $u = Re\, f$, $v = Im\, f$. Potom $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky:*

$$\left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}; \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right).$$

Důsledek. *Buďte $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Nechť funkce $u = Re\, f$, $v = Im\, f$ mají na okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace 1. řádu. Potom $f'(z_0)$ existuje, právě když jsou splněny C-R rovnice.*

Definice. (holomorfní funkce) Buď $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f je holomorfní na Ω, právě když $f'(z)$ existuje pro všechna $z \in \Omega$. Množinu všech holomorfních funkcí na Ω označíme $H(\Omega)$.

Definice. (celá funkce) Funkci $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazveme celá funkce, jestliže $f \in H(\Omega)$.

Definice. (parciální komp. derivace) Pokládáme $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Věta. *($\partial_{\bar{z}} f = 0$ odpovídá C-R rovnicím)*

Cauchyova věta a Cauchyův vzorec

Definice. (soubor regulárních uzavřených křivek) Buď $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, soubor regulárních uzavřených křivek. Položíme $\langle \Gamma \rangle := \cup_{j=1}^{n} \langle \gamma_j \rangle$, $f \in C(\langle \Gamma \rangle)$, $\int_\Gamma f = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f$. Dále pro všechna $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ definujeme index bodu vzhledem k souboru regulárních křivek následovně:

$$\operatorname*{ind}_{\Gamma}(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{ind}_{\gamma_j}(a).$$

Věta. (Cauchyova věta a Cauchyův vzorec) *Buďte $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $n \in \mathbb{N}$, soubor regulárních uzavřených křivek v Ω. Nechť $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = 0$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$ platí, že*

1. *$\forall z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle$, $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \operatorname{ind}_\Gamma(z) f(z)$ (Cauchyova formule),*
2. *$\int_\Gamma f = 0$ (Cauchyova věta).*

Poznámka. K důkazu tohoto tvrzení jsou potřeba následující věty.

- Cauchyova věta pro trojúhelník: Funkce holomorfní na oblasti až na jeden bod, pak integrál přes libovolný trojúhelník je nulový.
- Morerova věta: Jestliže je integrál spojité komplexní funkce přes libovolný trojúhelník nulový, pak je funkce na oblasti holomorfní.
- Liouville: Jestliže je celá funkce omezená, pak už je nutně konstantní.

Důsledek. *Buďte $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ a $\tilde{\Gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_m)$ dva soubory regulárních uzavřených křivek v Ω. Jestliže $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = \operatorname{ind}_{\tilde{\Gamma}}(z)$, potom $\forall f \in H(\Omega)$, $\int_\Gamma f = \int_{\tilde{\Gamma}} f$.*

Důsledek. *Buď γ regulární Jordanova křivka v Ω. Nechť $int(\gamma) \subset \Omega$. Potom $\forall f \in H(\Omega)$, $\int_\gamma f = 0$.*

Laurentův rozvoj a typy singularit

Definice. (izolovaná singularita, odstranitelná singularita) Buďte $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom řekneme, že f má v bodě a izolovanou singularitu. Pokud existuje $\tilde{f} \in H(\Omega)$ tak, že $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$, $f(z) = \tilde{f}(z)$, říkáme, že singularita v bodě a je odstranitelná.

Věta. (nutná a postačující podmínka pro odstranitelnost izolované singularity) *Buďte $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Singularita v a je odstranitelná, právě když f je omezená na nějakém okolí bodu a.*

Věta. (klasifikace singularit) *Buďte $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Potom nastane právě jedna ze tří možností:*

1. *f má v bodě a odstranitelnou singularitu,*
2. *existují jednoznačně určené $m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ tak, že $f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$, $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$ má v bodě a odstranitelnou singularitu,*
3. *$\forall r > 0$ taková, že $D(a, r) \subset \Omega$ je $f(D'(a, r))$ je hustá podmnožina $\mathbb{C}$.*

Definice. (typy singularit) V případě 2., říkáme, že funkce f má v bodě a pól m-tého řádu. V případě 3., má f v bodě a podstatnou singularitu.

Poznámka. Chování funkce na okolí singularity:

- (odstranitelná singularita) existuje $\lim_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$, (příklad $f(z) = 0$, $\forall z \in \Omega \setminus \{a\}$),
- (pól) existuje $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$ ($\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$), (příklad $f(z) = \frac{1}{z^m}$),
- (podstatná singularita) neexistuje $\lim_{z \to a} f(z)$, obraz okolí a pokryje hustou podmnožinu v $\mathbb{C}$, dokonce $\forall w \in \mathbb{C}$ existuje posloupnost $(z_n)_{n=1}^{+\infty} \in \Omega \setminus \{a\}$ tak, že $z_n \to a$, $f(z_n) \to w$. (příklad $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$).

Definice. (mezikruží) Množinu $P(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z-a| < r_2\}$, nazýváme mezikruží.

Definice. (Laurentova řada) Buďte $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$. Potom $z \neq a$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Laurentova řada konverguje, právě když konvergují obě řady na pravé straně. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ nazýváme regulární část, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ nazýváme hlavní část.

Věta. *Buďte $c_n \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$. Označme po řadě R_-, R_+ poloměry konvergence řad $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{w^n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n$. Jestliže $\frac{1}{R_-} < R_+$, pak Laurentova řada konverguje na $P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right)$.*

Věta. (podoba koeficientů c_n) *Za stejných předpokladů, nechť $\frac{1}{R_-} < R_+$. Označme*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \ z \in P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right).$$

Potom $f \in H\left(P\left(a, \frac{1}{R_-}, R_+\right)\right)$ a $\forall r \in \left(\frac{1}{R_-}, R_+\right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

kde $\gamma_r(t) = a + r\mathrm{e}^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$.

Poznámka. koeficienty c_n v Laurentově rozvoji jsou jednoznačně určeny funkcí f.

Věta. (existence jednoznačného rozvoje) *Buďte $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$, $f \in H(P(a, r_1, r_2))$. Potom f lze na $P(a, r_1, r_2)$ jednoznačně rozvést do Laurentovy řady,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \ z \in P(a, r_1, r_2).$$

Reziduová věta

Definice. (reziduum) Buď $f \in H(D'(a,r)), \ r > 0, \ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Reziduem funkce f v bodě a je $\operatorname{res}_a(f) = c_{-1}$.

Věta. (o reziduu) *Buďte $A \subset \Omega$, $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ soubor regulárních uzavřených křivek v $\Omega \setminus A$ a nechť A nemá v Ω hromadný bod. Dále nechť $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\operatorname{ind}_\Gamma(w) = 0$. Potom pro libovolnou $f \in H(\Omega \setminus A)$ platí, že*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname*{ind}_\Gamma(a) \operatorname*{res}_a(f).$$

Definice. (meromorfní funkce) Funkci f nazveme meromorfní na Ω, jestliže existuje $A \subset \Omega$ taková, že

1. $f \in H(\Omega \setminus A)$,
2. A nemá hromadný bod v Ω,
3. $\forall a \in A$, f nemá v a podstatnou singularitu.

8 Lineární zobrazení a jeho matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, Frobeniova věta

Definice. (lineární zobrazení) Buďte P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T, $A : P \to Q$. A nazveme lineární, pokud platí, že

1. A je aditivní $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)\left(A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}) + A(\vec{y})\right)$,
2. A je homogenní $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x} \in P)\left(A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x})\right)$.

Věta. (alternativní definice lin. zobrazení) *Buďte P, Q vektorové prostory nad stejným tělesem T, $A : P \to Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *A je lineární,*
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)\left(A(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha A(\vec{x}) + A(\vec{y})\right)$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T)(\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)\left(A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A(\vec{x}_j)\right)$.

Definice. (prostor lineárních zobrazení) Množinu všech lineárních zobrazení z P do Q vektorových prostorů nad tělesem T označíme $\mathscr{L}(P, Q)$. Dále definujeme operace sčítání a násobení číslem z tělesa:

1. $(\forall A, B \in \mathscr{L}(P, Q))(\forall \vec{x} \in P)\left((A \oplus B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}\right)$,
2. $(\forall \alpha \in T)(\forall A \in \mathscr{L}(P, Q))(\forall \vec{x} \in P)\left((\alpha \odot A)\vec{x} = \alpha A\vec{x}\right)$.

Věta. (prostor lineárních zobr. je vektorový prostor)

Definice. (monomorfismus, epimorfismus, izomorfismus) Buďte P, Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P, Q)$, říkáme, že:

1. A je prosté, monomorfismus právě tehdy, když $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)\left(A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}\right)$,
2. A je „na Q “, epimorfismus právě tehdy, když $(\forall \vec{z} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)\left(A\vec{x} = \vec{z}\right)$,
3. je-li A prosté i na, pak je A izomorfismus,
4. je-li $P = Q$ a A je izomorfismus, pak A nazveme regulární operátor.

Definice. (linearita inverzního zobrazení) Buďte P, Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P, Q)$ izomorfismus. Pak $A^{-1} \in \mathscr{L}(Q, P)$ je také izomorfismus.

Věta. (linearita složeného zobrazení) *Buďte P, Q, V vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(Q, V)$, $B \in \mathscr{L}(P, Q)$. Pak $AB \in L(P, V)$.*

Definice. (obraz a vzor množiny) Buďte P, Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P, Q)$. Nechť $M \subset P$, $N \subset Q$. Obrazem M nazveme $A(M) = \{A\vec{x} | \vec{x} \in M\}$. Vzorem množiny N nazveme $A^{-1}(N) = \{\vec{x} \in P | A\vec{x} \in N\}$.

Věta. (obraz a vzor podprostoru je podprostor)

Definice. (jádro, hodnost, defekt) Buďte P, Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P, Q)$.

1. Hodností A nazveme $h(A) = \dim A(P)$,
2. jádrem A nazveme $\ker A = \left\{\vec{x} \in P | A\vec{x} = \vec{0}_Q\right\}$,
3. defektem A nazveme $\mathrm{d}A = \dim \ker A$.

Věta. (obraz lineárního obalu) *Buďte P, Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P, Q)$. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou vektory z P. Pak $A([\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]_\lambda) = [A\vec{x}_1, \ldots, A\vec{x}_n]_\lambda$.*

Věta. (dimenze obrazu podprostoru) *Buďte P, Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P, Q)$, $P_1 \subset\subset P$. Pak $\dim A(P_1) \leq \dim P_1$. Speciálně $h(A) = \dim A(P) \leq \dim P$.*

Věta. (jednodušší ověření izomorfnosti) *Buďte P,Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P,Q)$, nechť* $\dim P = \dim Q < +\infty$. *Pak A je izomorfní právě tehdy, když A je monomorfní nebo epimorfní.*

Poznámka. Na konečné dimenzi je lineární zobrazení mezi izomorfními prostory epimorfní, právě když je monomorfní. (Platí též pro lineární operátory.)

Věta. (prostota a jádro) *Buďte P,Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P,Q)$. A je prosté právě tehdy, když* $\ker A = \left\{\vec{0}_P\right\}$.

Věta. (prostota a dimenze obrazu podprostoru) *Buďte P,Q vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(P,Q)$ monomorfismus. Pak platí, že*

1. *$\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ LN v P, pak $A\vec{x}_1,\dots,A\vec{x}_n$ jsou LN v Q,*
2. *$P_1 \subset\subset P$, pak* $\dim A(P1) = \dim P_1$. *Speciálně* $h(A) = \dim P$.

Věta. (hodnost složeného zobrazení) *Buďte P,Q,V vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(Q,V)$, $B \in \mathscr{L}(P,Q)$. Potom*

1. *$h(AB) \le h(B)$, navíc je-li A prosté, pak $h(AB) = h(B)$,*
2. *$h(AB) \le h(A)$, navíc je-li B „na Q “, pak $h(AB) = h(A)$.*

Věta. (zadávání lin. zobrazení) *Buďte P,Q vektorové prostory nad tělesem T. Nechť $n = \dim P \in \mathbb{N}$, ozn. $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ bázi P, $\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n$ jsou vektory z Q. Pak $\exists_1 A \in \mathscr{L}(P,Q)$ takové, že $A\vec{x}_i = \vec{y}_i$, $\forall i \in \hat{n}$. (Lineární zobrazení je jednoznačně určeno působením na bazické vektory.)*

Matice a lineární zobrazení

Definice. (násobení matic) Buďte $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Pak součinem matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ nazveme matici $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} \in T^{m,p}$ definovanou:

$$(\forall i \in \hat{m})\,(\forall j \in \hat{p})\,[\mathbb{A}\mathbb{B}]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{ik}\mathbb{B}_{kj}.$$

Věta. (vlastnosti součinu matic) *Součin matic je asociativní, distributivní vůči sčítáni, ale NENÍ komutativní.*

Definice. (matice lineárního zobrazení) Buďte P_n, Q_m vektorové prostory nad tělesem T, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ báze P_n, $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n)$ báze Q_n. Buď $A \in \mathscr{L}(P_n,Q_m)$. Definujeme matici zobrazení A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$:

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \left((A\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}},\dots,(A\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}\right) \in T^{m,n}.$$

Věta. (vlastnosti matic zobrazení) *Buďte P_n, Q_m vektorové prostory nad tělesem T, $\mathcal{X}$ báze P_n, $\mathcal{Y}$ báze Q_n. Pak*

1. *$\forall A,B \in \mathscr{L}(P_n,Q_m)$, ${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$,*
2. *$\forall \alpha \in T$, $\forall A \in \mathscr{L}(P_n,Q_m)$, ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha\,{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.*

Věta. (matice složeného zobrazení) *Buďte P_n, Q_m, V_s vektorové prostory nad tělesem T, $A \in \mathscr{L}(Q_m,V_s)$, $B \in \mathscr{L}(P_n,Q_m)$. Buďte $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ báze P_n, Q_m, V_s. Pak platí, že*

$${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}.$$

Definice. (matice přechodu) Buďte $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ báze V_n. Maticí přechodu od $\mathcal{X}$ k $\mathcal{Y}$ nazveme ${}^{\mathcal{X}}I^{\mathcal{Y}} = \left((\vec{x}_1)_{\mathcal{Y}},\dots,(\vec{x}_n)_{\mathcal{Y}}\right)$.

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic (LAR) pro n neznámých nazveme každou soustavu tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

kde čísla a_{ij} a b_i pro $i \in \hat{n}$ jsou obecně komplexní.

Značení:

- Matice
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
se nazývá matice soustavy.

- Matice
$$\left(\mathbb{A}|\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$
se nazývá rozšířenou maticí soustavy.

- Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ se nazývá sloupec pravých stran.

- Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, pro nějž je soustava splněna, nazýváme řešením soustavy.

- Jestliže $\vec{b} = \vec{0}$, říkáme, že soustava je homogenní nebo bez pravé strany.

- V opačném případě jde o soustavu s pravou stranou.

Poznámka. Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení $\vec{x} = \vec{0}$, takové řešení nazýváme triviální.

Definice. (horní stupňovitý tvar) Matice $\mathbb{A}$ o m řádcích a $n+1$ sloupcích s prvky $a_{ij},\ i \in \widehat{m},\ j \in \widehat{n+1}$, je v horním stupňovitém tvaru, pokud existuje $l \in \widehat{m}$ a indexy $k_1, \ldots, k_l$ takové, že $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l \leq n+1$ a platí, že

1. $a_{ik_i} \neq 0$ pro každé $i \in \widehat{l}$,
2. $a_{ij} = 0$ pro každé $i \in \widehat{l}$, a $j < k_i$,
3. $a_{ij} = 0$ pro každé $i > l,\ j \in \widehat{n+1}$.

Poznámka. Řešení soustavy provádíme pomocí úprav, které nazýváme ekvivalentní:

1. záměna dvou rovnic,
2. přičtení násobku jiné rovnice k vybrané rovnici,
3. násobení rovnice nenulovým číslem.

Poznámka. Sloupce rozšířené matice soustavy s indexy $k_1, k_2, \ldots, k_l$ nazýváme hlavní sloupce, ostatní sloupce nazýváme vedlejší.

- Soustava je řešitelná právě tehdy, když sloupec pravých stran je vedlejší.
- Řešení dopočítáme tak, že neznámé odpovídající vedlejším sloupcům zvolíme libovolně a zbylé neznámé jednoznačně dopočítáme.
- Soustava má jediné řešení, právě když má matice soustavy jen samé hlavní sloupce a sloupec pravých stran je vedlejší.

Frobeniova věta

Definice. (hodnost matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. Hodností $\mathbb{A}$ nazveme $\mathrm{h}(\mathbb{A}) = \dim [\mathbb{A}_{\cdot 1}, \mathbb{A}_{\cdot 2}, \dots, \mathbb{A}_{\cdot n}]_\lambda$.

Věta. (hodnost lineárního zobrazení a jeho matice) *Buďte $A \in \mathscr{L}(P_n, Q_m)$, $\mathcal{X}$ báze P_n, $\mathcal{Y}$ báze Q_m. Pak $h(A) = h\left({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}\right)$.*

Věta. (Frobeniova) *Buďte $\mathbb{A} \in T^{m,n}$, $\vec{b} \in T^m$. Pak pro soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ platí, že*

1. *řešení existuje právě tehdy, když $h(\mathbb{A}) = h\left(\mathbb{A}|\vec{b}\right)$,*
2. *$S_0 := \{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A}\vec{x} = 0\}$, pak $S_0 \subset\subset T^n$ a $\dim S_0 = n - h(\mathbb{A})$,*
3. *pokud $h(\mathbb{A}) = h\left(\mathbb{A}|\vec{b}\right)$, pak pro množinu všech řešení $S := \left\{\vec{x} \in T^n | \mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}\right\}$ platí, že $S = \vec{a} + S_0$, kde $\vec{a}$ je partikulární řešení ($\mathbb{A}\vec{a} = \vec{b}$).*

9 Hermitovské operátory a kvadratické formy, skalární součin a ortogonalita, nerovnosti

Hermitovské a kvadratické formy

Definice. (hermotivská forma) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $h : V \times V \to T$ nazveme hermitovskou formou pokud platí, že

1. hermitovskost: $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in V) \left(h(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{h(\vec{y}, \vec{x})}\right)$,

2. linearita v prvním argumentu: $(\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T)(h(\alpha\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \alpha h(\vec{x}, \vec{z}) + h(\vec{y}, \vec{z}))$.

Diagonálou hermitovské formy nazýváme zobrazení $Q : V \to T$ definované pro každé $\vec{x} \in V$ jako $Q(\vec{x}) := h(\vec{x}, \vec{x})$.

Věta. (vlastnosti) *Buď V je vektorový prostor nad tělesem T, h hermitovská forma na V, Q její diagonála. Pak $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha \in T$ platí, že*

1. *antilinearita ve druhém argumentu:* $h(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \vec{z}) = \overline{\alpha} h(\vec{x}, \vec{y}) + h(\vec{x}, \vec{z})$,

2. $Q(\vec{x}) \in \mathbb{R}$,

3. $Q(\alpha\vec{x}) = |\alpha|^2 Q(\vec{x})$,

4. $Q(\vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + 2Re(h(\vec{x}, \vec{y})) + Q(\vec{y})$,

5. *rovnoběžníková rovnost:* $Q(\vec{x} + \vec{y}) + Q(\vec{x} - \vec{y}) = 2(Q(\vec{x}) + Q(\vec{y}))$,

6. *polarizační identity:*

pro $T = \mathbb{R}$
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})),$$
pro $T = \mathbb{C}$
$$h(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4}(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x} - \vec{y})) + \frac{i}{4}(Q(\vec{x} + i\vec{y}) - Q(\vec{x} - i\vec{y})).$$

Definice. (nulprostor) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T, h hermitovská forma na V. Nulprostorem h nazveme množinu
$$N_h = \{\vec{x} \in V | h(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V\}.$$

Nulitou formy h pak rozumíme $\dim N_h$. Navíc h nazýváme regulární právě tehdy, když $\dim N_h = 0$, jinak je h singulární.

Věta. (o nulprostoru) *Buď V je vektorový prostor nad tělesem T, h hermitovská forma na V. Pak $N_h \subset\subset V$.*

Definice. (polární báze) Nechť V_n je vektorový prostor nad tělesem T a h je hermitovská forma na V_n a nechť $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ je báze V_n. Jestliže $h(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = 0$ pro každé $i, j \in \widehat{n},\ i \neq j$, pak $\mathcal{A}$ nazveme polární bází hermitovské formy h.

Definice. (kvadratická forma) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T, $Q : V \to T$. Říkáme, že Q je kvadratickou formou, pokud existuje hermitovská forma h taková, že Q je její diagonálou. Takovou h pak nazýváme polárou Q. Polární bází, nulprostorem a nulitou Q rozumíme polární bázi, nulprostor a nulitu h. Dále Q je regulární právě tehdy když h je regulární.

Věta. (zákon setrvačnosti kvadratických forem) *Buď V_n je vektorový prostor nad tělesem T, Q kvadratická forma na V_n a $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ polární báze Q. Označme p, q, r počty kladných čísel, záporných čísel a nul v posloupnosti $(Q(\vec{a}_1), \ldots, Q(\vec{a}_n))$. Pak (p, q, r) nezávisí na volbě báze.*

Definice. (index setrvačnosti, signatura kvadratické formy) Čísla p, resp. q z předešlé věty nazýváme kladným, resp. záporným indexem setrvačnosti kvadratické formy. Signaturou Q nazýváme trojici čísel $\mathrm{sg}(Q) = (p, q, r)$ a hodností Q rozumíme $h(Q) = p + q$.

Definice. (charakter kvadratické formy) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T, Q kvadratická forma na V. Říkáme, že Q má charakter:

1. pozitivně definitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V,\ Q(\vec{x}) > 0$,
2. pozitivně semidefinitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V,\ Q(\vec{x}) > 0$ a současně $\exists \vec{x}_0 \in V,\ Q(\vec{x}_0) = 0$,
3. negativně definitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V,\ Q(\vec{x}) < 0$,
4. negativně semidefinitní: $\forall \vec{x} \neq \vec{0} \in V,\ Q(\vec{x}) < 0$ a současně $\exists \vec{x}_0 \in V,\ Q(\vec{x}_0) = 0$,
5. indefinitní: $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V,\ Q(\vec{x}_1) > 0$ a $Q(\vec{x}_2) < 0$.

Skalární součin a ortogonalita

Definice. (skalární součin) Buď V je vektorový prostor nad tělesem T. Zobrazení $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to T$ nazveme skalárním součinem, jestliže $\langle\cdot|\cdot\rangle$ je hermitovskou formou s pozitivně definitní diagonálou. To znamená:

1. hermitovskost: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = \overline{\langle\vec{y}|\vec{x}\rangle}$,
2. linearita v prvním argumentu,
3. pozitivní definitnost: $\forall \vec{x} \in V,\ \langle\vec{x}|\vec{x}\rangle \geq 0$ a současně $\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Definice. (norma) Normou nazveme zobrazení $\|\cdot\| : V \to T$ definované $\forall \vec{x} \in V$ předpisem $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle}$.

Definice. (prehilbertův prostor) Vektorový prostor V nad tělesem T se skalárním součinem $\langle\cdot|\cdot\rangle$ značíme $\mathcal{H}$ a nazýváme prehilbertovým.

Definice. (úhel) Buďte $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H},\ \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$. Pak úhlem mezi $\vec{x}$ a $\vec{y}$ rozumíme číslo

$$\varphi = \arccos \frac{\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}.$$

Definice. (ortogonalita) Vektory $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n \in \mathcal{H}$ nazveme ortogonálními, pokud $(\forall i, j \in \widehat{n}, i \neq j)(\langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle = 0)$. Dále říkáme, že jsou ortonormální, pokud $\langle\vec{x}_i|\vec{x}_j\rangle = \delta_{ij}$.

Věta. (lineární nezávislost OG vektorů)

Věta. (souřadnice v OG bázi) *Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je OG báze v $\mathcal{H}_n$. Potom pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$ platí, že*

$$x_i^{\#}(\vec{x}) = \frac{\langle\vec{x}|\vec{x}_i\rangle}{\|\vec{x}_i\|^2}.$$

Definice. (Fourierovy koeficienty) Nechť $\mathcal{H}_n$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je ON báze v $\mathcal{H}_n$. Pak souřadnice vektorů v bázi $\mathcal{X}$ nazýváme Fourierovými koeficienty v bázi $\mathcal{X}$.

Věta. (Pythagorova) *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$ jsou OG vektory. Potom platí, že*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Věta. (Gram-Schmidtova) *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ jsou LN vektory z $\mathcal{H}$. Pak existují OG (i ON) vektory $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ takové, že $[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k]_\lambda = [\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k]_\lambda$ pro každé $k \in \widehat{n}$.*

Poznámka. Vzorec ortogonalizačního procesu:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle\vec{x}_{k+1}|\vec{y}_i\rangle}{\|\vec{y}_i\|^2} \vec{y}_i.$$

Nerovnosti

Věta. (Cauchy-Schwartzova nerovnost) *Buď $\mathcal{H}$ vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí, že*

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, .$$

Rovnost nastává právě, když jsou vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ lineárně závislé.

Věta. (trojúhelníková nerovnost) *Buď $\mathcal{H}$ vektorový prostor nad tělesem T a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}$. Pak platí, že*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \, .$$

Rovnost nastává právě, když $\exists \alpha \geq 0$ takové, že $\vec{x} = \alpha \vec{y}$ nebo $\vec{y} = \alpha \vec{x}$.

Věta. (Besselova nerovnost) *Nechť $\mathcal{H}$ je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ jsou ON vektory z $\mathcal{H}$. Pak pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}$ platí, že*

$$\sum_{i=1}^{k} |\langle \vec{x} | \vec{x}_i \rangle|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \, .$$

10 Lineární operátory a čtvercové matice, determinant, vlastní čísla, diagonalizovatelnost, normální operátory

Definice. (lineární operátor) Buď V vektorový prostor nad tělesem T.

- Lineární zobrazení $A \in \mathscr{L}(V,V) = \mathscr{L}(V)$ nazveme lineární operátor.
- $\mathscr{L}(V,T) = V^{\#}$ nazveme duální prostor k V. Prvky duálního prostoru nazýváme funkcionály.

Definice. (čtvercová matice, regulární) Matici $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ nazýváme čtvercová. Dále říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je regulární, pokud $\mathrm{h}(\mathbb{A}) = n$. Jestliže matice není regulární, říkáme, že je singulární.

Věta. (izomorfismus a regulární matice) *Nechť $A \in \mathscr{L}(P_n, Q_n)$, kde P_n, Q_n jsou vektorové prostory nad tělesem T. Označme $\mathcal{X}$ bázi P_n a $\mathcal{Y}$ bázi Q_n. Potom A je izomorfismus (regulární operátor) právě tehdy, když ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$ je regulární matice.*

Poznámka. Dále je možné do této sekce zařadit též nějaká tvrzení ze sekce o lineárních zobrazeních.

Determinant

Definice. (permutace) Každou bijekci $\pi : \widehat{n} \to \widehat{n}$ nazýváme permutací na $\widehat{n}$. Množinu všech permutací na $\widehat{n}$ značíme S_n.

Definice. (inverze, znaménko permutace) Buď $\pi \in S_n$. Pak inverzí v π nazveme každou uspořádanou dvojici (i,j), $i,j \in \widehat{n}$, splňující: $i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)$. Počet inverzí v π značíme I_π. Znaménkem permutace π rozumíme číslo $\mathrm{sgn}(\pi) := (-1)^{I_\pi}$. Jde o sudou permutaci, jestliže $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$, a lichou, jestliže $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$.

Definice. (transpozice) Nechť $n \geq 2$ a $i,j \in \widehat{n}$, $i \neq j$. Transpozicí čísel i a j nazveme permutaci τ_{ij} splňující:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(k) &= k \text{ pro } i \neq k \neq j, \\ \tau_{ij}(j) &= i, \\ \tau_{ij}(i) &= j. \end{aligned}$$

Věta. (znaménko transpozice) *Každá transpozice je lichá permutace.*

Věta. (znaménko složené permutace) *Buďte $\pi, \rho \in S_n$. Pak platí, že*

$$\mathrm{sgn}(\pi \circ \rho) = \mathrm{sgn}(\pi)\mathrm{sgn}(\rho).$$

Definice. (determinant matice) Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak determinantem matice $\mathbb{A}$ nazveme číslo

$$\det \mathbb{A} := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}\pi \mathbb{A}_{1\pi(1)} \mathbb{A}_{2\pi(2)} \cdots \mathbb{A}_{n\pi(n)}.$$

Sčítance v sumě nazýváme členy determinantu.

Věta. (determinant transponované matice) *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.*

Definice. (horní a dolní trojúhelníková matice) Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$.

- Matici $\mathbb{A}$ nazveme horní trojúhelníkovou maticí, pokud pro každé $i,j \in \widehat{n}$, kde $i > j$, platí, že $\mathbb{A}_{ij} = 0$. (Matice má pod diagonálou nuly.)
- Matici $\mathbb{A}$ nazveme dolní trojúhelníkovou maticí, pokud pro každé $i,j \in \widehat{n}$, kde $i < j$, platí, že $\mathbb{A}_{ij} = 0$. (Matice má nad diagonálou nuly.)

Věta. (determinant trojúhelníkových matic) *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ a $\mathbb{A}$ je horní či dolní trojúhelníková. Pak* $\det \mathbb{A} = \mathbb{A}_{11}\mathbb{A}_{22} \cdots \mathbb{A}_{nn}$.

Věta. (řádkové a sloupcové úpravy determinantů) *Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak platí, že*

1. *Vznikne-li $\mathbb{B}$ vynásobením některého řádku (sloupce) matice $\mathbb{A}$ číslem $\alpha \in T$, pak* $\det \mathbb{B} = \alpha \det \mathbb{A}$.

2. *Je-li některý řádek (sloupec)* $\mathbb{A}$ *nulový, pak* $\det \mathbb{A} = 0$.

3. *Vznikne-li* $\mathbb{B}$ *prohozením dvou řádků (sloupců) matice* $\mathbb{A}$, *pak* $\det \mathbb{B} = -\det \mathbb{A}$.

4. *Má-li* $\mathbb{A}$ *dva řádky (sloupce) stejné, pak* $\det \mathbb{A} = 0$.

5. *Označme* $\mathbb{A} = (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ \vec{p} \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$ *a* $\mathbb{B} = (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ \vec{q} \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$. *Pak* $\det \mathbb{A} + \det \mathbb{B} = \det (\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_{i-1} \ (\vec{p}+\vec{q}) \ \vec{a}_{i+1} \ \dots \ \vec{a}_n)$. *Analogicky pro řádky.*

6. *Přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) matice* $\mathbb{A}$ *libovolný násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění.*

Důsledek. *Buď* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *a* $\alpha \in T$. *Potom* $\det(\alpha\mathbb{A}) = \alpha^n \det \mathbb{A}$.

Definice. (n-lineární forma, antisymetrická forma) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Pak zobrazení $w : V \times V \times \ldots \times V \to T$ nazveme:

- n-lineární formou na V, jestliže pro každé $\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a $\alpha \in T$ a pro každé $i \in \widehat{n}$ platí, že

$$\begin{aligned} w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \alpha\vec{y} + \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) &= \alpha w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n) \\ &\quad + w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{i-1}, \vec{z}, \vec{x}_{i+1}, \ldots, \vec{x}_n), \end{aligned}$$

- antisymetrickou formou na V, pokud pro každé $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in V$ a pro každé $i, j \in \widehat{n}, \ i \neq j$, platí, že

$$w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_i, \ldots \vec{x}_j, \ldots, \vec{x}_n) = -w(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_j, \ldots \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_n).$$

Důsledek. *Nahlížíme-li na determinant jako na funkci sloupců matice, pak se jedná o n-lineární antisymetrickou formu na* T^n.

Lemma. (řádkové úpravy jako násobení maticí) *Buď* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Předpokládejme, že* $\mathbb{M}$ *vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}_n$ *nějakou ekvivalentní řádkovou úpravou. Pak platí, že* $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Věta. (ekvivalentní řádkové úpravy a determinant matice) *Buď* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Předpokládejme, že* $\mathbb{M}$ *vznikla z jednotkové matice* $\mathbb{I}_n$ *konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav. Pak* $\det(\mathbb{M}\mathbb{A}) = \det \mathbb{M} \det \mathbb{A}$.

Věta. (regulární matice a determinant) *Buď* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. *Potom* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta. (determinant součinu matic) *Buďte* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in T^{n,n}$. *Pak platí, že*

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}.$$

Věta. (determinant inverzní matice) *Buď* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ *regulární matice, pak platí, že*

$$\det\left(\mathbb{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det \mathbb{A}}.$$

Definice. (algebraický doplněk) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, kde $n > 1$. Označme $\mathbb{A}^{(i,j)}$ matici, která vznikne z $\mathbb{A}$ vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak číslo

$$D_{ij} \coloneqq (-1)^{i+j} \det \mathbb{A}^{(i,j)}$$

nazveme algebraickým doplňkem prvku $\mathbb{A}_{ij}$.

Věta. (rozvoj determinantu podle řádku, sloupce) *Buď* $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. *Pak platí, že pro každé* $i \in \widehat{n}$:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle i-tého řádku).}$$

Respektive pro každé $j \in \widehat{n}$:

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{A}_{ij} D_{ij} \quad \textit{(rozvoj podle j-tého sloupce).}$$

Definice. (adjungovaná matice) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Adjungovanou maticí k $\mathbb{A}$ nazveme matici $\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}$ splňující pro každé $i, j \in \widehat{n}$:

$$\left[\mathbb{A}^{\mathrm{adj}}\right]_{ij} = D_{ji}.$$

Věta. (inverzní a adjungovaná matice) *Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$. Pak*

1. *platí, že rovnost* $(\det \mathbb{A})\, \mathbb{I} = \mathbb{A}^{adj}\mathbb{A}$,
2. *je-li navíc $\mathbb{A}$ regulární, pak platí, že* $\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^{adj}$.

Věta. (Cramerovo pravidlo) *Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, $n > 1$, a $\vec{b} \in T^n$. Pokud $\mathbb{A}$ je regulární matice, potom pro každé $j \in \widehat{n}$ je j-tá složka řešení soustavy $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}$ rovna:*

$$x_j = \frac{\det \mathbb{B}^{(j)}}{\det \mathbb{A}},$$

kde matice $\mathbb{B}^{(j)}$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ nahrazením j-tého sloupce vektorem $\vec{b}$.

Definice. (subdeterminant) Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$, nechť čísla $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \widehat{m}$ a $j_1, j_2, \ldots, j_l \in \widehat{n}$ splňují:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m \quad \text{a} \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_l \leq n.$$

Pak matici $\mathbb{A}\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_l \end{pmatrix}$, jež vznikla z $\mathbb{A}$ zachováním pouze těch prvků, které mají řádkový index z $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ a zároveň sloupcový index z $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$, nazveme submaticí matice $\mathbb{A}$. Je-li submatice čtvercová řádu k, pak její determinant nazveme subdeterminantem řádu k matice $\mathbb{A}$.

Věta. (hodnost a subdeterminant) *Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pak $h(\mathbb{A}) = k$, právě když existuje nenulový subdeterminant matice $\mathbb{A}$ řádu k a zároveň je každý subdeterminant vyššího řádu nulový.*

Definice. (determinant operátoru) Nechť V_n je vektorový prostor dimenze n nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X}$ je libovolná báze prostoru V_n a $A \in \mathscr{L}(V_n)$. Pak determinant operátoru A značíme $\det A \coloneqq \det^{\mathcal{X}} A$.

Poznámka. Pro operátory platí, že podobná tvrzení s determinanty jako pro matice.

Vlastní čísla

Definice. (vlastní čísla, vektory) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme vlastním číslem matice $\mathbb{A}$, pokud existuje vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq 0$, takový, že $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Vektor $\vec{x}$ nazveme vlastním vektorem matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ. Množinu vlastních čísel matice $\mathbb{A}$ nazveme spektrem matice $\mathbb{A}$ a značíme $\sigma(\mathbb{A})$. Vlastním podprostorem matice $\mathbb{A}$ příslušným vlastnímu číslu λ rozumíme $P_\lambda \coloneqq \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n | \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$, tj. P_λ je množina vlastních vektorů $\mathbb{A}$ příslušných λ s přidáním nulového vektoru.

Věta. (LK vlastních vektorů) *Buďte $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Pak $P_\lambda \subset\subset \mathbb{C}^n$. Navíc $\{\mathbb{A}\vec{x} | \vec{x} \in P_\lambda\} \subset P_\lambda$.*

Definice. (geometrická násobnost) Buďte $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Potom geometrickou násobností vlastního čísla λ nazveme $\nu_g(\lambda) = \dim P_\lambda$.

Definice. (charakteristický polynom) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Zobrazení $p_\mathbb{A} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované pro každé $t \in \mathbb{C}$ jako $p_\mathbb{A}(t) = \det(\mathbb{A} - t\mathbb{I})$ nazýváme charakteristickým polynomem matice $\mathbb{A}$.

Věta. (Vlastnosti charakteristického polynomu) *Nechť $p_\mathbb{A}$ je charakteristický polynom matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí, že*

1. *$p_\mathbb{A}$ je polynom,*
2. *stupeň $p_\mathbb{A}$ je n a koeficient u nejvyššího stupně t^n v $p_\mathbb{A}(t)$ je $(-1)^n$,*
3. *konstantní člen polynomu $p_\mathbb{A}$ je roven* $\det \mathbb{A}$.

Věta. (vlastní čísla a charakteristický polynom) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, právě když $p_\mathbb{A}(\lambda) = 0$.*

Definice. (algebraická násobnost) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$. Algebraickou násobností $\nu_a(\lambda)$ vlastního čísla λ nazveme násobnost λ jakožto kořene charakteristického polynomu $p_{\mathbb{A}}$.

Věta. (vlastní čísla a determinant) *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou všechna vzájemně různá vlastní čísla matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak platí, že*

$$\det \mathbb{A} = \lambda_1^{\nu_a(\lambda_1)} \lambda_2^{\nu_a(\lambda_2)} \cdots \lambda_k^{\nu_a(\lambda_k)}.$$

Věta. (vlastní čísla a regularita matice) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Matice $\mathbb{A}$ je regulární, právě když $0 \notin \sigma(\mathbb{A})$.*

Věta. (vlastní čísla trojúhelníkové matice) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ horní nebo dolní trojúhelníková matice. Pak vlastní čísla jsou rovna jejím diagonálním prvkům.*

Věta. (algebraická a geometrická násobnost) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí, že $\nu_a(\lambda) \geq \nu_g(\lambda)$.*

Věta. (LN vlastních vektorů) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou vzájemně různá vlastní čísla a $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou jim příslušné vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Pak $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ jsou LN.*

Věta. (báze z vlastních vektorů) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. V prostoru $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$ právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Poznámka. Máme-li $\mathbb{X}$ sestavenou z báze z vlastních vektorů příslušných $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tedy

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Tím jsme převedli matici $\mathbb{A}$ na diagonální $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Diagonalizovatelnost

Definice. (podobnost matic) Buďte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbb{A}$ je podobná matici $\mathbb{B}$, pokud existuje regulární matice $\mathbb{X}$ řádu n taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{B}\mathbb{X}^{-1}$.

Poznámka. Podobnost je relace ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n.

Věta. (vlastnosti podobných matic) *Buďte $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ a $\mathbb{A}$ je podobná $\mathbb{B}$.*

1. *Pak $p_{\mathbb{A}} = p_{\mathbb{B}}$, tedy i $\sigma(\mathbb{A}) = \sigma(\mathbb{B})$ a $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, kde $\nu_a^{\mathbb{A}}(\lambda)$ značí algebraickou násobnost čísla λ pro matici $\mathbb{A}$, podobně $\nu_a^{\mathbb{B}}(\lambda)$ pro $\mathbb{B}$.*
2. *Je-li $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, pak $\nu_g^{\mathbb{A}}(\lambda) = \nu_g^{\mathbb{B}}(\lambda)$.*
3. *Potom $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{B}$ a $Tr(\mathbb{A}) = Tr(\mathbb{B})$.*

Poznámka. Buď $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Platí, že $\mathbb{A}^T$ je podobná matici $\mathbb{A}$. Je-li $\mathbb{A}$ podobná $\mathbb{B}$, pak $\mathbb{A}^T$ je podobná $\mathbb{B}^T$ a $\mathbb{A}^{-1}$ je podobná $\mathbb{B}^{-1}$, pokud existují. Navíc jsou si podobné i v mocninách. Je-li alespoň jedna z matic regulární, pak $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je podobná $\mathbb{B}\mathbb{A}$.

Definice. (diagonalizovatelnost) Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom matici $\mathbb{A}$ nazveme diagonalizovatelnou, pokud je podobná diagonální matici, tj. existují matice $\mathbb{D}$ diagonální a $\mathbb{X}$ regulární tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{D}\mathbb{X}^{-1}$.

Věta. (diagonalizovatelnost a báze z vlastních vektorů) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když v $\mathbb{C}^n$ existuje báze z vlastních vektorů $\mathbb{A}$.*

Věta. (diagonalizovatelnost a násobnosti) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná právě tehdy, když pro každé $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ platí, že $\nu_a(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.*

Věta. (Hamiltonova-Caleyho) *Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$. Pak matice $\mathbb{A}$ je kořenem svého charakteristického polynomu.*

Poznámka. Podobné věty platí, že pro operátory avšak s ohledem na to, že všechna vlastní čísla musí být z tělesa. Navíc vlastní podprostor číslu λ získáme jako $P_\lambda = \ker(A - \lambda I)$. Dále se operátor diagonalizuje převodem do báze z vlastních vektorů. Tedy báze $\mathcal{Y}$ taková, že ${}^{\mathcal{Y}}\!A$ je diagonální matice. Operátor je diagonalizovatelný, právě když všechna jeho vlastní čísla jsou z tělesa a algebraické násobnosti se rovnají geometrickým.

Normální operátory a matice

Věta. (Rieszova) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Je-li $\varphi \in (\mathcal{H}_n)^{\#}$, pak existuje právě jeden vektor $\vec{y} \in \mathcal{H}_n$ takový, že $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Definice. (sdružený operátor) Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T a $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$. Pokud $B \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$ a B splňuje pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{H}_n$ vztah:

$$\langle A\vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} | B\vec{y} \rangle ,$$

pak B nazveme sdruženým operátorem k A a značíme A^*.

Poznámka. Nechá se ukázat existence a jednoznačnost, proto má smysl dávat sdruženému operátoru nějakou značku.

Věta. (matice sdruženého operátoru) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem T. Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$, $\mathcal{X}$ je ON báze $\mathcal{H}_n$. Pak platí, že*

$$^{\mathcal{X}}(A^*) = \left(^{\mathcal{X}}A\right)^H .$$

Poznámka. Horní index H značí hermitovské sdružení, jedná se o operaci transponace a komplexního sdružení.

Poznámka. Pro determinant sdruženého operátoru platí, že $\det A^* = \overline{\det A}$. Podobně spektrum sdruženého operátoru je komplexním sdružením toho původního.

Definice. (normální, hermitovský, unitární operátor) Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a nechť je dán operátor $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$.

- Pokud $AA^* = A^*A$, pak A nazveme normálním.
- Pokud $A = A^*$, pak A nazveme hermitovským.
- Pokud $AA^* = I$, pak A nazveme unitárním.

Poznámka. V případě, že jsme nad reálným tělesem, používáme místo pojmu hermitovský pojem symetrický a namísto unitární pojem ortogonální.

Poznámka. Podobně pro matice. $\mathbb{A}\mathbb{A}^H = \mathbb{A}^H\mathbb{A}$ je normální matice atd.

Věta. (normální operátory a normální matice) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$ a $\mathcal{X}$ je ON báze v $\mathcal{H}_n$.*

1. *A je normální operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je normální matice.*
2. *A je hermitovský operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je hermitovská matice.*
3. *A je unitární operátor, právě když $^{\mathcal{X}}A$ je unitární matice.*

Lemma. *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$. Nechť $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$ a A je hermitovský operátor. Jestliže $\langle A\vec{x} | \vec{x} \rangle = 0$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$, pak $A = \Theta$.*

Věta. (charakterizace normálních operátorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když $\|A\vec{x}\| = \|A^*\vec{x}\|$ pro každé $\vec{x} \in \mathcal{H}_n$.*

Věta. (vlastní vektory normálních operátorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$ je normální. Pak platí, že*

1. *$\lambda \in \sigma(A)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A příslušný λ, právě když $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$ a $\vec{x}$ je vlastní vektor A^* příslušný λ.*
2. *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.*

Věta. (diagonalizovatelnost normálních operátorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$. Je-li A normální operátor, pak A je diagonalizovatelný.*

Věta. (normální operátory a ON báze z vlastních vektorů) *Nechť je dán vektorový prostor $\mathcal{H}_n$ nad tělesem $\mathbb{C}$ a $A \in \mathscr{L}(\mathcal{H}_n)$. Pak A je normální, právě když v $\mathcal{H}_n$ existuje ON báze z vlastních vektorů.*